MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

47. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

47. BAND

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1942

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Inhalt des 47. Bandes.

Seite

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 676

Avakumović, V. G., Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. III. 141

Beck, H., Kurvenkongruenzen und volumentreue Transformationen 275

Bödewadt, U. T., Die Fourierentwicklung des Sinus, Cosinus und der Umkehrung einer Fourierreihe 655

Brauner, K., und Müller, H. R., Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden 291

Carathéodory, C., Über das Maximum des absoluten Betrages des Differenzenquotienten für unimodular beschränkte Funktionen 468

Collatz, L., Einschließungssatz für die Eigenwerte von Integralgleichungen 395

Deuring, M., Zur Theorie der Moduln algebraischer Funktionenkörper . . 34

Deuring, M., Invarianten und Normalformen elliptischer Funktionenkörper 47

Deuring, M., Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers 643

Dinghas, A., Neuer Beweis eines Satzes von Wirtinger und Blaschke . . . 265

Dinghas, A., Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken 669

Dinghas, A., Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung 677

Dobbrack, G., Differentialgeometrie der Kugelkomplexe. II. Minimalkomplexe 1

Garten, V., Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen 111

Gericke, H., Zur Relativ-Geometrie ebener Kurven 215

Hadwiger, H., Über die Konvergenzarten unendlicher Reihen im Hilbertschen Raum 325

Hadwiger, H., Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen 663

Hajós, G., Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter 427

Hällström, G. af, Zwei Beispiele ganzer Funktionen mit algebraischem Höchstindex einer Stellensorte 161

Heinhold, J., Zur Geometrie der Zahlen 199

Kamke, E., Über Sturms Vergleichssätze für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Systeme von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung 788

Kiang, S., Über die Fouriersche Entwicklung der singulären Funktion bei einer Lebesgueschen Zerlegung 330

Klein-Barmen, F., Molekulare Verbände 373

Seite

Klein-Barmen, F., Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung 85

Knopp, K., Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der *C*- und *H*-Verfahren 229

Kommerell, K., Maßkegelschnitt und Trigonometrie 738

Koschmieder, L., Beziehungen zwischen Temperaturen und Potentialen 125

Lammel, E., Zum Interpolationsproblem im Einheitskreise meromorpher Funktionen. I. 132

Lense, J., Über die Ableitungsgleichungen einer Mannigfaltigkeit im mehrdimensionalen komplexen euklidischen Raum 78

Lipka, St., Über die Abzählung der reellen Wurzeln von algebraischen Gleichungen 343

Müller, H. R., und Brauner, K., Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden 291

Paatero, V., Über beschränkte Funktionen, welche gegebene Paare von Randbogen ineinander überführen 175

Perron, O., Über die Approximation stetiger Funktionen durch trigonometrische Polynome 57

Perron, O., Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker . . 318

Pylarinos, O., Über die Lagrangeschen Fälle im verallgemeinerten Dreikörperproblem 357

Rellich, Fr., Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$ 153

Schmid, H. L., Zur Meromorphismentheorie der elliptischen Funktionenkörper 399

Schmidt, E., Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen 489

Schubert, H., Ein potentialtheoretischer Hilfssatz 8

Stöhr, A., Anzahlabschätzung einer bekannten Basis h-ter Ordnung 778

Strubecker, K., Differentialgeometrie des isotropen Raumes. II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$ 743

Thomas, H., Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden 66

Tietze, H., Über die Anzahl komprimierter Gitterpunktmengen von gegebener Punktezahl 352

Weiss, E. A., Die Koppelkurve als Laguerresches Bild einer Hesseschen Korrespondenz 187

Weissinger, J., Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie 16

Wittich, H., Ganze Lösungen der Differentialgleichung $w'' = f(w)$ 422

Yannopoulos, C., Zur Kettenbruchtheorie im Dreidimensionalen 105

Berichtigung

(A. Stöhr, Anzahlabschätzung einer bekannten Basis h-ter Ordnung, S. 778—787).

Auf Seite 779, Gleichung (10) lies $\overline{\text{fin}}$ statt $\underline{\text{fin}}$ und $\overline{\text{lim}}$ statt $\underline{\text{lim}}$. Die drei auf Gleichung (10) folgenden Zeilen von „Wir haben ..." bis „... im Großen bekannt." sind zu streichen. Im übrigen bleibt der Inhalt der Arbeit unberührt. — Herrn H.-H. Ostmann danke ich für den Hinweis auf den Fehler.

Alfred Stöhr.

Differentialgeometrie der Kugelkomplexe. II.

Minimalkomplexe.

Von

Gerhard Dobbrack in Berlin.

In Analogie zu den Minimalflächen der metrischen Flächentheorie werden die Kugelkomplexe, in denen die erste Variation des Integrals über die Diskriminante des Grundtensors verschwindet, Minimal-Kugelkomplexe genannt. Das Ziel der nachfolgenden Untersuchung ist ihre analytische und geometrische Kennzeichnung in Fortsetzung der früheren Arbeit des Verfassers[1]). Der Arbeit von Herrn W. Haack über die Minimalkomplexe der Liniengeometrie[2]) verdanke ich die Anregung und manchen wertvollen Wink für die Durchführung nachfolgender Untersuchung; es sei auf die Analogien (zumal der Sätze 1 und 3 mit den Sätzen 1 und 2 der Haackschen Arbeit) ausdrücklich hingewiesen.

§ 1.

Einleitung[1]).

Ein Kugelkomplex wird in der konformen Geometrie dargestellt durch einen „Fünfervektor"

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1,$$

dessen Komponenten die pentasphärischen Koordinaten der Komplexkugel sind. [Neben den pentasphärischen benutzt man noch die hexasphärischen Koordinaten einer Kugel, man führt neben den Fünfervektoren (kleine deutsche Buchstaben) vermittels eines „absoluten Komplexes" $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}\mathfrak{P} = -1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{x} = 0$) noch Sechservektoren (große deutsche Buchstaben) ein.] Zu $\mathfrak{x}$ und seinen Ableitungen $\mathfrak{x}_i$ steht eine fünfte Kugel, $\mathfrak{y}$, die Normalkugel, senkrecht ($\mathfrak{y}\mathfrak{y} = \iota = \pm 1$); durchläuft $\mathfrak{x}$ den Komplex (den Hauptkomplex HK.), so durchläuft $\mathfrak{y}$ den Normalkomplex (NK.). Diese Vektoren bilden eine begleitende Basis des Komplexes, zu denen für Sechservektoren noch $\mathfrak{P}$ hinzutritt. Man gewinnt daraus den ersten und zweiten Fundamentaltensor

$$G_{ik} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k, \quad H_{ik} = \iota\, \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k;$$

[1]) Vgl. über Voraussetzungen und Einzelheiten des Formelapparates die **unter meinem früheren Namen Paetz erschienene** Arbeit Differentialgeometrie der Kugelkomplexe I, Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 669–705 (später zitiert als I).

[2]) W. Haack, Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe IV. Math. Zeitschr. **41**, (1936), S. 252–260.

$|G_{ik}|$ wird von Null verschieden angenommen (*reguläre Kugelkomplexe*), G_{ik} dient daher als Maßtensor für den Ricci-Kalkül. Es gelten die Ableitungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} {}_{\iota}\mathfrak{y}_i &= H_{ik}\,\mathfrak{x}^k, \\ \mathfrak{x}_{ik} &= -G_{ik}\,\mathfrak{x} - H_{ik}\,\mathfrak{y}. \end{aligned}$$

Die Tensoren G_{ik} und H_{ik} haben drei unabhängige Simultaninvarianten 2. Ordnung, als die man entweder die *Normalkrümmungen* $\underset{\alpha}{\nu}$ ($\alpha = 1, 2, 3$),

$$(2)\qquad |-\underset{\alpha}{\nu}\,G_{ik} + H_{ik}| = 0$$

oder die *mittleren Krümmungen*

$$(3)\qquad H = H_{ik}G^{ik} = \sum_{\alpha} \underset{\alpha}{\nu}, \quad J = \frac{1}{2}(H^2 - H_{ik}H^{ik}) = \sum_{\alpha \neq \beta} \underset{\alpha}{\nu}\,\underset{\beta}{\nu},$$

$$K = \frac{|H_{ik}|}{|G_{ik}|} = \underset{1}{\nu}\,\underset{2}{\nu}\,\underset{3}{\nu}$$

nehmen kann. Die Fälle $\underset{\alpha}{\nu} = 0$ und $K = 0$ sind schon untersucht worden (I, § 4), für $H = 0$ und $J = 0$ soll im folgenden eine Kennzeichnung gegeben werden.

§ 2.

Definition der Minimalkomplexe. Das Verschwinden von H und J.

Das invariante Integral

$$(1)\qquad V = \iiint \sqrt{-\iota\,|G_{ik}|}\,du^1\,du^2\,du^3,$$

erstreckt über einen Bereich der Parameter $u^{(i)}$, ist von erster Ordnung in bezug auf $\mathfrak{x}$, es ist daher das einzige dieser Art.

Definition. *Ein regulärer Kugelkomplex heißt ein Minimalkomplex, wenn die erste Variation des Integrals* (1) *für ein beliebiges Gebiet im Komplex verschwindet.* Der Rand des Gebietes werde bei der Variation festgehalten, Nebenbedingungen sind $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 1$, $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$.

Zur Berechnung der ersten Variation erteilen wir jeder Kugel des Komplexes in dem betreffenden Gebiet eine Verschiebung $\delta\mathfrak{x}$, die wegen der Nebenbedingungen die Form hat

$$\delta\mathfrak{x} = \varepsilon\,(\eta\,\mathfrak{y} + \zeta^i\,\mathfrak{x}_i);$$

hierin ist ε hinreichend klein und konstant, so daß die höheren Potenzen vernachlässigt werden können; η und ζ^i sind hinreichend oft differenzierbare Funktionen der $u^{(i)}$. Durch diese Verschiebung entsteht aus $(\mathfrak{x})$ ein Komplex $(\bar{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{x})$, dessen erster Fundamentaltensor sich mit Hilfe der Ableitungsgleichungen § 1 (1) zu

$$(2)\qquad \bar{G}_{ik} = G_{ik} + \varepsilon\,(\zeta_{ik} + \zeta_{ki} + 2\,{}_{\iota}\eta H_{ik})$$

errechnet. Hieraus folgt

$$(3) \qquad \frac{|\bar{G}_{ik}|}{|G_{ik}|} \equiv -\frac{\iota}{6} E^{pqk} E^{rlm} \bar{G}_{pr} \bar{G}_{ql} \bar{G}_{km} = 1 + 2\varepsilon(\zeta_{ik} G^{ik} + \iota \eta H).$$

Daher ist das Integral (1) für den Komplex $(\bar{\mathfrak{x}})$:

$$(4) \qquad \bar{V} = V + \varepsilon \iiint \zeta_{ik} G^{ik} \sqrt{-\iota |G_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3 + \\ + \iota\varepsilon \iiint \eta H \sqrt{-\iota |G_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3.$$

Das erste Integral rechts verschwindet, da man es mit Hilfe des Greenschen Satzes[3]) in ein Integral über das berandende Kugelsystem umwandeln kann, dessen Integrand nach Voraussetzung am Rande verschwindet:

$$\iiint \zeta_{ik} G^{ik} \sqrt{-\iota |G_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3 = \oint \zeta_i d\omega^i = 0$$

($d\omega^i$ ist der Vektor des Integrationselements für das berandende Kugelsystem). Daher erhält man für die erste Variation

$$(5) \qquad \boxed{\delta V = \varepsilon \iota \iiint \eta H \sqrt{-\iota |G_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3} \;;$$

soll diese für alle $(\bar{\mathfrak{x}})$ verschwinden, muß

$$(6) \qquad H = 0$$

sein.

Satz 1. *Die Minimalkomplexe sind durch das Verschwinden der Invariante H gekennzeichnet.*

Nach I, § 4 sind für den Normalkomplex die den Invarianten H und J entsprechenden Invarianten

$$H^* = \frac{J}{K}, \qquad J^* = \frac{H}{K}.$$

Beschränken wir uns zunächst auf $K \neq 0$, so ist der NK. nicht entartet und HK. und NK. entsprechen sich völlig:

Satz 2. *Ein regulärer Kugelkomplex mit $J = 0$ ist der Normalkomplex eines Minimalkomplexes.*

Dieser Satz bleibt auch gültig für $K = 0$, wenn man ausnahmsweise die entarteten Kugelkomplexe zu den Minimalkomplexen zählt: dann ist $(\mathfrak{x})$ NK. eines entarteten Komplexes $(\mathfrak{y})$, für den die Diskriminante der ersten Fundamentalform verschwindet, so daß $V \equiv 0$ ist und die Extremalforderung trivial wird.

---

[3]) J. A. Schouten, Der Ricci-kalkül (1924), S. 95–99.

§ 3.

Geometrische Kennzeichnungen. Der Apolarkomplex.

1. *Kennzeichnung durch die Berührungskomplexe.* Wir betrachten im Komplex zu einer bestimmten Komplexkugel ein Tripel zueinander orthogonaler Fortschreitungsrichtungen $\dot{u}^i_{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) (von denen daher keine eine Berührungsrichtung ist). Dann ist wegen

$$G^{ik} = \sum_{\alpha} \dot{u}^i_{(\alpha)} \dot{u}^k_{(\alpha)}$$

die Invariante

$$H \equiv H_{ik} G^{ik} = \sum_{\alpha} \nu_{(\alpha)} \tag{1}$$

gleich der Summe der Normalkrümmungen (I, § 6)

$$\nu = \frac{\dot{u}^i H_{ik} \dot{u}^k}{\dot{u}^i G_{ik} \dot{u}^k} \tag{2}$$

für jene drei Richtungen. Verschwindet also diese Summe für jedes Tripel zueinander orthogonaler Fortschreitungsrichtungen, und gilt dies für jede Komplexkugel $\mathfrak{x}$, so ist $(\mathfrak{x})$ ein Minimalkomplex.

Die zu einer Fortschreitungsrichtung gehörende Normalkrümmung war schon in I, § 6 geometrisch gedeutet worden. Zu jeder Richtung gehört ein *linearer Berührungskomplex*, dargestellt durch den Sechservektor $\mathfrak{B}$, der in dieser Richtung die Umgebung von $\mathfrak{x}$ nicht nur in erster, sondern auch noch in zweiter Ordnung enthält[4]):

$$\mathfrak{B} = -\nu(\mathfrak{x} - \mathfrak{P}) + \imath\mathfrak{y}. \tag{3}$$

Dieser lineare Komplex besteht aus den ∞^3 Kugeln, deren Vektoren $\mathfrak{z}$ der Gleichung $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} = 0$ (mit $\mathfrak{Z} = \mathfrak{z} - \sqrt{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\,\mathfrak{P}$) genügen; das besagt aber, daß diese Kugeln eine feste Kugel

$$\mathfrak{b} = -\nu\mathfrak{x} + \imath\mathfrak{y}, \tag{4}$$

die Grundkugel von $\mathfrak{B}$, unter demselben Winkel ω mit

$$\operatorname{ctg}\omega = -\imath\sqrt{\imath}\,\nu \tag{5}$$

schneiden. Daher folgt aus (1) für die so den drei Richtungen des Tripels zugeordneten Winkel $\omega_{(\alpha)}$:

$$H = -\sqrt{\imath}\sum_{\alpha} \operatorname{ctg}\omega_{(\alpha)}. \tag{6}$$

Die rechts stehende Summe ist also von der Auswahl des Richtungstripels unabhängig, sie hängt nur von der Komplexkugel $\mathfrak{x}$ ab.

---

[4]) Die Normalkrümmung $\nu = \infty$ sei den parabolischen oder Berührungsrichtungen zugeordnet (I, § 6).

Satz 3. *Ein regulärer Kugelkomplex ist ein Minimalkomplex, wenn folgendes gilt: es verschwindet für jede Komplexkugel $\mathfrak{x}$ die Summe der Kotangenten der Schnittwinkel von $\mathfrak{x}$ mit den Grundkugeln derjenigen Berührungskomplexe, die zu einem beliebigen Tripel zueinander orthogonaler Fortschreitungsrichtungen gehören.*

Drei derartige Richtungen kann man im allgemeinen stets angeben. Wie aus (3) ersichtlich, gehört zu jeder Komplexkugel ein Büschel von ∞^1 linearen Berührungskomplexen, von denen jeder durch einen festen Wert der Normalkrümmung ν charakterisiert ist und in der geschilderten Weise ∞^1 Fortschreitungsrichtungen $\dot{u}^i$ mit

$$\dot{u}^i \dot{u}^k (-\nu G_{ik} + H_{ik}) = 0 \tag{7}$$

zugeordnet ist. Setzt man nun für ν die durch § 1 (2) definierten Hauptkrümmungen $\underset{\alpha}{\nu}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) ein, so erhält man die *Hauptberührungskomplexe* $\underset{\alpha}{\mathfrak{B}}$, die zu den *Hauptrichtungen* $\underset{\alpha}{n^i}$,

$$\underset{\alpha}{n^i} (-\underset{\alpha}{\nu} G_{ik} + H_{ik}) = 0, \tag{8}$$

gehören. Letztere bilden ein Tripel zueinander orthogonaler Richtungen, wenn alle drei Hauptkrümmungen voneinander verschieden sind; insbesondere verschwindet dann bei Minimalkomplexen die Summe der Kotangenten der Winkel, die $\mathfrak{x}$ mit den Grundkugeln der Hauptberührungskomplexe bildet. Das Tripel der Hauptrichtungen (und damit die zugehörigen Berührungskomplexe) ist sogar Lie-geometrisch invariant mit dem HK. verbunden (weitere Eigenschaften dieser Richtungen siehe I, § 6).

2. *Der Apolarkomplex.* Die zu einem Tripel zueinander orthogonaler Richtungen gehörenden Berührungskomplexe $\underset{(\alpha)}{\mathfrak{B}}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) spannen ein Komplexbündel aus, falls wenigstens zwei der $\underset{(\alpha)}{\mathfrak{B}}$ voneinander verschieden sind, was durch passende Wahl des Tripels stets erreichbar ist:

$$\mathfrak{B} = \sum_{\alpha} \underset{(\alpha)}{C} \underset{(\alpha)}{\mathfrak{B}}. \tag{9}$$

Dieses Bündel ist entartet: es ist das Komplexbüschel der ∞^1 Berührungskomplexe (3). Man erkennt aus (9), daß eine Umnumerierung des Tripels die Berührungskomplexe paarweise miteinander vertauscht (wenn man die Komplexe mit gleichen $\underset{(\alpha)}{C}$ einander zuordnet). Bei beliebigen Umnumerierungen ist daher

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{3}(\underset{(1)}{\mathfrak{B}} + \underset{(2)}{\mathfrak{B}} + \underset{(3)}{\mathfrak{B}}) \tag{10}$$

der einzige Berührungskomplex, der sich selbst zugeordnet wird. Es ist bemerkenswert, daß $\mathfrak{A}$ unabhängig ist von der Wahl des Richtungstripels (und

damit der $\underset{(\alpha)}{\mathfrak{B}}$), da nach (1) und (3)

$$(11) \qquad \boxed{\mathfrak{A} = -\frac{H}{3}(\mathfrak{x} - \mathfrak{P}) + \iota\mathfrak{y}} \qquad \boxed{\nu_{\mathfrak{y}} = \frac{H}{3}}$$

gilt. Wegen $H = \sum_{\alpha} \nu$ wird $\mathfrak{A}$ auch

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{3}(\underset{1}{\mathfrak{B}} + \underset{2}{\mathfrak{B}} + \underset{3}{\mathfrak{B}}),$$

wo $\underset{\alpha}{\mathfrak{B}}$ die Hauptberührungskomplexe sind (das gilt stets, nicht nur, wenn die $\underset{\alpha}{\nu}$ voneinander verschieden sind): $\mathfrak{A}$ ist daher auch gegenüber Lie-Transformationen invariant mit $\mathfrak{x}$ verbunden. Er sei als *apolarer Berührungskomplex* bezeichnet [5]).

Der Apolarkomplex hat eine Reihe charakteristischer geometrischer Eigenschaften. Gibt es Tripel zueinander orthogonaler Richtungen $\underset{(\alpha)}{\dot{u}^i}$, die zu demselben Berührungskomplex gehören, so muß dies der Apolarkomplex sein. Denn aus (7) folgt für jedes $\alpha = 1, 2, 3$

$$\underset{(\alpha)}{\dot{u}^i}\,\underset{(\alpha)}{\dot{u}^k}\,(-\nu G_{ik} + H_{ik}) = 0,$$

also $\nu = \underset{(\alpha)}{\nu}$ und damit nach (1) $\nu = \frac{H}{3}$. Aber es gibt auch stets derartige Richtungstripel. Um dies zu zeigen, wähle man etwa zwei nichtparabolische und zueinander orthogonale Richtungen $\underset{(1)}{\dot{u}^i}$, $\underset{(2)}{\dot{u}^k}$ so aus, daß sie zu $\mathfrak{A}$ gehören, was stets möglich ist:

$$\underset{(\beta)}{\dot{u}^i}\,\underset{(\beta)}{\dot{u}^k}\left(-\frac{H}{3}G_{ik} + H_{ik}\right) = 0 \qquad (\beta = 1, 2).$$

Zu beiden Richtungen steht eine dritte, ebenfalls nichtparabolische Richtung $\underset{(3)}{\dot{u}^i}$ senkrecht, für die sich aus (1), $\underset{(3)}{\nu} = H - \underset{(1)}{\nu} - \underset{(2)}{\nu} = \frac{H}{3}$, und

$$\underset{(3)}{\dot{u}^i}\,\underset{(3)}{\dot{u}^k}\left(-\frac{H}{3}G_{ik} + H_{ik}\right) = \underset{(3)}{\dot{u}^i}\,\underset{(3)}{\dot{u}^k}\,G_{ik}\left(-\frac{H}{3} + \underset{(3)}{\nu}\right)$$

ergibt, daß sie auch zu $\mathfrak{A}$ gehört: gehören drei Richtungen eines Tripels orthogonaler Richtungen zu $\mathfrak{A}$, so gehört auch die dritte dazu.

Eine andere Kennzeichnung des Apolarkomplexes erlangt man für den Fall, daß die drei Hauptkrümmungen voneinander verschieden sind (der Kugelkomplex soll also nur aus „gewöhnlichen" Stellen im Sinne von I, § 3

---

[5]) I, § 9. Vgl. auch R. Sauer, Proj. Liniengeometrie (1937), S. 172. Der nach (7) dem Apolarkomplex zugeordnete Tensor $B_{ik} = -\frac{H}{3}G_{ik} + H_{ik}$ ist durch die Bestimmung $B_{ik}G^{ik} = 0$ gekennzeichnet; daher ist in der Ebene E (I, § 3) der Kegelschnitt $B_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k = 0$ der zu $G_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k = 0$ apolare Kegelschnitt des Kegelschnittbüschels $(-\nu G_{ik} + H_{ik})\dot{u}^i\dot{u}^k = 0$, womit sich der Name des Komplexes rechtfertigt.

bestehen). Dann bilden die Hauptrichtungen $\overset{i}{u}_\alpha$ ein Tripel zueinander orthogonaler Richtungen. Betrachten wir nun den geometrischen Repräsentanten einer Fortschreitungsrichtung $\dot{u}^i$, nämlich die Querkugel (I, § 2)

$$\dot{\mathfrak{x}} = \dot{u}^i \mathfrak{x}_i,$$

so kann man nach allen nichtparabolischen Richtungen fragen, deren Querkugeln die drei Hauptquerkugeln $\overset{i}{n}_\alpha \mathfrak{x}_i$ unter demselben Winkel schneiden:

$$\frac{\dot{u}^i \overset{i}{n}_\alpha}{\sqrt{\dot{u}^i \dot{u}_i}\sqrt{\overset{i}{n}_\alpha \overset{i}{n}_\alpha}} = A,$$

wo A von α unabhängig ist. Aus dem Ansatz

$$\dot{u}^i = \sum_\alpha C_\alpha \frac{\overset{i}{n}_\alpha}{\sqrt{\overset{i}{n}_\alpha \overset{i}{n}_\alpha}}$$

folgt

$$\dot{u}^i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_\alpha \frac{\overset{i}{n}_\alpha}{\sqrt{\overset{i}{n}_\alpha \overset{i}{n}_\alpha}}; \tag{12}$$

es gibt also bei gegebener Normierung der $\overset{i}{n}_\alpha$ nur eine derartige Richtung, die man die *Zentralrichtung* des Kugelkomplexes nennen kann. *Der lineare Berührungskomplex, der der Zentralrichtung zugeordnet ist, ist der Apolarkomplex*, denn die Normalkrümmung von (12) berechnet sich zu $\nu = \frac{H}{3}$, wenn man berücksichtigt, daß unter der Voraussetzung $\nu_1 \neq \nu_2 \neq \nu_3$ die Hauptrichtungen eine Darstellung

$$G_{ik} = \sum_\alpha \frac{\overset{i}{n}_\alpha \overset{k}{n}_\alpha}{\overset{l}{n}_\alpha \overset{l}{n}_\alpha}, \qquad H_{ik} = \sum_\alpha \nu_\alpha \frac{\overset{i}{n}_\alpha \overset{k}{n}_\alpha}{\overset{l}{n}_\alpha \overset{l}{n}_\alpha}$$

gestatten.

3. *Kennzeichnung durch den Apolarkomplex.* Für $H = 0$ folgt aus Satz 3 und (11) $\mathfrak{A} = \iota\mathfrak{y}$; es fällt also für Minimalkomplexe die Grundkugel des Apolarkomplexes mit der Normalkugel zusammen. Bezeichnet man wegen der Invarianz der Apolarität gegenüber Lie-Transformationen des HK. den Apolarkomplex als den Lie-geometrisch ausgezeichneten Berührungskomplex, und beachtet man, daß der Fünfervektor $\mathfrak{y}$ den einzigen involutorischen Berührungskomplex darstellt (I, § 3), so kann man auch sagen:

Satz 4. *Für Minimalkomplexe und nur für diese fällt der Lie-geometrisch ausgezeichnete unter den linearen Berührungskomplexen mit dem Möbius-geometrisch ausgezeichneten zusammen.*

(Eingegangen am 24. Mai 1940.)

Ein potentialtheoretischer Hilfssatz.

Von

Hans Schubert,

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof.

Es sei $g(\vartheta)$ eine auf dem Rande des Einheitskreises der r, ϑ-Ebene erklärte Ortsfunktion, die dort gleichmäßig für alle ϑ einer L-Bedingung

$$|g(\vartheta + h) - g(\vartheta)| \leqq A_1 |h|^\lambda \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1}$$

genügt. Dann erfüllt die im Innern des Bereiches $r \geqq 1$ reguläre Potentialfunktion

$$u(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r\cos(t - \vartheta)} dt \tag{2a}$$

gleichmäßig für alle ϑ und alle $r \geqq 1$, wie man unmittelbar erkennt, eine zu (1) analoge Ungleichung von der Form

$$|u(r, \vartheta + h) - u(r, \vartheta)| \leqq A_2 |h|^\lambda, \tag{3a}$$

worin A_2 eine nur von λ abhängige Konstante bedeutet. Auf Grund eines von Priwaloff[1]) verschärften Hilfssatzes von Fatou[2]) gilt auch für die zu $u(r, \vartheta)$ konjugierte Potentialfunktion

$$v(r, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{r\sin(t - \vartheta)}{1 + r^2 - 2r\cos(t - \vartheta)} dt \tag{2b}$$

wiederum gleichmäßig für alle ϑ und alle $r \geqq 1$ eine zu (3a) analoge L-Bedingung

$$|v(r, \vartheta + h) - v(r, \vartheta)| \leqq A_3 |h|^\lambda. \tag{3b}$$

Im Zusammenhang mit aerodynamischen Randwertproblemen[3]) erhob sich die Frage nach der Gültigkeit der Ungleichungen (3a) und (3b) in dem Falle,

---

[1]) I. Priwaloff, Sur les fonctions conjugées. Bull. Soc. math. France **44** (1916), S. 100–103.

[2]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. **30** (1906), S. 335–400, insbesondere S. 358ff.

[3]) H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 245–264. H. Schubert, Über einige Eigenschaften elliptischer und nicht-elliptischer Tragflügel. Luftfahrt-Forschung **15** (1938), S. 235–242.

daß die Ortsfunktion $g(\vartheta)$ nur auf einzelnen Teilbogen des Einheitskreises der Bedingung (1) genügt und längs $r = 1$ absolut integrierbar ist. Eine Beantwortung dieser Frage enthält der folgende Hilfssatz, der sich durch sinngemäße Verallgemeinerung der Priwaloffschen Überlegungen auf völlig elementarem Wege beweisen läßt.

Hilfssatz. *Auf dem Rande des Einheitskreises der r, ϑ-Ebene sei eine absolut integrierbare Ortsfunktion $g(\vartheta)$ erklärt, und zwar werde*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(\vartheta)|\, d\vartheta = C_1 \tag{4}$$

gesetzt; außerdem genüge $g(\vartheta)$ gleichmäßig für alle ϑ des Intervalls $\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$ der L-Bedingung

$$|g(\vartheta + h) - g(\vartheta)| \leqq C_2 |h|^{\lambda} \quad \left(0 < \lambda < 1,\ |h| \leqq h_0 < \frac{|\vartheta_1 - \vartheta_2|}{2} \leqq \pi\right) \tag{5}$$

mit den Konstanten C_2, λ, h_0. Dann gelten für die im Innern des Bereiches $r \geqq 1$ regulären Potentialfunktionen (2a) *und* (2b) *gleichmäßig für alle ϑ des Intervalls $\vartheta_1 + h_0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2 - h_0$ und alle $r \geqq 1$ die Ungleichungen*

$$|u(r, \vartheta + h) - u(r, \vartheta)| \leqq \{B_1(\lambda, h_0) C_1 + B_2(\lambda, h_0) C_2\} |h|^{\lambda} \tag{6a}$$

bzw.

$$|v(r, \vartheta + h) - v(r, \vartheta)| \leqq \{B_3(\lambda, h_0) C_1 + B_4(\lambda, h_0) C_2\} |h|^{\lambda}. \tag{6b}$$

1. Beweis der Ungleichung (6a).

Umformung der Differenz $u(r, \vartheta + h) - u(r, \vartheta)$.

In den Fällen $1 \leqq r \leqq 2$, $\frac{1}{4} h_0 \leqq |h| \leqq h_0$ sowie $r \geqq 2$, $|h| \leqq h_0$ läßt sich die Gültigkeit der behaupteten Ungleichung (6a) mühelos zeigen, da für das im Nenner des Integranden von (2a) stehende Abstandsquadrat

$$1 + r^2 - 2r \cos(t - \vartheta)$$

der Punkte (r, ϑ) und $(1, t)$ die Abschätzungen

$$1 + r^2 - 2r \cos(t - \vartheta) \geqq 1 + r^2 - 2r \cos \tfrac{1}{4} h_0 \tag{7}$$

$$\text{bzw.} \quad 1 + r^2 - 2r \cos(t - \vartheta) \geqq 1$$

gelten. Daher können wir den Beweis von (6a) auf den Fall $1 \leqq r \leqq 2$ $|h| \leqq \frac{1}{4} h_0$ beschränken. Zur Abkürzung werde

$$K(r, \vartheta; t) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \vartheta)} \tag{8}$$

und

$$\Delta K = K(r, \vartheta + h; t) - K(r, \vartheta; t). \tag{9}$$

Dann geht (2a) über in

$$u(r,\vartheta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,K(r,\vartheta;t)\,dt, \tag{10}$$

und die Differenz $u(r,\vartheta+h)-u(r,\vartheta)$ läßt sich unter Beachtung von

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(r,\vartheta;t)\,dt = 1 \tag{11}$$

in der Form

$$\begin{aligned}
&u(r,\vartheta+h)-u(r,\vartheta)\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt +\\
&\quad +\{g(\vartheta+h)-g(\vartheta)\}\int_{-\pi}^{\pi}K(r,\vartheta;t)\,dt\\
&= \int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt - \int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt +\\
&\quad +\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt +\\
&\quad +\int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+\pi}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt -\\
&\quad -\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-3|h|}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt - \int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+\pi}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt +\\
&\quad +\{g(\vartheta+h)-g(\vartheta)\}\Big(\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-3|h|}K(r,\vartheta;t)\,dt + \int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}K(r,\vartheta;t)\,dt + \int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+\pi}K(r,\vartheta;t)\,dt\Big)
\end{aligned}$$

schreiben. Hieraus folgt mit Benutzung von (9)

$$\begin{aligned}
u(r,\vartheta+h)-u(r,\vartheta) &= \int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt -\\
&- \int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt + \int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-3|h|} g(t)\,\Delta K\,dt + \int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+\pi} g(t)\,\Delta K\,dt -\\
&- g(\vartheta+h)\Big(\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-3|h|}\Delta K\,dt + \int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+\pi}\Delta K\,dt\Big) +\\
&+ \{g(\vartheta+h)-g(\vartheta)\}\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}K(r,\vartheta;t)\,dt
\end{aligned}$$

oder

$$(12)\quad u(r,\vartheta+h)-u(r,\vartheta)=\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt-$$
$$-\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt+\int_{\vartheta-h_0}^{\vartheta-3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}\Delta K\,dt+$$
$$+\int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+h_0}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}\Delta K\,dt+\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-h_0}g(t)\,\Delta K\,dt+\int_{\vartheta+h_0}^{\vartheta+\pi}g(t)\,\Delta K\,dt-$$
$$-g(\vartheta+h)\left\{\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-h_0}\Delta K\,dt+\int_{\vartheta+h_0}^{\vartheta+\pi}\Delta K\,dt\right\}+$$
$$+\{g(\vartheta+h)-g(\vartheta)\}\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}K(r,\vartheta;t)\,dt.$$

Führt man noch die Bezeichnungen

$$(13a)\qquad I_1=\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}K(r,\vartheta+h;t)\,dt,$$
$$I_2=\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}\{g(t)-g(\vartheta)\}K(r,\vartheta;t)\,dt,$$

$$(13b)\quad I_3=\int_{\vartheta-h_0}^{\vartheta-3|h|}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}\Delta K\,dt,\quad I_4=\int_{\vartheta+3|h|}^{\vartheta+h_0}\{g(t)-g(\vartheta+h)\}\Delta K\,dt,$$

$$(13c)\quad I_5=\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-h_0}g(t)\,\Delta K\,dt,\qquad I_6=\int_{\vartheta+h_0}^{\vartheta+\pi}g(t)\,\Delta K\,dt,\qquad I_7=\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta-h_0}\Delta K\,dt,$$

$$(13d)\qquad I_8=\int_{\vartheta+h_0}^{\vartheta+\pi}\Delta K\,dt,\qquad I_9=\int_{\vartheta-3|h|}^{\vartheta+3|h|}K(r,\vartheta;t)\,dt$$

ein, so erhält man an Stelle von (12) die Beziehung

$$(14)\quad u(r,\vartheta+h)-u(r,\vartheta)=I_1-I_2+I_3+I_4+I_5+I_6-$$
$$-g(\vartheta+h)\{I_7+I_8\}+\{g(\vartheta+h)-g(\vartheta)\}I_9.$$

Abschätzung von $K(r,\vartheta;t)$ *und* $\Delta K=K(r,\vartheta+h;t)-K(r,\vartheta;t)$.

Im Kreisringbereich $1\leqq r\leqq 2$ gilt für den Abstand

$$d=\sqrt{1+r^2-2r\cos(t-\vartheta)}$$

der Punkte (r,ϑ) und $(1,t)$ offenbar

$$(15a)\qquad d\geqq r-1,\quad d\geqq 2\sin\left|\tfrac{1}{2}(t-\vartheta)\right|$$

und demzufolge für den Abstand

$$d_h=\sqrt{1+r^2-2r\cos(t-\vartheta-h)}$$

der Punkte $(r, \vartheta + h)$ und $(1, t)$

$$d_h \geqq r - 1, \quad d_h \geqq 2 \sin |\tfrac{1}{2}(t - \vartheta - h)|. \tag{15b}$$

Aus (8) und (15) ergibt sich dann im Bereich $1 \leqq r \leqq 2$ für alle Werte von ϑ und $t \neq \vartheta$

$$|K(r, \vartheta; t)| \leqq \frac{3}{4\pi \sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta)|} \tag{16a}$$

und ebenso für alle Werte $\vartheta + h$ und $t \neq \vartheta + h$

$$|K(r, \vartheta + h; t)| \leqq \frac{3}{4\pi \sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)|}. \tag{16b}$$

Ferner erhält man wegen

$$d^2 - d_h^2 = 4r \sin\left(t - \vartheta - \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}$$

$$= 4r \left|\sin \tfrac{1}{2}(t - \vartheta - h) \cos \tfrac{1}{2}(t - \vartheta) + \cos \tfrac{1}{2}(t - \vartheta - h) \sin \tfrac{1}{2}(t - \vartheta)\right| \sin \frac{h}{2}$$

bei Beachtung von (15) die Beziehung

$$|d - d_h| = \frac{|d^2 - d_h^2|}{d + d_h} \leqq 2r \sin \left|\frac{1}{2} h\right|.$$

Hieraus und aus (15) folgt für die Kerndifferenz

$$\Delta K = \frac{r^2 - 1}{2\pi}(d - d_h)\left(\frac{1}{d\, d_h^2} + \frac{1}{d^2 d_h}\right)$$

im Bereich $1 \leqq r \leqq 2$ die Ungleichung

$$|\Delta K| \leqq \frac{r^2 - 1}{2\pi} \cdot 2r \sin \left|\frac{1}{2} h\right| \cdot \frac{1}{2(r-1) \sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta)| \sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)|}$$

oder

$$|\Delta K| \leqq \frac{3}{\pi} \frac{\sin |\frac{1}{2} h|}{\sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta)| \sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)|} \quad (t \neq \vartheta,\ t \neq \vartheta + h). \tag{17}$$

Abschätzung von I_1 und I_2.

Für I_1 ergibt sich aus (5) und (16b) zunächst

$$|I_1| \leqq \frac{3 C_2}{4\pi} \int_{\vartheta - 3|h|}^{\vartheta + 3|h|} |t - \vartheta - h|^{\lambda} \frac{dt}{\sin |\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)|}. \tag{18}$$

Da aus der für $|x| \leqq \frac{3}{4}\pi$ gültigen Beziehung

$$\frac{1}{4} < \frac{\sin x}{x} \leqq 1 \tag{19}$$

wegen

$$\left|\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)\right| \leqq 2|h| \leqq \frac{1}{2} h_0 < \frac{\pi}{2}$$

die Ungleichung

$$\sin |\tfrac{1}{2}(t - \vartheta - h)| > \tfrac{1}{8} |t - \vartheta - h|$$

hervorgeht, gewinnt man aus (18) für $1 \leqq r \leqq 2$ und $|h| \leqq \frac{1}{4} h_0$ die Abschätzung

$$(20) \quad |I_1| \leqq \frac{6 C_2}{\pi} \int_{\vartheta - 3|h|}^{\vartheta + 3|h|} |t - \vartheta - h|^{\lambda - 1} dt \leqq \frac{12 C_2}{\pi} \int_0^{4|h|} (t')^{\lambda - 1} dt' \leqq D_1 C_2 |h|^\lambda$$

und auf ganz analogem Wege

$$(21) \quad |I_2| \leqq D_2 C_2 |h|^\lambda.$$

Hierbei bedeuten D_1 und D_2 genau wie später $D_3, D_4, \ldots$ nur von λ und h_0 abhängige Konstanten.

Abschätzung von I_3 und I_4.

Für $\vartheta - \pi \leqq t \leqq \vartheta + \pi$ und $|h| \leqq \frac{1}{4} h_0$ folgen aus (19) die Ungleichungen

$$(22) \quad \begin{gathered} \sin |\tfrac{1}{2} h| \leqq \tfrac{1}{2} |h|, \qquad \sin |\tfrac{1}{2} (t - \vartheta)| > \tfrac{1}{8} |t - \vartheta|, \\ \sin |\tfrac{1}{2} (t - \vartheta - h)| > \tfrac{1}{8} |t - \vartheta - h|. \end{gathered}$$

Ferner gilt für $\vartheta - h_0 \leqq t \leqq \vartheta - 3|h|$

$$(23) \quad \left| 1 - \frac{h}{t - \vartheta} \right| \geqq 1 - \frac{|h|}{|t - \vartheta|} \geqq \frac{2}{3}$$

und wegen (5)

$$(24) \quad \begin{aligned} |g(t) - g(\vartheta + h)| &\leqq |g(t) - g(\vartheta)| + |g(\vartheta) - g(\vartheta + h)| \\ &\leqq C_2 |t - \vartheta|^\lambda + C_2 |h|^\lambda \leqq 2 C_2 |t - \vartheta|^\lambda. \end{aligned}$$

Für I_3 erhält man daher aus (17), (22), (23), (24) die Abschätzung

$$(25) \quad |I_3| \leqq \frac{6 C_2}{\pi} \sin \left| \frac{1}{2} h \right| \int_{\vartheta - h_0}^{\vartheta - 3|h|} \frac{|t - \vartheta|^2}{\sin |\frac{1}{2} (t - \vartheta)| \sin |\frac{1}{2} (t - \vartheta - h)|} dt$$

$$\leqq \frac{192 C_2}{\pi} |h| \int_{\vartheta - h_0}^{\vartheta - 3|h|} \frac{dt}{|t - \vartheta|^{2 - \lambda} \left| 1 - \frac{h}{t - \vartheta} \right|}$$

$$\leqq \frac{288 C_2}{\pi} |h| \int_{\vartheta - h_0}^{\vartheta - 3|h|} \frac{dt}{|t - \vartheta|^{2 - \lambda}} \leqq D_3 C_2 |h|^\lambda$$

und ganz analog

$$(26) \quad |I_4| \leqq D_4 C_2 |h|^\lambda.$$

Abschätzung von $I_5, I_6, \ldots, I_9$.

Für $\vartheta - \pi \leqq t \leqq \vartheta - h_0$, $\vartheta + h_0 \leqq t \leqq \vartheta + \pi$ und $|h| \leqq \frac{1}{4} h_0$ geht wegen

$$|t - \vartheta - h| = |t - \vartheta| \left| 1 - \frac{h}{t - \vartheta} \right| \geqq \frac{3}{4} |t - \vartheta|$$

aus (22) die Ungleichung

$$\sin|\tfrac{1}{2}(t-\vartheta-h)| > \tfrac{3}{12}|t-\vartheta| \tag{27}$$

hervor. Aus (17) folgt dann mit Benutzung von (22) und (27)

$$|\Delta K| \leqq \frac{128}{\pi}\frac{|h|}{|t-\vartheta|^2} \leqq \frac{128\,h_0^{1-\lambda}}{\pi}\frac{|h|^\lambda}{|t-\vartheta|^2}. \tag{28}$$

Mit Hilfe von (4) und (28) gewinnt man für die Integrale I_5, I_6, I_7, I_8 mühelos die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |I_5| &\leqq D_5 C_1 |h|^\lambda, \quad |I_6| \leqq D_6 C_1 |h|^\lambda, \\ |I_7| &\leqq D_7 |h|^\lambda, \quad\quad |I_8| \leqq D_8 |h|^\lambda. \end{aligned} \tag{29}$$

Ferner gilt wegen $K(r, \vartheta; t) \geqq 0$ bei Beachtung von (11)

$$|I_9| < 1. \tag{30}$$

Abschätzung von $u(r, \vartheta + h) - u(r, \vartheta)$.

Aus (14) ergibt sich mit Benutzung von (5), (14), (20), (21), (25), (26), (29) und (30) für $1 \leqq r \leqq 2$ und $|h| \leqq \frac{1}{4} h_0$ die Ungleichung

$$|u(r, \vartheta + h) - u(r, \vartheta)| \leqq \{D_9 C_1 + D_{10} C_2 + D_{11}|g(\vartheta + h)|\}|h|^\lambda. \tag{31}$$

Nunmehr schreiben wir noch $g(\vartheta + h)$ in der Form

$$g(\vartheta + h) = g(\vartheta + h) - g(\vartheta) - \frac{4}{h_0}\int_{\vartheta}^{\vartheta + \frac{1}{4}h_0} \{g(t) - g(\vartheta)\}\,dt + \frac{4}{h_0}\int_{\vartheta}^{\vartheta + \frac{1}{4}h_0} g(t)\,dt$$

und erhalten hieraus durch Anwendung von (4) und (5) die Abschätzung

$$|g(\vartheta + h)| \leqq 2 C_2 h_0^\lambda + \frac{4}{h_0} C_1 = D_{12} C_1 + D_{13} C_2. \tag{32}$$

Aus (31) und (32) folgt dann unmittelbar die behauptete L-Bedingung (6a).

Beweis der Ungleichung (6b).

Der Beweis der Ungleichung (6b) läßt sich in ganz analoger Weise wie bei der Ungleichung (6a) führen. Man setzt zur Abkürzung

$$H(r, \vartheta; t) = \frac{1}{\pi}\frac{r \sin(t - \vartheta)}{1 + r^2 - 2r\cos(t - \vartheta)}$$

und

$$\Delta H = H(r, \vartheta + h; t) - H(r, \vartheta; t),$$

so daß die Potentialfunktion (2b) in

$$v(r, \vartheta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, H(r, \vartheta; t)\, dt$$

übergeht. Die Differenz $v(r, \vartheta + h) - v(r, \vartheta)$ läßt sich dann unter Beachtung von

$$\int_{\vartheta - t_0}^{\vartheta + t_0} H(r, \vartheta; t)\, dt = 0$$

in der zu (14) analogen Form

$$v(r, \vartheta + h) - v(r, \vartheta) = J_1 - J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 - g(\vartheta + h)\{J_7 + J_8\}$$

darstellen, wobei mit $J_1, J_2, \ldots, J_8$ die Integrale

$$J_1 = \int_{\vartheta - 3|h|}^{\vartheta + 3|h|} \{g(t) - g(\vartheta + h)\} H(r, \vartheta + h; t)\, dt,$$

$$J_2 = \int_{\vartheta - 3|h|}^{\vartheta + 3|h|} \{g(t) - g(\vartheta)\} H(r, \vartheta; t)\, dt,$$

$$J_3 = \int_{\vartheta - h_0}^{\vartheta - 3|h|} \{g(t) - g(\vartheta + h)\} \Delta H\, dt,$$

$$J_4 = \int_{\vartheta + 3|h|}^{\vartheta + h_0} \{g(t) - g(\vartheta + h)\} \Delta H\, dt,$$

$$J_5 = \int_{\vartheta - \pi}^{\vartheta - h_0} g(t) \Delta H\, dt, \quad J_6 = \int_{\vartheta + h_0}^{\vartheta + \pi} g(t) \Delta H\, dt,$$

$$J_7 = \int_{\vartheta - \pi}^{\vartheta - h_0} \Delta H\, dt, \quad J_8 = \int_{\vartheta + h_0}^{\vartheta + \pi} \Delta H\, dt$$

bezeichnet werden. Für diese Integrale erhält man völlig gleichartige Abschätzungen wie für die entsprechenden Integrale (13a), (13b), (13c), (13d), da im Kreisringbereich $1 \leqq r \leqq 2$ gleichmäßig für alle Werte von ϑ und t die zu (16a), (16b) und (17) analogen Ungleichheiten

$$|H(r, \vartheta; t)| \leqq \frac{1}{\pi \sin|\frac{1}{2}(t - \vartheta)|} \qquad (t \neq \vartheta),$$

$$|H(r, \vartheta + h; t)| \leqq \frac{1}{\pi \sin|\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)|} \qquad (t \neq \vartheta + h),$$

$$|\Delta H| \leqq \frac{5}{\pi} \frac{\sin|\frac{1}{2}h|}{\sin|\frac{1}{2}(t - \vartheta)| \sin|\frac{1}{2}(t - \vartheta - h)|} \qquad (t \neq \vartheta,\ t \neq \vartheta + h)$$

gelten. Dabei ergibt sich die Abschätzung für ΔH aus der Beziehung

$$\Delta H = \frac{r}{\pi} \left| \frac{(d - d_h)\sin(t - \vartheta - h)}{d\, d_h^3} + \frac{\sin(t - \vartheta - h) - \sin(t - \vartheta)}{d\, d_h} + \frac{(d - d_h)\sin(t - \vartheta)}{d^3 d_h} \right|.$$

(Eingegangen am 28. Mai 1940.)

Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie.

Von

Johannes Weissinger,

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof.

Übersicht. Ihrer physikalischen Bedeutung entsprechend sind die beiden Hauptgleichungen der Tragflügeltheorie

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{f(\xi)}{x-\xi} \cdot d\xi \quad \text{(Theorie der dünnen Profile)}$$

und

$$G(y) = H(y) \cdot \left\{ \alpha_g(y) - \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{G'(\eta)}{y-\eta} d\eta \right\} \quad \text{(Theorie der tragenden Linie)}$$

bisher gewöhnlich nur für stetige bzw. stückweise stetige Funktionen $g(x)$ und $\alpha_g(y)$ untersucht worden; lediglich in [7] und [10]*) wurde die Betrachtung allgemeiner durchgeführt, und zwar im wesentlichen unter der Voraussetzung quadratischer Integrierbarkeit. Veranlaßt durch praktische Fragestellungen wird in der vorliegenden Arbeit an Hand eines allgemein formulierten Satzes über Fourierreihen bewiesen, daß die beiden Gleichungen auch unter noch allgemeineren Voraussetzungen lösbar sind und daß die Auflösung nach einem der üblichen Verfahren erfolgen darf.

Gliederung:

Einleitung.

I. Ein Satz über Fourierreihen.

II. Die Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi$.

III. Die Gleichung $G(y) = H(y) \left\{ \alpha_g(y) - \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{G'(\eta)}{y-\eta} d\eta \right\}$.

Schrifttum.

---

*) Die Angaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende der Arbeit.

Einleitung.

Der Satz I der vorliegenden Arbeit bringt in seinem ersten Teil eine Verallgemeinerung eines Satzes von Priwaloff [5], der besagt, daß mit einer Fourierreihe auch die konjugierte Reihe überall gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung („L-Bedingung") genügt, während wir beweisen, daß beim Vorhandensein endlich vieler absolut integrierbarer Unstetigkeitsstellen die „abteilungsweise" Gültigkeit einer L-Bedingung auf die konjugierte Funktion übertragen werden darf. Im zweiten und dritten Teil werden dann noch gewisse Integrierbarkeitsaussagen und eine Abschätzung der Fourierkoeffizienten gegeben[1]).

Den Anlaß der vorliegenden Untersuchung bildete die Aufgabe, für die beiden wichtigsten Integralgleichungen der Tragflügeltheorie (64) und (73) die Legalität der üblichen Rechenverfahren (Vergleich der Fourierkoeffizienten) auch für den Fall nachzuweisen, daß im Verlauf der vorgegebenen Normalkomponente längs des Profils, bzw. des Anstellwinkels längs der Spannweite absolut integrierbare Unstetigkeitsstellen der durch (2) beschriebenen Art auftreten, während die bisherigen Untersuchungen im allgemeinsten Falle quadratische Integrierbarkeit verlangen mußten ([7] und [10]). Im Falle der Prandtlschen Integro-Differentialgleichung (73) ergibt sich der Beweis für die Legalität des Lotzschen Verfahrens [3] zunächst für den elliptischen Tragflügel und kann damit unmittelbar auf den von Maruhn [4] behandelten Fall eines stetigen Anstellwinkelverlaufs zurückgeführt werden.

Um die Beweise möglichst elementar zu halten, wird im folgenden stets der Riemannsche Integralbegriff zugrunde gelegt, zumal die in den Anwendungen auftretenden Funktionen für gewöhnlich höchstens endlich viele Singularitäten aufweisen und im übrigen alle notwendigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsforderungen erfüllen.

I. Ein Satz über Fourierreihen.

Voraussetzungen:

1. $\alpha(\vartheta)$ sei eine absolut integrierbare Funktion der Periode 2π und genüge, von endlich vielen Ausnahmestellen ϑ_j $(j = 1, \ldots, m)$ abgesehen, gleichmäßig einer L-Bedingung, d. h. zu jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Ausnahmestellen ϑ_j enthält („L-Intervall"), gebe es nur vom Intervall ab-

[1]) Der erste Teil des Satzes I, der hier mit Hilfe der Theorie der Fourierreihen bewiesen wird, deckt sich mit einem von Schubert [9] auf potentialtheoretischem Wege hergeleiteten Resultat. Beide Ergebnisse sind als Hilfssätze zur Lösung ganz verschiedener Aufgaben unabhängig voneinander gefunden worden.

hängige Konstanten $\delta > 0$, $C > 0$ und $\lambda > 0$, so daß für jedes ϑ des Intervalls gilt:

$$(1) \qquad |\alpha(\vartheta + h) - \alpha(\vartheta)| < C\,|h|^{\lambda}, \qquad |h| < \delta.$$

2. Zu jeder Ausnahmestelle ϑ_j gebe es Konstanten $\delta_j > 0$, $C_j > 0$, $0 \geqq \lambda_j > -1$ mit

$$(2) \qquad |\alpha(\vartheta_j + h)| < C_j |h|^{\lambda_j}, \qquad 0 < |h| < \delta_j.$$

3. In der Umgebung der Ausnahmestellen ϑ_j sei $\alpha(\vartheta)$ differenzierbar und es gelte

$$(3) \qquad |\alpha'(\vartheta_j + h)| < C_j |h|^{\lambda_j - 1}, \qquad |h| < \delta_j.$$

Behauptung:

1. Unter der Voraussetzung 1 genügt die zur Fourierreihe von $\alpha(\vartheta)$ konjugierte Reihe $\bar{\alpha}(\vartheta)$ in jedem L-Intervall J ebenfalls gleichmäßig einer L-Bedingung:

$$(4) \qquad |\bar{\alpha}(\vartheta + h) - \bar{\alpha}(\vartheta)| < \bar{C}\,|h|^{\bar{\lambda}}, \qquad |h| < \bar{\delta}.$$

Bezeichnet λ den Exponenten von $\alpha(\vartheta)$ in einem J umfassenden L-Intervall, dessen Randpunkte eine beliebig kleine, aber endliche Entfernung von den Randpunkten des Intervalls J haben (ein solches existiert offenbar), so kann λ im Fall $\lambda < 1$ gleich λ, im Fall $\lambda = 1$ beliebig nahe unterhalb 1 gewählt werden[2]).

2. Unter den Voraussetzungen 1 und 2 ist $\bar{\alpha}(\vartheta)$ für alle ϑ integrierbar. Für $\vartheta \neq \vartheta_j$, 0, π existiert der Cauchysche Hauptwert

$$(5) \qquad \oint_0^{\pi} \frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi = \lim_{\varepsilon = 0} \left\{ \int_0^{\vartheta - \varepsilon} + \int_{\vartheta + \varepsilon}^{\pi} \frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi \right\}$$

und kann durch gliedweise Integration berechnet werden.

3. Unter den Voraussetzungen 1, 2 und 3 (wobei übrigens 2 aus 3 folgt) ist $\bar{\alpha}(\vartheta)$ absolut integrierbar und es gilt mit beliebigem $\varepsilon > 0$:

$$(6) \qquad |\bar{\alpha}(\vartheta_j + h)| < \bar{C}_j\,|h|^{\bar{\lambda}_j}, \qquad |h| < \bar{\delta}_j, \quad \bar{\lambda}_j = \lambda_j - \varepsilon.$$

---

[2]) Im Fall $\lambda > 1$ reduziert sich $\alpha(\vartheta)$ auf eine Konstante.

Ferner besteht für die Fourierkoeffizienten a_n und b_n von $\alpha(\vartheta)$ eine Abschätzung

$$(7) \qquad \begin{matrix} |a_n| \\ |b_n| \end{matrix} < \frac{C}{n^{\lambda_0}}, \qquad \begin{matrix} 0 < \lambda_0 \leqq 1 \\ n = 1, 2, \ldots, \end{matrix}$$ [3])

wobei λ_0 das Minimum der Zahlen $\lambda_j + 1$ und der Exponenten λ der L-Intervalle bezeichnet.

Beweis:

1. Wegen (1) konvergiert die zu $\alpha(\vartheta)$ gehörige Fourierreihe in jedem L-Intervall gleichmäßig und stellt dort $\alpha(\vartheta)$ dar (vgl. [6], S. 59):

$$(8) \qquad \alpha(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta\},$$

$$(9) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta.$$

Ferner folgt aus (1) die absolute Integrierbarkeit von $\frac{\alpha(\vartheta + t) - \alpha(\vartheta - t)}{t}$ in bezug auf t, so daß also die zu $\alpha(\vartheta)$ konjugierte Reihe

$$(10) \qquad \bar{\alpha}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta\}$$

nach dem Pringsheimschen Kriterium ([6], S. 68) für $\vartheta \neq \vartheta_j$ zum Werte

$$(11) \qquad \bar{\alpha}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{\alpha(\vartheta + t) - \alpha(\vartheta - t)\} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\alpha(t) - \alpha(\vartheta)\} \operatorname{ctg} \frac{t - \vartheta}{2} \, dt$$

konvergiert. Diese Konvergenz ist wegen (1) in jedem L-Intervall gleichmäßig, wie man leicht durch einen analogen Gedankengang wie im Beweis des Zusatzes zu Satz XVIa in [6] erkennt.

Ist nun ein L-Intervall vorgegeben, so bestimmen wir ein $\delta_0 > 0$ so klein, daß auch das nach beiden Seiten um δ_0 verlängerte Intervall keine Ausnahme-

[3]) Die Konstante C ist nicht die gleiche wie in (1). Da wir keinen Wert auf optimale Abschätzungen legen, verwenden wir den Buchstaben C, C usw. im folgenden stets zur Bezeichnung irgendwelcher von h und ϑ unabhängiger Konstanten, deren Größe jeweils genügend hoch zu wählen ist, also im gleichen Sinn wie das anderwärts häufig benutzte Zeichen O.

stelle enthält. Sind C, δ, λ die Lipschitzkonstanten dieses Intervalls, wobei $\delta < \delta_0$ gewählt sei, so betrachten wir zunächst das Integral

$$(12)\quad \int_0^{\delta} \{\alpha(\vartheta+h+t) - \alpha(\vartheta+h-t) - \alpha(\vartheta+t) + \alpha(\vartheta-t)\} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, dt$$

$$= \int_{\vartheta+h-\delta}^{\vartheta+h+\delta} \{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)\} \operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta-h}{2}\, dt - \int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta+\delta} \{\alpha(t) - \alpha(\vartheta)\} \operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta}{2}\, dt$$

$$= \int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta+\delta} \left\{\frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta-h}{2}} - \frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta}{2}}\right\} dt +$$

$$+ \int_{\vartheta+h-\delta}^{\vartheta-\delta} \{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)\} \operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta-h}{2}\, dt +$$

$$+ \int_{\vartheta+\delta}^{\vartheta+h+\delta} \{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)\} \operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta-h}{2}\, dt.$$

Fordert man nun

$$(13)\qquad |h| < \frac{\delta}{2},$$

so sind die Integranden der beiden letzten Integrale beschränkt, so daß diese durch $C|h|$ abgeschätzt werden können. Bezeichnet M das Maximum von $\left|t \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|$, so gilt wegen (1)

$$(14)\quad \left| \int_{\vartheta-|2h|}^{\vartheta+|2h|} \left\{\frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta-h}{2}} - \frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta}{2}}\right\} dt \right|$$

$$\leqq MC \int_{\vartheta-|2h|}^{\vartheta+|2h|} \{|t-\vartheta-h|^{\lambda-1} + |t-\vartheta|^{\lambda-1}\}\, dt$$

$$\leqq C^* \cdot |h|^{\lambda}.$$

Für die Intervalle $\vartheta - \delta \leqq t \leqq \vartheta - |2h|$ und $\vartheta + |2h| \leqq t \leqq \vartheta + \delta$ erhält man aus der Identität (vgl. [5])

$$(15)\quad \frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta-h}{2}} - \frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta}{2}}$$

$$= -\frac{\alpha(t) - \alpha(\vartheta+h)}{\sin\frac{t-\vartheta}{2} \sin\frac{t-\vartheta-h}{2}} \sin\frac{h}{2} + \frac{\alpha(\vartheta) - \alpha(\vartheta+h)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta}{2}}$$

unter Beachtung von

$$\int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta-|2h|} \operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta}{2}\,dt + \int_{\vartheta+|2h|}^{\vartheta+\delta} \operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta}{2}\,dt = 0 \tag{16}$$

und wegen

$$\left|\frac{\alpha(t)-\alpha(\vartheta+h)}{\sin\frac{t-\vartheta}{2}\sin\frac{t-\vartheta-h}{2}}\sin\frac{h}{2}\right| < C\frac{|t-\vartheta-h|^{\lambda}|h|}{|t-\vartheta|\,|t-\vartheta-h|} \tag{17}$$

$$= C\frac{|h|}{|t-\vartheta|^{2-\lambda}\left|1-\frac{h}{t-\vartheta}\right|^{1-\lambda}} < C\frac{|h|}{|t-\vartheta|^{2-\lambda}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}}$$

die Ungleichung

$$\left|\int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta-|2h|} + \int_{\vartheta+|2h|}^{\vartheta+\delta}\left\{\frac{\alpha(t)-\alpha(\vartheta+h)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta-h}{2}} - \frac{\alpha(t)-\alpha(\vartheta)}{\operatorname{tg}\frac{t-\vartheta}{2}}\right\}dt\right| < \tag{18}$$

$$< C|h|\int_{\vartheta+|2h|}^{\vartheta+\delta}\frac{dt}{|t-\vartheta|^{2-\lambda}} < \begin{cases} C^*|h|^{\lambda} & \text{, wenn } \lambda < 1, \\ C^*|h|^{\lambda}|\ln|h||\text{, wenn } \lambda = 1. \end{cases}$$

Weiterhin betrachten wir

$$\int_{\delta}^{\pi}\{\alpha(\vartheta+h+t)-\alpha(\vartheta+t)\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt \tag{19}$$

$$= \int_{\delta}^{\pi}\alpha(\vartheta+t)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t-h}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right\}dt +$$

$$+\int_{\pi}^{\pi+h}\alpha(\vartheta+t)\operatorname{ctg}\frac{t-h}{2}\,dt - \int_{\delta}^{\delta+h}\alpha(\vartheta+t)\operatorname{ctg}\frac{t-h}{2}\,dt$$

$$= J_1 + J_2 - J_3$$

Wegen $|h| < \frac{\delta}{2}$ liegt das Argument des ctg in den drei Integralen sicher im Intervall $\left\langle\frac{\delta}{4}, \frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{4}\right\rangle$. Bezeichnet also M_1 eine obere Schranke für den Betrag des ctg und seiner Ableitung in diesem Intervall, so ergibt sich

$$|J_1| \leqq |h|M_1\int_{\delta}^{\pi}|\alpha(\vartheta+t)|\,dt \leqq C|h|, \tag{20}$$

da das Integral $\int_{\delta}^{\pi}$ wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\alpha(\vartheta)$ durch eine von h und ϑ unabhängige Konstante abgeschätzt werden kann. Im zweiten Integral gilt mit $t = \pi + \tau$, also $|\tau| \leqq |h|$ eine Ungleichung

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{t-h}{2}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\tau-h}{2}}{\cos\frac{\tau-h}{2}}\right| \leqq C|h|, \tag{21}$$

also

$$|J_2| \leqq C|h| \int_{\pi}^{\pi+h} |\alpha(\vartheta+t)|\,dt \leqq C^*|h|, \tag{22}$$

und im dritten Integral ist $|x(\vartheta+t)|$ beschränkt, also

$$|J_3| \leqq M_1 \int_{\vartheta}^{\vartheta+h} |\alpha(\vartheta+t)|\,dt \leqq C|h|. \tag{23}$$

Danach ist insgesamt

$$\left| \int_{\vartheta}^{\pi} \{\sigma(\vartheta+h+t) - \alpha(\vartheta+t)\} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\,dt \right| \leqq C|h|, \tag{24}$$

und da eine entsprechende Abschätzung auch für das Integral

$$\left| \int_{\vartheta}^{\pi} \{\alpha(\vartheta+h-t) - \alpha(\vartheta-t)\} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\,dt \right| \leqq C|h| \tag{25}$$

gültig ist, so ergibt sich aus (12), (14), (18), (24) und (25)

$$\begin{aligned} &|\bar{\alpha}(\vartheta+h) - \bar{\alpha}(\vartheta)| \qquad (26)\\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \{\alpha(\vartheta+h+t) - \alpha(\vartheta+h-t) - \alpha(\vartheta+t) + \alpha(\vartheta-t)\} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\,dt \right| \\ &\leqq \begin{cases} \overline{C}|h|^{\lambda}, & \text{wenn } \lambda < 1, \\ \overline{C}|h|^{\lambda}\,|\ln|h||, & \text{wenn } \lambda = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

N. B. Bereits Priwaloff [5] gibt ein Beispiel dafür, daß die Abschätzung (26) im Fall $\lambda = 1$ nicht verbessert werden kann. Ein weiteres einfaches Beispiel ist durch die Funktion $\alpha(\vartheta) = |\vartheta|$ gegeben.

2. Nach [6] Satz VIII konvergiert die durch gliedweise Integration von $\alpha(\vartheta)$ gebildete Reihe $A(\vartheta)$ gleichmäßig und es gilt

$$A(\vartheta) = \int_{0}^{\vartheta} \alpha(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin n\vartheta + b_n(1-\cos n\vartheta)}{n}, \tag{27}$$

und da nach Satz VII auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ konvergiert, so ist die Reihe

$$A_1(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta}{n} = A(\vartheta) - \frac{a_0}{2}\vartheta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \tag{28}$$

gleichmäßig konvergent. Wir behaupten überdies, daß $A_1(\vartheta)$ bzw. was offenbar gleichbedeutend ist, $A(\vartheta)$ für alle ϑ gleichmäßig einer L-Bedingung genügt.

Zum Beweise betrachten wir zunächst eine Ausnahmestelle ϑ_j. Für die ϑ des Intervalls $\vartheta_j - \frac{\delta_j}{2} \leqq \vartheta \leqq \vartheta_j + \frac{\delta_j}{2}$ wird dann mit $t = \vartheta - \vartheta_j$ und $|h| < \frac{\delta_j}{2}$ wegen (2)

$$(29)\quad |A(\vartheta + h) - A(\vartheta)| = |A(\vartheta_j + t + h) - A(\vartheta_j + t)| = \Big|\int_t^{t+h} \alpha(\vartheta_j + \tau)\, d\tau\Big| \leqq C_j \int_t^{t+h} |\tau^{\lambda_j}|\,|d\tau|$$

mit $\lambda_j > -1$. Ist nun $|h| \geqq \frac{|t|}{2}$, so erhält man weiter

$$(30)\quad |A(\vartheta + h) - A(\vartheta)| \leqq C_j \Big\{\int_0^t + \int_0^{t+h} |\tau^{\lambda_j}|\,|d\tau|\Big\} = \frac{C_j}{1+\lambda_j}\left\{|t|^{\lambda_j+1} + |t+h|^{\lambda_j+1}\right\} < C_j^*\,|h|^{\lambda_j+1}.$$

Ist umgekehrt $|h| \leqq \frac{|t|}{2}$, so wird

$$(31)\quad |A(\vartheta + h) - A(\vartheta)| \leqq \frac{C_j}{1+\lambda_j}\,\big||t+h|^{1+\lambda_j} - |t|^{1+\lambda_j}\big| = \frac{C_j}{1+\lambda_j}\,|h|\,|t|^{\lambda_j}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1+\lambda_j}{n}\left(\frac{h}{t}\right)^{n-1}\right| < C_j^*\,|h|^{1+\lambda_j},$$

d. h. $A(\vartheta)$ genügt in den Intervallen $\vartheta_j - \frac{\delta_j}{2} \leqq \vartheta \leqq \vartheta_j + \frac{\delta_j}{2}$ gleichmäßig einer L-Bedingung. In den übrigbleibenden Intervallen ist $\alpha(\vartheta)$ beschränkt, so daß $A(\vartheta)$ hier offensichtlich gleichmäßig eine L-Bedingung erfüllt. Wählt man unter den so erhaltenen endlich vielen Lipschitz-Konstanten die ungünstigsten, so erhält man eine L-Bedingung, der $A(\vartheta)$ und damit auch $A_1(\vartheta)$ gleichmäßig für alle ϑ genügt.

Aus dieser Tatsache folgt nunmehr wie oben, daß die zu $A_1(\vartheta)$ konjugierte Reihe

$$(32)\qquad \bar{A}_1(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta}{n}$$

überall gleichmäßig konvergiert, also eine überall stetige Funktion darstellt. Zufolge der gleichmäßigen Konvergenz von

$$(33)\qquad \bar{\alpha}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\vartheta}\,\frac{a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta}{n}$$

in jedem L-Intervall darf $\bar{A}_1(\vartheta)$ hier gliedweise differenziert werden, und es gilt

$$(34)\qquad \bar{A}_1'(\vartheta) = \bar{\alpha}(\vartheta).$$

Wegen der Stetigkeit von $\bar{A}_1(\vartheta)$ ergibt sich daraus sofort die Integrierbarkeit von $\bar{\alpha}(\vartheta)$ in jedem Intervall.

Um die Existenz und die gliedweise Berechenbarkeit des Cauchyschen Hauptwertes (5) nachzuweisen, setzen wir zur Abkürzung:

$$J(\varepsilon,\vartheta) = \int_0^{\vartheta-\varepsilon} + \int_{\vartheta+\varepsilon}^{\pi} \frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi, \tag{35}$$

$$J_n(\varepsilon,\vartheta) = \int_0^{\vartheta-\varepsilon} + \int_{\vartheta+\varepsilon}^{\pi} \frac{b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi, \tag{36}$$

$$J(\vartheta) = \lim_{\varepsilon=0} J(\varepsilon,\vartheta) = \oint_0^{\pi} \frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi, \tag{37}$$

$$J_n(\vartheta) = \lim_{\varepsilon=0} J_n(\varepsilon,\vartheta) = \oint_0^{\pi} \frac{b_n \cos n\vartheta - a_n \sin n\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi. \tag{38}$$

Für $\vartheta \neq \vartheta_j$ ist $\frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}$ in jedem L-Intervall eigentlich integrierbar, abgesehen von der Umgebung des Punktes ϑ. In der Umgebung der Ausnahmestellen ϑ_j ist die Funktion uneigentlich integrierbar, d. h. allein durch Wahl von δ läßt sich das Integral

$$\left| \int_{\vartheta_j \pm \delta^*}^{\vartheta_j \pm \delta} \frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi \right|$$

für jedes δ^* mit $0 < \delta^* < \delta$ unter jede beliebige Schranke drücken. Denn da $\frac{1}{\cos\vartheta - \cos\psi}$ bei genügender Kleinheit von δ im Intervall $\langle \vartheta_j \pm \delta^*, \vartheta_j \pm \delta \rangle$ als monoton angenommen werden darf, und da $\bar{\alpha}(\psi)$ in diesem Intervall stetig ist, so ist nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $\vartheta_j \pm \delta^* \leqq \varphi \leqq \vartheta_j \pm \delta$

$$\int_{\vartheta_j \pm \delta^*}^{\vartheta_j \pm \delta} \frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi = \frac{1}{\cos\vartheta - \cos(\vartheta_j \pm \delta^*)} \int_{\vartheta_j \pm \delta^*}^{\varphi} \bar{\alpha}(\psi)\, d\psi + \tag{39}$$

$$+ \frac{1}{\cos\vartheta - \cos(\vartheta_j \pm \delta)} \int_{\varphi}^{\vartheta_j \pm \delta} \bar{\alpha}(\psi)\, d\psi$$

und wegen der Integrierbarkeit von $\bar{\alpha}(\psi)$ können die beiden rechtsstehenden Integrale allein durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden. Schließlich

ist wegen (4) die Funktion $\frac{\bar{\alpha}(\psi) - \bar{\alpha}(\vartheta)}{\cos\vartheta - \cos\psi}$ in der Umgebung von ϑ $(\neq 0, \pi)$ absolut integrierbar, so daß also insgesamt das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\bar{\alpha}(\psi) - \bar{\alpha}(\vartheta)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi$$

im uneigentlichen Sinne existiert. Dieses Integral ist aber gleich $J(\vartheta)$, da bekanntlich (vgl. [2] S. 145 oder [1] S. 82)

$$\text{(40)} \qquad \oint_0^\pi \frac{d\psi}{\cos\vartheta - \cos\psi} = 0$$

ist.

Bezeichnen wir mit $J^*(\varepsilon, \vartheta)$ bzw. $J_n^*(\varepsilon, \vartheta)$ ähnlich wie in (35) und (36) diejenigen Integrale, in denen bei der Integration auch noch die ε-Umgebungen der Punkte ϑ_j weggelassen sind, so gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\bar{\alpha}(\vartheta)$ in den übrigen Intervallen sicher

$$\text{(41)} \qquad J^*(\varepsilon, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n^*(\varepsilon, \vartheta),$$

mithin wegen der Existenz von $\lim_{\varepsilon=0} J^*(\varepsilon, \vartheta) = J(\vartheta)$ und $\lim_{\varepsilon=0} J_n^*(\varepsilon, \vartheta) = J_n(\vartheta)$:

$$\text{(42)} \qquad J(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\vartheta),$$

was zu beweisen war.

Bemerkung:

Ist $h(\vartheta)$ eine gerade Funktion, die die Voraussetzung 1 erfüllt, so gilt in jedem L-Intervall von $h(\vartheta)$

$$\text{(43)} \qquad \oint_0^\pi \frac{h(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi = \pi \frac{\bar{h}(\vartheta)}{\sin\vartheta}.$$

Beweis. Die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes und die Konvergenz der konjugierten Reihe ist nach den obenstehenden Beweisen sichergestellt. Aus der Geradheit des Integranden und der Ungeradheit der Funktion $\frac{h(\psi)\sin\psi}{\cos\vartheta - \cos\psi}$ ergeben sich unter Beachtung der Relationen

$$\text{(44)} \qquad \frac{\sin\vartheta - \sin\psi}{\cos\vartheta - \cos\psi} = \operatorname{ctg}\frac{\psi - \vartheta}{2}$$

und

$$\text{(45)} \qquad \oint_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\psi - \vartheta}{2}\, d\psi = 0$$

nunmehr folgende Gleichungen:

$$(46)\qquad \frac{\sin\vartheta}{\pi}\oint_0^{\pi}\frac{h(\psi)}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi=\frac{\sin\vartheta}{2\pi}\oint_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\psi)}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_{-\pi}^{\pi}h(\psi)\,\frac{\sin\vartheta-\sin\psi}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi=\frac{1}{2\pi}\oint_{-\pi}^{\pi}h(\psi)\operatorname{ctg}\frac{\psi-\vartheta}{2}\,d\psi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{h(\psi)-h(\vartheta)\}\operatorname{ctg}\frac{\psi-\vartheta}{2}\,d\psi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{h(\vartheta+t)-h(\vartheta)\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{h(\vartheta+t)-h(\vartheta-t)\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\bar{h}(\vartheta),$$

was zu beweisen war.

Wendet man diese Bemerkung auf die Funktion $h(\vartheta)=\cos n\,\vartheta$ an, so erhält man einen neuen Beweis für die bekannten Formeln (vgl. [2] S. 145)

$$(47)\qquad \oint_0^{\pi}\frac{\cos n\,\psi}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi=-\pi\,\frac{\sin n\,\vartheta}{\sin\vartheta},\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Ist ferner $\alpha(\vartheta)$ eine ungerade Funktion [also $\bar{\alpha}(\vartheta)$ gerade], so ergibt sich

$$(48)\qquad \oint_0^{\pi}\frac{\bar{\alpha}(\psi)}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi=\pi\,\frac{\bar{\alpha}(\vartheta)}{\sin\vartheta}=-\pi\,\frac{\alpha(\vartheta)}{\sin\vartheta}.$$

3. Zum Beweise von Gleichung (6) betrachten wir mit festem, genügend klein gewähltem $\delta>0$

$$(49)\qquad \bar{\alpha}(\vartheta_j+h)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\alpha(\vartheta_j+h+t)-\alpha(\vartheta_j+h-t)\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}.$$

Das zweite Integral stellt eine beschränkte Funktion von h dar, da $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ im Integrationsintervall stetig und $\alpha(\vartheta)$ absolut integrierbar ist. Indem wir $|h| < \frac{\delta}{2}$ fordern, spalten wir das erste Integral auf:

$$(50)\qquad \int_0^{\delta} \{\alpha(\vartheta_j + h + t) - \alpha(\vartheta_j + h - t)\} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, dt = \int_0^{\left|\frac{h}{2}\right|} + \int_{\left|\frac{h}{2}\right|}^{|2h|} + \int_{|2h|}^{\delta}$$

und erhalten nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung und nach (3) mit $|\varkappa| < 1$ für $0 \leqq t \leqq \left|\frac{h}{2}\right|$ die Beziehung

$$(51)\qquad \left|\frac{\alpha(\vartheta_j + h + t) - \alpha(\vartheta_j + h - t)}{t}\right|$$
$$= |2\alpha'(\vartheta_j + h + \varkappa t)| < 2C|h + \varkappa t|^{\lambda_j - 1} < 2C(|h| - |t|)^{\lambda_j - 1},$$

mithin, wenn wieder M das Maximum von $\left|t \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|$ bedeutet:

$$(52)\qquad \left|\int_0^{\left|\frac{h}{2}\right|}\right| \leqq 2CM \int_0^{\left|\frac{h}{2}\right|} (|h| - |t|)^{\lambda_j - 1}\, dt$$
$$\leqq \frac{2CM}{|\lambda_j|}\left\{|h|^{\lambda_j} + \left|\frac{h}{2}\right|^{\lambda_j}\right\} \leqq C^*|h|^{\lambda_j}.$$

Für das zweite Integral ergibt sich aus (2) die Abschätzung

$$(53)\qquad \left|\int_{\left|\frac{h}{2}\right|}^{|2h|}\right| \leqq CM \int_{\left|\frac{h}{2}\right|}^{|2h|} |h + t|^{\lambda_j} \frac{dt}{t} + CM \int_{\left|\frac{h}{2}\right|}^{|2h|} |h - t|^{\lambda_j} \frac{dt}{t}$$
$$\leqq 2CM \int_{\left|\frac{h}{2}\right|}^{|2h|} \left||h| - |t|\right|^{\lambda_j} \frac{dt}{t} \leqq \frac{2CM}{\left|\frac{h}{2}\right|} \int_{\left|\frac{h}{2}\right|}^{|2h|} \left||h| - |t|\right|^{\lambda_j} dt$$
$$\leqq \frac{2CM}{\left|\frac{h}{2}\right|(\lambda_j + 1)}\left\{|h|^{\lambda_j + 1} + \left|\frac{h}{2}\right|^{\lambda_j + 1}\right\} \leqq C^*|h|^{\lambda_j}$$

und entsprechend für das dritte Integral:

$$(54)\qquad \left|\int_{|2h|}^{\delta}\right| \leqq 2CM \int_{|2h|}^{\delta} \left||t| - |h|\right|^{\lambda_j} \frac{dt}{t} \leqq 2CM|h|^{\lambda_j} \int_{|2h|}^{\delta} \frac{dt}{t}$$
$$\leqq C^*|h|^{\lambda_j} \left|\ln|h|\right|,$$

insgesamt also

$$\left|\int_0^{\delta}\right| \leqq C^*\left|h\right|^{\lambda_j}\left|\ln\left|h\right|\right|, \tag{55}$$

und damit auch

$$\left|\bar{\alpha}\left(\vartheta_j+h\right)\right| \leqq C_j^*\left|h\right|^{\lambda_j}\left|\ln\left|h\right|\right| \leqq \bar{C}_j\left|h\right|^{\bar{\lambda}_j}, \tag{56}$$

was zu beweisen war.

Um die Ungleichung (7) für den Koeffizienten b_n zu beweisen, denken wir uns das Intervall $\langle 0, 2\pi\rangle$ aufgeteilt in L-Intervalle und in Umgebungen der Ausnahmestellen ϑ_j in denen (3) erfüllt ist. Wir betrachten zunächst ein L-Intervall $\langle a, b\rangle$ und setzen

$$\vartheta_k = a + k\cdot\frac{2\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{57}$$

Dann ist offenbar für zwei Punkte ϑ_k, ϑ_{k+1}

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \sin n\vartheta\, d\vartheta = 0. \tag{58}$$

Bezeichnet nun A das Maximum von $\alpha(\vartheta)$ in $\langle a, \bar{b}\rangle$ und ϑ_K den letzten in $\langle a, b\rangle$ gelegenen Punkt der ϑ_k, so daß also $|K| \leqq \frac{n}{2\pi}(b-a)$ und $|b-\vartheta_K| < \frac{2\pi}{n}$ gilt, so ergibt sich unter Beachtung von (58) und (1) für genügend große n

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \alpha(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta\right| \qquad (59)\\
&= \left|\sum_{k=1}^{K}\int_{\vartheta_{k-1}}^{\vartheta_k}\{\alpha(\vartheta)-\alpha(\vartheta_k)\}\sin n\vartheta\, d\vartheta + \int_{\vartheta_K}^{b}\alpha(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta\right|\\
&\leqq \sum_{k=1}^{K} C\int_{\vartheta_{k-1}}^{\vartheta_k}|\vartheta-\vartheta_k|^{\lambda}\, d\vartheta + A\cdot\frac{2\pi}{n}\\
&\leqq \frac{n}{2\pi}(b-a)\frac{C}{\lambda+1}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\lambda+1} + A\cdot\frac{2\pi}{n} \leqq \frac{C^*}{n^{\lambda}}.
\end{aligned}$$

In der Umgebung der Ausnahmestellen spalten wir auf

$$\int_{\vartheta_j}^{\vartheta_j+\delta}\alpha(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta = \int_{\vartheta_j}^{\vartheta_j+\frac{1}{n}} + \int_{\vartheta_j+\frac{1}{n}}^{\vartheta_j+\delta} \tag{60}$$

und erhalten wegen (2)

$$(61)\qquad \left|\int_{\vartheta_j}^{\vartheta_j+\frac{1}{n}} \alpha(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta\right| \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} |\alpha(\vartheta_j+\tau)|\, d\tau \leqq C\int_0^{\frac{1}{n}} |\tau|^{\lambda_j} d\tau \leqq \frac{C^*}{n^{\lambda_j+1}},$$

und durch partielle Integration unter Beachtung von (2) und (3)

$$(62)\qquad \left|\int_{\vartheta_j+\frac{1}{n}}^{\vartheta_j+\delta} \alpha(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta\right|$$

$$= -\left.\frac{\alpha(\vartheta_j+\tau)\cos n(\vartheta_j+\tau)}{n}\right|_{\tau=\frac{1}{n}}^{\tau=\delta} + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \alpha'(\vartheta_j+\tau)\cos n(\vartheta_j+\tau)\, d\tau$$

$$\leqq \frac{1}{n}\left\{|\alpha(\vartheta_j+\delta)| + C_j\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda_j}\right\} + \frac{C_j}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \tau^{\lambda_j-1} d\tau \leqq \frac{C^*}{n^{\lambda_j+1}},$$

insgesamt also

$$(63)\qquad |b_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta\right| \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{C}{n^{\lambda}}, \frac{C_j}{n^{\lambda_j+1}}\right\} = \frac{C}{n^{\lambda_0}},$$

was zu beweisen war. Für a_n verläuft der Beweis ganz entsprechend.

II. Die Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{+1} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$.

Die in der Theorie der dünnen Profile auftretende Integralgleichung

$$(64)\qquad g(x) = \frac{1}{2\pi}\oint_{-1}^{+1} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$$

geht durch die Substitution

$$(65)\qquad x = \cos\vartheta, \quad \xi = \cos\psi$$

unter Anwendung der Schreibweise

$$(66)\qquad g(x) = g(\vartheta), \quad f(x) = f(\vartheta)$$

über in die Gleichung

$$(67)\qquad g(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{\pi} \frac{f(\psi)\sin\psi}{\cos\vartheta - \cos\psi}\, d\psi.$$

Denkt man sich die im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ gegebene Funktion $g(\vartheta)$ gerade und mit der Periode 2π fortgesetzt und nimmt man für die Funktion

$$\alpha(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot g(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\vartheta \tag{68}$$

die Voraussetzungen 1 und 2 des Satzes I als erfüllt an, so ist nach (48) die Gleichung (67) mit

$$f(\psi)\sin\psi = -2\bar{\alpha}(\psi) \tag{69}$$

befriedigt. Abgesehen von einer additiven Konstanten ist die Lösung offenbar eindeutig bestimmt, wenn man von ihr verlangt, daß sie sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln läßt und daß der Cauchysche Hauptwert dieser Reihe gliedweise gebildet werden darf. Die letzte Forderung ist z. B. sicher dann erfüllt, wenn die Reihe in jedem L-Intervall gleichmäßig konvergiert. Damit ist gezeigt:

Satz II. *Erfüllt die Funktion* $\alpha(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot g(\vartheta)$ *die Voraussetzungen* 1 *und* 2 *des Satzes* I, *so lautet die Lösung von* (67):

$$f(\vartheta) = \frac{f_0}{\sin\vartheta} - \frac{2\bar{\alpha}(\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{f_0}{\sin\vartheta} - \frac{2}{\sin\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\vartheta. \tag{70}$$

Durch die Vorgabe einer „Gesamtzirkulation" Γ:

$$\Gamma = \int_{-1}^{+1} f(\xi)\,d\xi = \int_0^{\pi} f(\psi)\sin\psi\,d\psi = f_0 \cdot \pi \tag{71}$$

ist $f(\vartheta)$ eindeutig bestimmt, falls nur solche Lösungen betrachtet werden, deren Produkt mit $\sin\vartheta$ *sich in eine in jedem* L-*Intervall gleichmäßig konvergierende trigonometrische Reihe entwickeln läßt. Die Funktion $f(\vartheta)\cdot\sin\vartheta$ besitzt die in Satz I von $\bar{\alpha}(\vartheta)$ ausgesagten Eigenschaften.*

III. Die Gleichung $G(y) = H(y)\left\{\alpha_0(y) - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{G'(\eta)}{y-\eta}\,d\eta\right\}$.

Durch die Substitution

$$y = \cos\vartheta, \quad \eta = \cos\psi \tag{72}$$

geht die Integro-Differentialgleichung der Prandtlschen Tragflügeltheorie

$$G(y) = H(y)\left\{\alpha_0(y) - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{G'(\eta)}{y-\eta}\,d\eta\right\} \tag{73}$$

über in die Gleichung

$$G(\vartheta) = H(\vartheta)\left\{\alpha_0(\vartheta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{G'(\psi)}{\cos\vartheta - \cos\psi}\,d\psi\right\}. \tag{74}$$

Setzt man die gesuchte Lösung als Fourierreihe an:

$$(75) \qquad G(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\,\psi, \qquad G'(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,g_n \cos n\,\psi,$$

so ergibt sich formal durch gliedweise Integration unter Beachtung von (47)

$$(76) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\,\vartheta = H(\vartheta)\left\{a_0(\vartheta) - \frac{1}{2\sin\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty} n\,g_n \sin n\,\vartheta\right\}.$$

Nimmt man nunmehr den Tragflügel als elliptisch an, so kann $H(\vartheta)$ in der Form

$$(77) \qquad H(\vartheta) = \frac{2}{H}\sin\vartheta$$

geschrieben werden, wo $H > 0$ eine gewisse Konstante bedeutet. Setzt man jetzt noch

$$(78) \qquad \alpha(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot a_0(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,\vartheta,$$

so erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$(79) \qquad g_n = \frac{2\,b_n}{n + H},$$

d. h. für elliptisches $H(\vartheta)$ ergibt sich die formale Lösung

$$(80) \qquad G(\vartheta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n + H} \sin n\,\vartheta.$$

Um die Legalität dieser formalen Rechnung unter den in Satz I ausgesprochenen Voraussetzungen 1 und 2 über $\alpha(\vartheta)$ nachzuweisen, setzen wir

$$(81) \qquad \frac{1}{2}\,g_n = b_n\left\{\frac{1}{n} + \frac{H}{n^2} + \frac{H^2}{n^3}\right\} + b_n^*,$$

wobei also mit geeignetem C

$$(82) \qquad b_n^* < \frac{C}{n^4}$$

gilt. Unter Benutzung der in I gebrauchten Bezeichnungen wird dann:

$$(83) \qquad \frac{1}{2}G'(\vartheta) = \alpha(\vartheta) - H\,A_1(\vartheta) + H^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\cos n\,\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} n\,b_n^* \cos n\,\vartheta.$$

Für $\alpha(\vartheta)$ ist die gliedweise Bildung des Cauchyschen Hauptwertes nach Satz I, 2 erlaubt, für die restlichen Funktionen sicher dann, wenn sie gleichmäßig für alle ϑ einer L-Bedingung genügen. Diese Eigenschaft ist für $A_1(\vartheta)$ im Beweise von I, 2 gezeigt, für $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\cos n\,\vartheta$ folgt sie aus der

in I, 2 bewiesenen Stetigkeit von $\frac{d}{d\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^3}\cos n\vartheta = \bar{A}_1(\vartheta)$, und für $\sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n^* \cos n\vartheta$ ergibt sie sich sofort aus der Abschätzung

$$|\cos n(\vartheta+h) - \cos n\vartheta| \leqq n|h| \tag{84}$$

und der aus (82) folgenden absoluten Konvergenz der Reihe. Damit ist bewiesen:

Satz IIIa. *Für elliptisches $H(\vartheta)$ ist die Lösung von* (74) *durch* (80) *gegeben, wenn die Funktion $\alpha(\vartheta) = \sin\vartheta\cdot\alpha_\varrho(\vartheta)$ die Voraussetzungen* I, 1 *und* 2 *erfüllt. Die Ableitung $G'(\vartheta)$ besitzt die in Satz* I *ausgesprochenen Eigenschaften von $\bar{\alpha}(\vartheta)$. Die Lösung ist eindeutig bestimmt, wenn sich ihre Ableitung nach ϑ in eine in jedem L-Intervall gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe entwickeln läßt.*

Das Lotzsche Verfahren beruht darauf, daß man $\sin\vartheta\cdot\alpha_\varrho(\vartheta)$ in eine Sinus-, $\frac{\sin\vartheta}{H(\vartheta)}$ in eine Cosinus-Reihe entwickelt und das so aus (74) und (75) gewonnene Gleichungssystem durch Iteration löst. Als Ausgangslösung wird die nur bei Berücksichtigung der Diagonalkoeffizienten entstehende Lösung benutzt. Diese Vorschrift ist gleichbedeutend damit, daß man von dem eigentlichen Gleichungssystem das Diagonalsystem, dessen Lösung trivial ist, abzieht und das so entstehende „Differenzsystem" nach dem bei Lotz geschilderten Näherungsverfahren auflöst. Wie man leicht nachprüft, ist die aus dem Diagonalsystem gewonnene Fourierreihe identisch mit der Lösung $G_e(\vartheta)$ der Gleichung (74), die man durch Einsetzen eines bestimmten elliptischen $H_e(\vartheta)$ [bei unverändertem $\alpha_\varrho(\vartheta)$] erhält:

$$G_e(\vartheta) = H_e(\vartheta)\left\{\alpha_\varrho(\vartheta) + \frac{1}{2\pi}\oint_0^{\pi}\frac{G_e'(\psi)}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi\right\}. \tag{85}$$

Infolgedessen ist die Lösung des „Differenzsystems" nach Lotz gleichbedeutend mit der Anwendung des Lotzschen Verfahrens auf die Differenz der beiden Gleichungen (74) und (85), deren Lösung $\Delta G(\vartheta)$ die Form

$$\Delta G(\vartheta) = G(\vartheta) - G_e(\vartheta) \tag{86}$$

hat und offenbar der Gleichung

$$\Delta G(\vartheta) = H(\vartheta)\left\{\left(\frac{G_e(\vartheta)}{H_e(\vartheta)} - \frac{G_e(\vartheta)}{H(\vartheta)}\right) + \frac{1}{2\pi}\oint_0^{\pi}\frac{\Delta G'(\psi)}{\cos\vartheta-\cos\psi}\,d\psi\right\} \tag{87}$$

genügt. Da die Funktion $\sin\vartheta\left(\frac{G_e(\vartheta)}{H_e(\vartheta)} - \frac{G_e(\vartheta)}{H(\vartheta)}\right)$ stetig und in eine Fourierreihe entwickelbar ist, also sicher den von Maruhn [4] bzw. Schubert [8] auf-

gestellten Bedingungen für $\alpha(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot \alpha_0(\vartheta)$ genügt, ist die Anwendung des Lotzschen Verfahrens auf diese Gleichung erlaubt. Damit ist gezeigt:

Satz IIIb. *Erfüllt die Funktion $H(\vartheta)$ die von Maruhn* [4] *bzw. Schubert* [8] *für die „Tiefenverteilung" formulierten Bedingungen, so ist die Anwendung des Lotzschen Verfahrens auf die Gleichung* (74) *auch dann erlaubt, wenn $\alpha(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot \alpha_0(\vartheta)$ den Voraussetzungen* I, 1 *und* 2 *genügt.*

N. B. Da die nach Lotz gewonnenen Reihen an den Unstetigkeitsstellen zu langsam konvergieren, wird man bei praktischen Rechnungen natürlich versuchen, diese Stellen durch Abspaltung direkt zu erfassen.

Schrifttum.

[1] H. Glauert, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Übersetzt von H. Holl. Berlin 1929.

[2] G. Hamel, Integralgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch. Berlin 1937.

[3] J. Lotz, Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. ZFM. **22** (1931), S. 189.

[4] K. Maruhn, Konvergenzuntersuchungen zur Theorie der Auftriebsverteilung vorgegebener Tragflügel. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 1939.

[5] M. J. Priwaloff, Sur les fonctions conjuguées. Bull. Soc. Math. France **44** (1916), S. 100.

[6] W. Rogosinski, Fouriersche Reihen. Berlin 1930.

[7] K. Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitzungsber. Pr. Akad. d. Wiss. XXX (1938); K. Schröder, Über die Prandtlsche Integro-Differentialgleichung der Tragflügeltheorie. Abh. Pr. Akad. d. Wiss. 1939, Math.-naturw. Kl., Nr. 16.

[8] H. Schubert, Über die unendlichen Gleichungssysteme der Prandtlschen Tragflügeltheorie. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 1939.

[9] H. Schubert, Ein potentialtheoretischer Hilfssatz. Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 8–15.

[10] H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 245.

(Eingegangen am 28. Mai 1940.)

Zur Theorie der Moduln algebraischer Funktionenkörper.

Von

Max Deuring in Jena.

Einleitung.

Die algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem gegebenen algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k lassen sich durch *Moduln* beschreiben. Die Körper K eines festen Geschlechtes g entsprechen umkehrbar eindeutig den Punkten einer irreduziblen algebraischen *Modulmannigfaltigkeit* M_g über k, die Punkte einer Teilmannigfaltigkeit niedrigerer Dimension ausgenommen[1]). Die Dimension d von M_g ist 0 für $g = 0$, 1 für $g = 1$ und $3g - 3$ für $g > 1$ (also stets $3g - 3 + \varrho$, wo ϱ die Parameterzahl der Automorphismengruppe von K/k bedeutet). Diese Zuordnung kann auf die folgende Weise hergestellt werden: Für hinreichend großes n gibt es zu jedem Körper K des Geschlechtes g eine ihn definierende Kurve n-ter Ordnung mit nur gewöhnlichen Knotenpunkten. Solche Kurven mögen *regulär*[1]) heißen. Die regulären Kurven n-ter Ordnung vom Geschlechte g gehören einer irreduziblen Mannigfaltigkeit $I_{n,g}$ der Dimension $3n + g - 1$ an, deren allgemeines Element tatsächlich regulär und vom Geschlechte g ist. Die Gleichungen von $I_{n,g}$ haben absolut rationale (d. h. dem Primkörper angehörige) Koeffizienten, und das gleiche gilt für die Gleichungen der Modulmannigfaltigkeit M_g. Es gibt eine algebraische Korrespondenz zwischen $I_{n,g}$ und M_g, die jeder regulären Kurve Γ einen Punkt $P(\Gamma)$ vom M_g eindeutig zuordnet, derart, daß zwei reguläre Kurven Γ_1 und Γ_2 genau dann birational äquivalent sind, wenn $P(\Gamma_1) = P(\Gamma_2)$ ist. Auch die Gleichungen dieser Korrespondenz haben absolut rationale Koeffizienten. $P(\Gamma) = P(K)$ kennzeichnet also den Körper K, der durch Γ definiert wird. Die Koordinaten m von $P(\Gamma) = P(K)$ heißen die *Moduln von K oder Γ*. Die $P(K)$ erschöpfen wie gesagt M_g bis auf eine Teilmannigfaltigkeit kleinerer Dimension. Ein anderes n führt zu einer anderen Modulmannigfaltigkeit, die aber, wie leicht einzusehen ist, durch eine birationale Transformation mit absolut rationalen Koeffizienten in M_g übergeführt werden kann; die Ausnahmepunkte dieser Transformation ohne eindeutig bestimmte Bildpunkte gehören der Ausnahme-

[1]) Siehe B. L. van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie. XI. Projektive und birationale Äquivalenz und Moduln von ebenen Kurven. Math. Ann. 114 (1937), S. 683–699.

mannigfaltigkeit der Punkte an, denen keine Körper vom Geschlechte g entsprechen. Die Moduln sind rationale Funktionen der Gleichungskoeffizienten von Γ mit absolut rationalen Koeffizienten.

Die besonderen Eigenschaften eines Körpers K müssen sich in den Moduln ausdrücken lassen. Wenn wir untersuchen wollen, wie das im einzelnen geschehen kann, so müssen wir vor allem ein Mittel haben, den Körper K durch seine Moduln auszudrücken. Im folgenden wollen wir in dieser Hinsicht beweisen:

Der Körper K kann durch eine Kurve $f(x, y) = \sum_{\nu,\mu} c_{\nu\mu} x^\nu y^\mu = 0$ *definiert werden, deren Gleichungskoeffizienten* $c_{\nu\mu}$ *rationale Funktionen der Moduln mit absolut rationalen Koeffizienten sind.* $f(x, y) = 0$ nennen wir eine *Normalgleichung* für K.

Diesen Satz können wir auch etwas anders auffassen. Als Moduln eines Funktionenkörpers K_0 mit einem Teilkörper k_0 von k als Konstantenkörper bezeichnen wir die Moduln von K_0k/k. Nennen wir zwei Körper K_0/k_0 und K_1/k_1 vom gleichen *Typus*, wenn K_0k und K_1k äquivalente Erweiterungen von k sind, so sind also die Moduln kennzeichnende Invarianten der Typen. Solange es uns nur auf den Typus ankommt, können wir danach fragen, einen Körper K_0 von vorgegebenem Typus mit möglichst kleinem Konstantenkörper k_0 anzugeben. Der obengenannte Satz besagt nun, *daß es einen solchen kleinsten Konstantenkörper gibt, und daß er von den Moduln erzeugt wird.* Wir nennen ihn den *Modulkörper*.

Beim Beweis brauchen wir den Begriff des *allgemeinen Körpers vom Geschlechte g*. Er ergibt sich, indem wir zu einem allgemeinen Punkt der Modulmannigfaltigkeit einen entsprechenden Punkt auf I nehmen und den Körper der rationalen Funktionen auf der Kurve bilden, die diesem Punkt entspricht. Sein Konstantenkörper ist nicht k, sondern hat den Transzendenzgrad d über k.

Wir brauchen ferner den Hilfssatz: *Der allgemeine Körper vom Geschlechte $g > 2$ hat keine Automorphismen über k.* Ein Beweis von F. Enriques für diesen Satz [F. Enriques, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. III (Bologna 1924), addizione 3, pag. 570–571] gilt auch für Primzahlcharakteristik, es ist nur nötig, daß wir uns davon überzeugen, daß auch für Primzahlcharakteristik p es nur endlich viele Divisorenklassen gibt, deren q-te Potenz die Hauptklasse ist (q vorgegebene ganze Zahl). Das kann geschehen, indem wir von der entsprechenden Tatsache für Körper der Charakteristik 0 (für die sie sich in wohlbekannter Weise aus dem Abelschen Theorem ergibt) ausgehen und sie durch ein Reduktionsverfahren auf Körper der Charakteristik p übertragen.

§ 1.

Die Fälle $g = 0$, 1 und 2.

1. Für $g = 0$ ist $d = 0$, $k(m) = k$ und $K_a = k(x)$, x Unbestimmte.

2. Für $g = 1$ ist $d = 1$. Wir wählen $n = 3$, stellen also die Körper vom Geschlechte 1 durch doppelpunktfreie Kurven dritter Ordnung dar. Wenn die Charakteristik p von k nicht 2 oder 3 ist, so kann jede solche Kurve durch eine projektive Transformation in die Gestalt

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0 \tag{1}$$

gebracht werden (Weierstraßsche Normalform). Zur Bildung des Moduls halten wir uns gleich an diese Normalform. Bekanntlich ist

$$j = 2^6 \cdot 3^3 \cdot \frac{g_2^3}{\Delta} \tag{2}$$

eine für alle definierenden Gleichungen der Gestalt (1) gleiche Invariante des zugehörigen Körpers K, die den Körper kennzeichnet. j kann als *Modul* betrachtet werden. M_1 ist dann eine Gerade, und j die Koordinate auf ihr. Allen Punkten von M_1, mit Ausnahme des unendlich fernen, für den $\Delta = 0$ wird, entsprechen Körper K vom Geschlechte 1.

Soll die Bildung des Moduls j genau in der in der Einleitung angegebenen Weise geschehen, so ist j als rationale Funktion der Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ der allgemeinen Kurve dritter Ordnung $\sum_{0 < \nu + \mu \leq 3} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu = 0$ darzustellen, im vorliegenden Fall ist ja $I_{3,1}$ einfach die Mannigfaltigkeit aller Kurven dritter Ordnung. Hierfür verweisen wir auf die Lehrbücher der algebraischen Geometrie und Invariantentheorie.

Den in der Einleitung genannten Satz, daß sich K durch eine Gleichung definieren läßt, deren Koeffizienten rationale Funktionen von j mit absolut rationalen Koeffizienten sind, beweisen wir einfach, indem wir die betreffenden Gleichungen angeben:

(3) für $j \neq 0, \neq 2^6 \cdot 3^3$: $y^2 = 4x^3 - 3j(j - 2^6 \cdot 3^3)x - j(j - 2^6 \cdot 3^3)^2$,

(4) für $j = 0$: $y^2 = 4x^3 - 1$,

(5) für $j = 2^6 \cdot 3^3$: $y^2 = 4x^3 - x$.

Den Fall $p = 3$ können wir noch im Zusammenhang mit dem Fall $p \neq 3, 2$ behandeln, wenn wir nicht auf die Normalform (1) der Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt zurückgehen, sondern nur auf die Form

$$y^2 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \tag{6}$$

wo rechts ein quadratfreies Polynom steht, die auch für $p = 3$ gilt, aber natürlich nicht für $p = 2$. j wird, wenn λ das Doppelverhältnis der vier Verzweigungsstellen der Funktion y ist, durch

$$j = 2^8 \frac{(1 - \lambda(1 - \lambda))^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2}$$

definiert und ist auch im Falle $p = 3$ eine den Körper kennzeichnende Invariante. Aus der Gleichung (6) ergibt sich j mittels der Formel

$$(7) \qquad j = 2^8 \frac{(a_1^3 - 3 a_0 a_2)^3}{a_0^2 a_1^3 a_3^3 + 18 a_0^3 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0^3 a_1 a_3 - 4 a_0^3 x_2^3 - 27 a_0^4 a_3^2},$$

die sich für $p = 3$ zu

$$(8) \qquad j = \frac{a_1^6}{(a_0 a_1 a_2)^2 - a_0^2 a_1^3 a_3 - a_0^3 a_2^3}$$

vereinfacht. j ist also auch in diesem Falle als Modul brauchbar und die Dinge liegen ganz so wie für $p \neq 2, 3$. Für $j \neq 0$ definiert

$$(9) \qquad y^2 = x^3 - x^2 + \frac{1}{j}$$

einen Körper der Charakteristik 3 mit der Invariante j und für $j = 0$

$$(10) \qquad y^2 = x^3 - x,$$

wie man ohne weiteres nachrechnet.

Ganz anders ist es für $p = 2$. Es läßt sich zeigen, daß jeder Körper des Geschlechtes 1 und der Charakteristik 2 durch eine Gleichung

$$(11) \qquad y^2 - y + \alpha x y = x^3, \quad \alpha^3 \neq 1$$

definiert werden kann. $j = \frac{\alpha^{12}}{1 + \alpha^3}$ ist eine den Körper kennzeichnende Invariante, also ein Modul. Die Modulmannigfaltigkeit ist die Gerade der j-Werte, deren sämtlichen Punkten, den unendlich fernen ausgenommen, umkehrbar eindeutig die verschiedenen Körper entsprechen. Für $j \neq 0$ kann der Körper durch die Gleichung

$$(12) \qquad y^2 - y = j x^2 + \frac{1}{j x}$$

und im Falle $j = 0$ durch

$$(13) \qquad y^2 - y = x^3$$

definiert werden. Die Gleichung (11) stellt aber auch für jede Charakteristik p alle Körper vom Geschlecht 1 dar. Es muß $\alpha^3 \neq -27$ sein und es ist $j = -\frac{\alpha^3 (\alpha^3 + 24)^3}{\alpha^3 + 27}$ [2]).

Im Falle $p \neq 2$ ist das Doppelverhältnis λ der vier Verzweigungsstellen von $K/k(x)$ gleich dem Doppelverhältnis der vier Tangenten, die von einem Kurvenpunkt an die Kurve gelegt werden können. Im Falle $p = 2$ zeigt sich, daß für $j \neq 0$ diese Tangenten zu je zweien zusammenfallen, während sie für $x = 0$ alle vier zusammenfallen.

---

[2]) Die Invariantentheorie der algebraischen Funktionen vom Geschlechte 1 für beliebige Charakteristik stelle ich in einer demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit über Normalformen und Invarianten elliptischer Funktionen ausführlich dar.

3. $g = 2$. Es ist $d = 3$. Eine definierende Gleichung für K erhalten wir aus der Differentialklasse. Ordnung und Dimension der Differentialklasse sind gleich 2 und daher gibt es im Falle $p \neq 2$ eine definierende Gleichung

$$y^2 = f(x), \tag{14}$$

in der

$$f(x = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu x^{6-\nu}$$

ein Polynom fünften oder sechsten Grades bedeutet, das keine Doppelwurzeln hat. x ist in K bis auf eine lineare Transformation und y bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Die projektiven Invarianten des Gewichts 0 der Binärform

$$f(x_0, x) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu x_0^\nu x_1^{6-\nu}$$

sind daher birationale Invarianten von K. Sie sind rationale Funktionen nullten Grades der a_ν mit absolut rationalen Koeffizienten.

Wir gelangen zu einer definierenden Gleichung von K, deren Koeffizienten sich rational mit rationalen Koeffizienten durch die absoluten Invarianten von $f(x_0, x_1)$ ausdrücken lassen, wenn wir die „typische Darstellung" von $f(x_0, x_1)$ heranziehen[3]). Wir betrachten zunächst eine *allgemeine* Binärform sechsten Grades $f(x_0, x_1)$ (mit über k unbestimmten Koeffizienten a_ν), die natürlich zu dem allgemeinen Körper vom Geschlechte 2 gehört. Sie kann in die Form

$$f(x_0, x_1) = \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=3} Q_{u_1 u_2 u_3} t_1^{u_1} t_2^{u_2} t_3^{u_3}$$

gesetzt werden, wo $t_1 = l$, $t_2 = m$, $t_3 = n$ drei quadratische Kovarianten sind, zwischen denen eine quadratische Gleichung

$$\sum S_{\lambda\varrho} t_\lambda t_\varrho = 0$$

besteht. Die $Q_{u_1 u_2 u_3}$ und die $S_{\lambda\varrho}$ sind dabei Invarianten von f, die als Funktionen der a_ν rationale Koeffizienten haben[4]). Der Grad von t_λ in den a_ν ist $2\lambda + 1$, der von $S_{\lambda\varrho}$ ist $28 - 2(\lambda + \varrho)$. Wir führen drei neue Variable

$$t_\lambda^* = A^{7-\lambda} t_\lambda$$

ein, wo A die Invariante zweiten Grades ist. Die t_λ^* haben dann sämtlich den Grad $2\lambda + 1 + 14 - 2\lambda = 15$ und zwischen ihnen besteht die Gleichung

$$\sum S_{\lambda\varrho}^* t_\lambda^* t_\varrho^* = 0,$$

deren Koeffizienten

$$S_{\lambda\varrho}^* = A^{\lambda+\varrho-14} S_{\lambda\varrho}$$

---

[3]) P. Gordan-G. Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie. II. § 29, Nr. 280, Formeln (I) und (II), S. 302–304.

[4]) Gordan-Kerschensteiner II, §§ 26–27, S. 275–291.

den Grad $28 - 2(\lambda + \varrho) + 2(\lambda + \varrho - 14) = 0$ haben, also absolute Invarianten sind. Es wird

$$f(x_0, x_1) = \sum Q_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} A^{\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 - 21} t_1^{*\mu_1} t_2^{*\mu_2} t_3^{*\mu_3}.$$

Da jedes Potenzprodukt $t_1^{*\mu_1} t_2^{*\mu_2} t_3^{*\mu_3}$ den Grad $15(\mu_1+\mu_2+\mu_3) = 45$ hat, so sind die Koeffizienten $Q_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} A^{\mu_1+2\mu_2+3\mu_3-21}$ Invarianten vom Grade -45 — was auch an den ausgerechneten Ausdrücken[3]) zu erkennen ist.

Bezeichnen wir mit R die Invariante 15ten Grades, so sind also $Q^*_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = Q_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} A^{\mu_1+2\mu_2+3\mu_3-21} R^3$ absolute Invarianten. Setzen wir $x_1/x_0 = x$, $t_2^*/t_1^* = z_2$, $t_3^*/t_0^* = z_3$ und $\overset{3}{R^2}\, y = u$, so ist

$$K = k(x, y) = k(z_2, z_3, u) \tag{15}$$

mit

$$S^*_{11} + 2S^*_{12} z_2 + 2S^*_{13} z_3 + S^*_{22} z_2^2 + 2S^*_{23} z_2 z_3 + S^*_{33} z_3^2 = 0, \tag{16}$$

$$y^2 = \sum Q^*_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} z_2^{\mu_2} z_3^{\mu_3}. \tag{17}$$

Die Koeffizienten S^* und Q^* der beiden letzten Gleichungen sind absolute Invarianten von f, die als rationale Funktionen der a_ν absolut rationale Koeffizienten haben. Alle Invarianten von f lassen sich rational durch fünf Invarianten ausdrücken: A vom Grade 2, B vom Grade 4, C vom Grade 6, D vom Grade 10 und R vom Grade 15. Die absoluten Invarianten sind daher rationale Funktionen der drei Invarianten B/A^2, C/A^3 und D/A^5 (R^2 ist rational durch A, B, C und D ausdrückbar). Diese drei Größen können wir also als Moduln von K betrachten. Sie sind, wie in der Invariantentheorie gezeigt wird, algebraisch unabhängig, so daß in der Tat der Wert $d = 3$ herauskommt. Die Modulmannigfaltigkeit ist der dreidimensionale Raum mit den Koordinaten B/A^2, C/A^3, D/A^5.

Die Erzeugung von K durch z_2, z_3, u zeigt, daß sich in der Tat K im Konstantenkörper der rationalen Funktionen von B/A^2, C/A^3, D/A^5 mit absolut rationalen Koeffizienten definieren läßt. Das gilt zunächst nur für den allgemeinen Körper vom Geschlechte 2. Für spezielle Körper können R oder die S^*, Q^* unendlich oder unbestimmt werden. Zwar können für diese Fälle — die den Fällen $j = 0$ und $j = 2^6 3^3$ bei $g = 1$ entsprechen — mittels der typischen Darstellungen von f auch noch den Formeln (15), (16), (17) entsprechende Erzeugungen aufgestellt werden, die unseren Satz auch für diese Fälle beweisen; wir werden sie aber im folgenden Abschnitt mittels einer für höheres g angewendeten Methode im Zusammenhang erledigen, ohne auf die expliziten Formeln einzugehen.

Die Ausnahmemannigfaltigkeit auf der Modulmannigfaltigkeit, deren Punkten keine Körper vom Geschlechte 2 entsprechen, ist durch das Verschwinden der Diskriminante von f, also durch die Gleichung [5])

$$(18)\quad 384\,A^5 - 6000\,A^3B - 10000\,A^2C + 15000\,AB^2 + 37500\,BC + 28125\,D = 0$$

oder

$$(19)\quad 384 - 6000\,B/A^2 - 10000\,C/A^3 + 15000\,(B/A^2)^2 + 37500\,B/A^2 \cdot C/A^3 + 28125\,D/A^5 = 0$$

gegeben.

Der einzige von der Identität verschiedene Automorphismus des allgemeinen Körpers $K = k(x, y) = k(z_2, z_3, u)$ vom Geschlechte 2 ist durch $x \to x' = x$, $y \to y' = -y$ gegeben. Denn er muß x linear transformieren, weil $k(x)$ als Körper vom Grad 2 unter K eindeutig bestimmt ist, da aber die allgemeine Binärform sechsten Grades keine von der Identität verschiedene Automorphismen hat, so muß $x' = x$ sein und dann bleibt für y' nur $y' = y$ oder $y' = -y$ übrig.

Wir verzichten darauf, auch den Fall $p = 0$ durchzuführen. Er kann in ähnlicher Weise wie $p = 2$, $g = 1$ behandelt werden.

§ 2.

Der Fall $g > 2$.

1. Wir setzen zunächst noch nicht voraus, daß $g > 2$ sei. Die Koordinaten eines Punktes von $I_{n,g}$, also die Koeffizienten der Kurvengleichung n-ter Ordnung, bezeichnen wir mit $a_0, a_1, a_2, \ldots$. $I_{n,g}$ wird, wie in der Einleitung schon erwähnt, durch homogene Gleichungen

$$(20)\quad \iota_\nu(a) = 0$$

mit absolut rationalen Koeffizienten gegeben. Die Koordinaten eines Punktes von $M_{n,g}$ seien $m_0, m_1, \ldots$ (die Verhältnisse $m_0 : m_1 : m_2 : \ldots$ sind also die *Moduln*). M_g wird durch homogene Gleichungen

$$(21)\quad \mu_\nu(m) = 0$$

mit absolut rationalen Koeffizienten definiert und die Korrespondenz zwischen $I_{n,g}$ und M_g durch zweifach homogene Gleichungen

$$(22)\quad \varkappa_\nu(a; m) = 0$$

mit absolut rationalen Koeffizienten.

---

[5]) Gordan-Kerschensteiner II, § 28, S. 291–302, insbesondere die Formel oben auf S. 301.

Wir zeigen zunächst, daß ein Körper K mit den Moduln $m_0^0 : m_1^0 : m_2^0 : \ldots$ durch eine reguläre irreduzible Kurve definiert werden kann, deren Koordinaten $a_0^0 : a_1^0 : a_2^0 : \ldots$ algebraisch mit absolut rationalen Koeffizienten von den Moduln $m_0^0 : m_1^0 : m_2^0 : \ldots$ abhängen. Dem Punkte $m_0^0 : m_1^0 : m_2^0 : \ldots$ von M_g entspricht auf $I_{n,g}$ die durch

$$\begin{aligned} \iota_\nu(a) &= 0, \\ \varkappa_\tau(a; m^0) &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

definierte irreduzible Teilmannigfaltigkeit $N(m^0)$ $(3n - 2g + 2 - \varrho)$-ter Dimension. Die durch die Punkte von $N(m^0)$ dargestellten Kurven sind untereinander birational äquivalent, soweit sie irreduzibel und regulär sind, und definieren den Körper K[6]). Da ein allgemeiner Punkt von $N(m^0)$ eine irreduzible reguläre Kurve darstellt[7]), so bilden die Punkte von $N(m^0)$, denen keine irreduziblen regulären Kurven entsprechen, eine Teilmannigfaltigkeit $N'(m^0)$ kleinerer Dimension von $N(m^0)$. $a_0^0 : a_1^0 : a_2^0 : \ldots$ sei ein allgemeiner Punkt von $N(m^0)$. $f = 3n - 2g + 2 - \varrho$ über $k(m^0)$ algebraisch unabhängige unter den Verhältnissen $a_0^0 : a_1^0 : a_2^0 : \ldots$, etwa $a_0^0 : a_1^0 : a_2^0 : \ldots : a_f^0$, können so zu absolut algebraischen Werten spezialisiert werden, daß der spezialisierte Punkt $a_0^{00} : a_1^{00} : a_2^{00} : \ldots$ nicht auf $N'(m^0)$ liegt. Er hat dann also Koordinaten, die algebraisch mit absolut algebraischen Koeffizienten von den Moduln $m_0^0 : m_1^0 : m_2^0 : \ldots$ abhängen und er stellt eine irreduzible reguläre Kurve Γ^0 dar, die den Körper K definiert.

2. Einem allgemeinen Punkt $m_0 : m_1 : m_2 : \ldots$ von M_g entspricht eine Mannigfaltigkeit $N(m)$ von birational äquivalenten irreduziblen regulären Kurven, die den *allgemeinen Körper* K_a vom Geschlechte g definieren. Nach dem in 1. bewiesenen kann als Konstantenkörper von K_a eine endliche algebraische Erweiterung k' von $k(m)$ gewählt werden. Wir wollen jetzt zeigen, daß es eine K_a definierende irreduzible reguläre Kurve Γ gibt, deren Koordinaten algebraische Funktionen von $m_0 : m_1 : m_2 : \ldots$ mit absolut algebraischen Koeffizienten sind und die bei der Spezialisierung $m \to m^0$ in Γ^0 übergeht. Der allgemeine Punkt a von $N(m)$ wird durch

$$\iota_\nu(a) = 0, \quad \varkappa_\nu(a; m) = 0 \tag{24}$$

definiert. Die Verhältnisse $a_0 : a_1 : a_2 : \ldots : a_f$ müssen über $k(m)$ algebraisch unabhängig sein, da sie bei der Spezialisierung $m \to m^0$ in die über $k(m^0)$ algebraisch unabhängigen Verhältnisse $a_0^0 : a_1^0 : a_2^0 : \ldots : a_f^0$ übergehen. Folglich bestimmen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\iota_\nu(a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}; a'_{f+1}, \ldots) = 0, \\ &\varkappa_\nu(a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}, a'_{f+1}, \ldots; m) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

---

[6]) van der Waerden, a. a. O.[1]), Satz 5, S. 697.

[7]) van der Waerden, a. a. O.[1]), Satz 4, S. 693.

eine Kurve Γ, die den allgemeinen Körper K_a definiert, deren Koordinaten algebraisch mit absolut algebraischen Koeffizienten von den Moduln m abhängen und die in die den gegebenen Körper K definierende Kurve Γ^0 übergeht, wenn m zu m^0 spzialisiert wird. (Γ ist irreduzibel und regulär, weil Γ^0 es ist.) In diesem Sinne entstehen die speziellen Körper K aus dem allgemeinen Körper K_a durch Spezialisieren der Moduln.

3. P sei der Primkörper. Den Körper $\mathsf{P}(m^0)$, der durch Adjunktion der Moduln $m_0^0 : m_1^0 : \ldots$ zu P entsteht, nennen wir den *Modulkörper* von K. Ebenso ist $\mathsf{P}(m)$ der Modulkörper des allgemeinen Körpers K_a. Die Koordinatenverhältnisse $a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_{f_1}^{00} : a_{f+1}^{00} : \ldots$ erzeugen eine endliche algebraische Erweiterung Σ_1^0 von $\mathsf{P}(m^0)$ und ebenso $a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00} : a_{f+1}' : \ldots$ eine endliche algebraische Erweiterung Σ_1 von $\mathsf{P}(m)$. Statt Σ_1 nehmen wir die kleinste Σ_1 enthaltende normale Erweiterung Σ von $\mathsf{P}(m)$. Die Spezialisierung $m \to m^0$, $a_{f+1}' \to a_{f+1}^{00}$, $a_{f+2}' \to a_{f+2}^{00}$, $\ldots$ ist ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von Σ, der Σ auf eine $a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00} : a_{f+1}^{00} : \ldots$ enthaltende normale Erweiterung Σ^0 von $\mathsf{P}(m^0)$ und $\mathsf{P}(m)$ auf $\mathsf{P}(m^0)$ abbildet.

Wir zeigen, daß Σ über $\mathsf{P}(m)$ und Σ^0 über $\mathsf{P}(m^0)$ separabel angenommen werden kann. Die Charakteristik p sei $\neq 0$. Der Inseparabilitätsgrad von $\Sigma^0/\mathsf{P}(m^0)$ und von $\Sigma/\mathsf{P}(m)$ kann eine gewisse Grenze p^e nicht übersteigen; da die Verhältnisse $a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00}$ als absolut algebraische Elemente über $\mathsf{P}(m)$ und über $\mathsf{P}(m^0)$ separabel sind, so ist lediglich zu zeigen, daß der Inseparabilitätsgrad von $\Sigma/\mathsf{P}(m, a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00})$ und von Σ^0 über $\mathsf{P}(m^0, a_1^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00})$ beschränkt ist. Die definierenden Gleichungen für Σ und Σ^0 lauten aber

$$\iota_r(a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}, a_{f+1}', \ldots) = 0, \quad \iota_r(a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}, a_{f+1}^{00}, \ldots) = 0$$

und

$$\varkappa_r(a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}; a_{f+1}', \ldots; m) = 0, \quad \varkappa_r(a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}, a_{f+1}^{00}, \ldots; m) = 0.$$

Sie sind unabhängig von den Werten $a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00}$ in $a_{f+1} : a_{f+2} : \ldots$ von festen Graden, daher sind sogar die vollen Grade von Σ über $\mathsf{P}(m, a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00})$ und von Σ^0 über $\mathsf{P}(m^0, a_0^{00} : a_1^{00} : \ldots : a_f^{00})$ beschränkt. Führen wir jetzt $m_0^{p^{-e}} : m_1^{p^{-e}} : \ldots$ als neue Moduln ein, so wird $\Sigma(m_p^{-e})$ über $\mathsf{P}(m^{p^{-e}})$ und $\Sigma^0(m^{0\,p^{-e}})$ über $\mathsf{P}(m^{0\,p^{-e}})$ separabel.

4. $\mathfrak{G}$ sei die Galoisgruppe von $\Sigma/\mathsf{P}(m)$. x und y seien inhomogene Koordinaten des Punktes auf Γ, als Elemente von K_a aufgefaßt, erzeugen sie K_a: $K_a = k'(x, y)$. Wir betrachten jetzt den Teilkörper $\Sigma(x, y)$, aus dem sich K_a durch Konstantenerweiterung ergibt. Die Gleichung zwischen x und y, deren Koeffizienten $a_0^{00}, a_1^{00}, \ldots, a_f^{00}, a_{f+1}', \ldots$ sind, heiße $f(x, y) = 0$. Ihr Grad in y sei m. Ist σ ein Element von $\mathfrak{G}$, so ist die Kurve Γ^σ mit den Koordinaten $a_0^{00\sigma} : a_1^{00\sigma} : \ldots : a_f^{00\sigma} : a_{f+1}^{\sigma} : \ldots$ der Symmetrie wegen ebenso wie Γ

regulär und irreduzibel, und da ihre Moduln die gleichen sind wie die von Γ, so ist sie mit Γ birational äquivalent. Es gibt daher zwei Elemente,

$$(26)\qquad \begin{aligned} x' &= A_0(x) + A_1(x)\,y + \cdots + A_{m-1}(x)\,y^{m-1}, \\ y' &= B_0(x) + B_1(x)\,y + \cdots + B_{m-1}(x)\,y^{m-1}, \end{aligned}$$

in denen die A_ν und B_ν rationale Funktionen von x mit über Σ algebraischen Koeffizienten bedeuten, die der Gleichung $f''(x', y') = 0$ mit den Koeffizienten $a_0^{00''} : a_1^{00''} : \ldots : a_f^{00''} : a_{f+1}^{0''} : \ldots$ genügen und die den Körper K_a erzeugen: $K_a = k'(x', y')$.

Jetzt können wir unter der Voraussetzung $g > 2$ leicht zeigen, daß x' und y' durch die Bedingung $f''(x', y') = 0$ eindeutig bestimmt sind. Denn ein anderes Elementepaar x'', y'', das der Gleichung $f''(x'', y'') = 0$ genügte, würde zu einer isomorphen Abbildung $x' \to x''$, $y' \to y''$ von K_a in sich führen, die die Konstanten fest ließe und von der Identität verschieden wäre. Eine solche Abbildung gibt es aber nach dem in der Einleitung genannten Hilfssatz nicht. Wir bezeichnen die eindeutig bestimmten Elemente x', y' mit x'', y''. Die Koeffizienten α, β der Funktionen A_ν, B_ν liegen in Σ. Denn zunächst dürfen wir annehmen, daß sie separabel über Σ sind. Ist das nicht der Fall, so können wir es doch erreichen, indem wir, wie oben, neue Moduln $m_\nu^{p^{-e}}$ statt m_ν einführen. Wären die α, β keine Elemente von Σ, so gäbe es ein von α, β verschiedenes, zu α, β über Σ konjugiertes Wertsystem $\bar\alpha$, $\bar\beta$, das zu einem Elementepaar

$$\begin{aligned} \bar x' &= \bar A_0(x) + \bar A_1(x)\,y + \cdots + \bar A_{m-1}(x)\,y^{m-1}, \\ \bar y' &= B_0(x) + B_1(x)\,y + \cdots + B_{m-1}(x)\,y^{m-1}, \end{aligned}$$

führen würde, das, obwohl es wegen der Eindeutigkeit der Ausdrücke (26) für x' und y' von x', y' verschieden wäre, doch der Gleichung $f''(\bar x', \bar y') = 0$ genügte.

Damit ist gezeigt, daß $x \to x^\sigma$, $y \to y^\sigma$ ein Automorphismus von $\Sigma(x, y)$ ist, der die Elemente von $\mathsf{P}(m)$ fest läßt. Die σ erzeugen eine Automorphismengruppe $\mathfrak{G}'$ von $\Sigma(x, y)/\mathsf{P}(m)$, die bei Beschränkung auf Σ in $\mathfrak{G}$ übergeht, und daher $\mathfrak{G}$ als homomorphes Bild hat. Jedoch muß diese Abbildung treu sein, weil es sonst doch verschiedene Fortsetzungen eines Automorphismus σ von $\Sigma/\mathsf{P}(m)$ auf $\Sigma(x, y)$ gäbe. Der Invariantenkörper K_{a_0} von $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ hat den Konstantenkörper $\mathsf{P}(m)$. Der Grad von ΣK_{a_0} über K_{a_0} ist gleich der Ordnung von $\mathfrak{G}$ der von $\Sigma(x, y)$ aber auch folglich ist $\Sigma K_a^0 = \Sigma(x, y)$ und $k' K_{a_0} = K_a$; K_a ist eine Konstantenerweiterung von K_{a_0}. Damit ist der Modulkörper $\mathsf{P}(m)$ als kleinster Konstantenkörper von K_a erkannt, es ist nur noch im Falle einer Primzahlcharakteristik zu zeigen, daß K_{a_0} durch Adjunktion *zweier* Elemente zu $\mathsf{P}(m)$ erzeugt werden kann (weil im allgemeinen zwei

Elemente zur Erzeugung eines Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik nicht ausreichen). Das ist offenbar der Fall, wenn y separabel über $\Sigma(x)$ ist. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist aber sicher wenigstens hinsichtlich einer der beiden Veränderlichen separabel, weil sie in dem algebraisch abgeschlossenen Körper k irreduzibel ist.

Unser Satz ist damit für den allgemeinen Körper K_a bewiesen. Um ihn auch für den speziellen Körper K zu beweisen, gehen wir folgendermaßen vor: $f(x, y) = 0$ geht modulo $\mathfrak{p}$ in eine definierende Gleichung $f^0(x^0, y^0) = 0$ von K/k über. Der Primdivisor $\mathfrak{p}$ läßt sich auf $\Sigma(x, y)$ ausdehnen, indem $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0 \bmod \mathfrak{p}$ gesetzt wird. Die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ und die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{p}$ hinsichtlich $\mathsf{P}(m)$ haben für $\mathfrak{p}$ als Primdivisor von $\Sigma(x, y)$ die gleiche Bedeutung wie ohne Schwierigkeit einzusehen ist. Daher ist die Galoisgruppe von $\Sigma^0(x^0, y^0)$ über dem Restklassenkörper K_0 von $K_{a_0} \bmod \mathfrak{p}$ die gleiche wie die von $\Sigma^0/\mathsf{P}(m^0)$, nämlich $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$. Der Konstantenkörper von K_0 ist bei $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ elementweise invariant, er ist daher gleich $\mathsf{P}(m^0)$, denn Σ^0 ist über $\mathsf{P}(m^0)$ separabel. Der Grad von $\Sigma^0 K_0$ über K_0 ist der gleiche wie der von Σ^0 über $\mathsf{P}(m^0)$, nämlich die Ordnung von $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$. Daher ist $\Sigma^0 K_0 = \Sigma^0(x^0, y^0)$, und hieraus können wir die Behauptung unseres Satzes wie im Falle allgemeiner Moduln ableiten.

Wir haben sogar noch etwas mehr gezeigt, nämlich:

Es gibt eine definierende Gleichung $\Sigma c_{r,u} x^r y^u = 0$ des allgemeinen Körpers K_a, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Moduln m mit absolut rationalen Koeffizienten sind und die beim Einsetzen der speziellen Moduln m^0 in eine definierende Gleichung von K übergeht. Die erhaltene Gleichung und auch die allgemeine ist in wenigstens einer der beiden Veränderlichen separabel.

Aus der Herleitung ergibt sich ohne Schwierigkeit der folgende Zusatz:

$m_r = M_r(a)$ seien die Darstellungen der Modulkoordinaten als ganzzahlige Polynome der Kurvenkoordinaten a und $c_{r,u} = C_{r,u}(m)$ die Darstellungen der Koeffizienten $c_{r,u}$ als rationale ganzzahlige Funktionen der allgemeinen Moduln für Charakteristik 0. Die gleichen Ausdrücke gelten dann auch für fast alle Primzahlcharakteristiken.

Denn sie können für eine Primzahlcharakteristik p nur dann versagen, wenn modulo p gewisse Nenner 0 oder gewisse absolut irreduzible Polynome reduzibel werden. Beides tritt nur für endlich viele Werte von p ein[8]).

Der Zusatz ist auch in den schon behandelten Fällen $g = 0, 1, 2$ richtig. Im Falle $g = 0$ ist nichts weiter zu sagen. Im Falle $g = 1$ gelten die für Charakteristik 0 abgeleiteten Formeln auch für $p \neq 2, 3$, die Formeln $m_r = M_r(a)$ sogar noch für $p = 3$, wenn wir die Kurvengleichung in der

[8]) Vgl. die unter [1]) genannte Arbeit.

Gestalt (6) zugrunde legen. Ebenso gelten im Falle $g = 2$ die für Charakteristik 0 abgeleiteten Formeln auch für $p \neq 2$.

5. Wir wollen zum Schluß noch den in § 1 offengelassenen Beweis dafür nachholen, daß unser Satz für $g = 2$ auch bei speziellen Moduln immer richtig ist. Nach 1., 2., 3. 4. dieses Abschnitts gibt es eine definierende Gleichung

$$y^2 = f(x) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu x^{6-\nu}$$

des allgemeinen Körpers K_a vom Geschlechte 2, in der die a_ν einem über dem Modulkörper $\mathsf{P}(m)$ separablen normalen Körper Σ angehören und die modulo p in eine definierende Gleichung

$$y^{0^2} = f^0(x) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu^0 x^{0^{6-\nu}}$$

eines gegebenen speziellen Körpers K übergeht. Der Restklassenkörper Σ^0 von Σ modulo p ist dabei über dem Modulkörper $\mathsf{P}(m^0)$ von K separabel. Am einfachsten läßt sich das machen, indem wir drei von den Nullstellen von $f(x)$ nach 0, 1 und ∞ legen und den höchsten Koeffizienten von $f(x)$ gleich 1 nehmen. Ein Element σ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von $\Sigma/\mathsf{P}(m)$ kann wie in 4. auf $\Sigma(x, y)$ fortgesetzt werden: $x \to x''$, $y \to y''$. Allerdings ist diese Fortsetzung nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf den Automorphismus $x \to x$, $y \to -y$ von K_a. Die Fortsetzung auf den rationalen Teilkörper $\Sigma(x)$ ist daher eindeutig, dagegen ist y nur bis aufs Vorzeichen bestimmt. Nun muß aber y'' bis auf einen konstanten Faktor c_σ gleich y'' sein: $y'' = c_\sigma y$. Denn y'' ist ebenso wie y von x ganz algebraisch abhängiges Element, dessen Quadrat dem eindeutig bestimmten Teilkörper $\Sigma(x)$ angehört. Aus $y''^\tau = (y'')^\tau$ ergibt sich

$$c_{\sigma\tau}^2 = (c_\sigma^2)^\tau c_\tau^2.$$

Die c^2 bilden also ein System von *Transformationsgrößen*; und es gibt ein Element d in Σ mit

$$c_\sigma^2 = d^{1-\sigma}\,^9).$$

$df(x) = dy^2$ ist bei $\mathfrak{G}$ invariant: $(dy^2)'' = d^\sigma c_\sigma^2 (y^2) = d^{\sigma-1} c_\sigma^2 (dy^2) = dy^2$. Die gleiche Schlußweise wie im Falle $g > 2$ zeigt, daß der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}$ in $\Sigma(x)$ ein Körper K_{a0}^* mit dem Konstantenkörper $\mathsf{P}(m)$ ist, aus dem sich $\Sigma(x)$ durch Konstantenerweiterung ergibt. Da $df(x)$ diesem Körper angehört, so ist $K_{a0} = K_{a0}^*(z)$ mit $z^2 = df(x)$ ein allgemeiner Körper mit dem Konstantenkörper $\mathsf{P}(m)$. Damit ist zunächst der allgemeine Fall aufs neue erledigt.

---

[9]) A. Speiser, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie. Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 1—6, Satz 1. Vgl. auch M. Deuring, Algebren. Ergebnisse d. Mathematik IV, 1: Kap. V, § 6, Satz 1, S. 66.

Wie im Falle $g > 2$ sehen wir nun ein, daß $K^*_{a_0}$ modulo $\mathfrak{p}$ in einen Körper K^*_0 mit dem Konstantenkörper $\mathsf{P}(m^0)$ übergeht, aus dem sich $\Sigma^0(x^0)$ durch Konstantenerweiterung ergibt. Wir können aber nun den gesuchten Körper K_0 nicht einfach durch $K_0 = K^*_0(\sqrt{d^0 f^0(x)})$ erklären. Denn es kann sein, daß d^0, der Rest von d modulo $\mathfrak{p}$, 0 oder ∞ ist. Aber die Reste c^0_ν der c_ν modulo $\mathfrak{p}$ sind endlich und von Null verschieden, weil ja $y^{0^2} = f^0(x^0)$ ist, jedenfalls, soweit Elemente σ der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{p}$ in Betracht kommen. Ferner ist $c^{0^2}_\sigma = c^{0^2}_\tau$, wenn σ und τ nach der Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ kongruent sind. Die $c^{0^2}_\sigma$ bilden also ein Transformationsgrößensystem zu $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$, und es wird $c^{0^2}_\sigma = d'^{1-\sigma}$ mit einem Element d' von Σ^0. $K_0 = K^*_0(\sqrt{d' f^0(x)})$ ist dann der gesuchte Körper K_0 zu den Moduln m^0 mit dem Modulkörper $\mathsf{P}(m^0)$ als Konstantenkörper. Wir haben aber nicht gezeigt, daß sich eine definierende Gleichung von $K_0/\mathsf{P}(m^0)$ durch Einsetzen der speziellen Moduln aus einer definierenden Gleichung von $K_{,0}/\mathsf{P}(m)$ gewinnen läßt. Das haben wir im Falle $g = 1$ auch nicht getan, und es scheint, daß das in diesen beiden Fällen gar nicht möglich ist.

(Eingegangen am 1. Juni 1940.)

Invarianten und Normalformen elliptischer Funktionenkörper.

Von

Max Deuring in Jena.

Einleitung.

Ein algebraischer Funktionenkörper des Geschlechtes 1 (elliptischer Funktionenkörper) einer komplexen Veränderlichen kann bekanntlich durch eine Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$$

erzeugt werden (*Weierstraßsche Normalform*). Für den Typus von K ist die Invariante

$$j = 2^6 \cdot 3^3 \frac{g_3^3}{\Delta}$$

kennzeichnend. Eine andere Normalform ist die *Legendresche*

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \qquad \lambda \neq 0, 1,$$

mit

$$j = 2^8 \frac{(1-\lambda(1-\lambda))^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Die Weierstraßsche Normalform gilt, wie leicht einzusehen ist, auch für beliebige elliptische Funktionenkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper, sofern die Charakteristik p nicht 2 oder 3 ist. Die Legendresche gilt auch noch für $p = 3$, dagegen nicht mehr für $p = 2$.

Im folgenden sollen für alle Charakteristiken Normalformen unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgestellt werden. Für $p \neq 3, 2$ sind das allbekannte Überlegungen, die wir der Vollständigkeit halber, und weil einige Ergänzungen zu machen sind, noch einmal darstellen. Für $p = 3$ finden wir im wesentlichen die gleichen Normalformen, die Herr Hasse [1]) angegeben hat. Für $p = 2$ erhalten wir Normalformen von ganz anderer Art, nämlich

$$y^2 - y = x^3, \quad \text{falls} \quad j = 0$$

und

$$y^2 - y = jx^2 + \frac{1}{jx}, \quad \text{falls} \quad j \neq 0.$$

[1]) H. Hasse, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Abh. des Math. Seminars d. Hamburger Universität 10 (1934), S. 325–348, insbesondere § 3.

Es ist für einige Anwendungen nützlich, eine Normalform zu haben, die für alle Werte von p und j gilt. Eine solche ist

$$y^2 - y + \alpha xy = x^3$$

mit

$$(\alpha^3 + 24)^3 + j(\alpha^3 + 27) = 0.$$

Es wäre wünschenswert, die Invariante j und die allgemeingültige Normalform, die hier für $p = 2$ nur formal mit $p \neq 2$ in Zusammenhang gebracht worden sind, für alle p gemeinsam abzuleiten.

Wenn der Konstantenkörper k von K nicht algebraisch abgeschlossen ist, so braucht K keine definierende Gleichung von einer der Normalformen zu haben. Wir zeigen, daß jedenfalls die Invariante j immer dem Konstantenkörper angehören muß. Nennen wir zwei Körper K_1 und K_2 mit dem gleichen Konstantenkörper k vom gleichen Typus, wenn sie bei algebraischem Abschluß von k isomorph werden, so ist die Invariante j für den Typus kennzeichnend. Wir zeigen, daß es zu jedem Wert von j einen Körper K_0 mit der Invariante j gibt, dessen Konstantenkörper aus dem Primkörper P durch Adjunktion von j entsteht, $\mathsf{P}(j)$ ist also der kleinste Konstantenkörper, in dem ein elliptischer Körper mit der Invariante j möglich ist[2]).

1.

k sei ein Körper der Charakteristik p ($= 0$ oder $\neq 0$). Wir betrachten elliptische Funktionenkörper K mit dem Konstantenkörper k, aber nur solche, die separabel erzeugbar sind. Aus dieser Voraussetzung folgt, daß für jeden Erweiterungskörper k' von k die Konstantenerweiterung Kk' von K den genauen Konstantenkörper k' hat und auch vom Geschlechte 1 ist. k^* sei eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von k. Zwei Körper K_1 und K_2 heißen *vom gleichen Typus*, wenn K_1k^* und K_2k^* über k^* isomorph sind.

Wir wollen zeigen, daß die Typen von elliptischen Funktionenkörpern K über k umkehrbar eindeutig den Elementen von k zugeordnet werden können, daß, mit anderen Worten, *jedem K ein Element j von k, die Invariante von K, so zugeordnet werden kann, daß Körper vom gleichen Typ gleiche, Körper von verschiedenem Typ verschiedene Invarianten haben, und daß zu jedem j aus k ein K mit dieser Invariante existiert.*

In dem gegebenen elliptischen Funktionenkörper K/k schließen wir k algebraisch ab zu k^* und bilden Kk^*. $\mathfrak{a}$ sei irgendein ganzer Divisor zweiten Grades von Kk^*/k^*. Da die Klasse von $\mathfrak{a}$ die Dimension 2 hat, so gibt es von $\mathfrak{a}$

[2]) Für einen entsprechenden Satz für algebraische Funktionenkörper höheren Geschlechtes vgl. die vorstehende Arbeit M. Deuring, Zur Theorie der Moduln algebraischer Funktionenkörper, Mathem. Zeitschr. 47 (1940).

verschiedene zu $\mathfrak{a}$ äquivalente ganze Divisoren $\mathfrak{b}$. Ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \cong x$, so ist Kk^* über $k^*(x)$ quadratisch, kann also, wenn $p \neq 2$ ist, durch ein Element y mit

$$y^2 = f(x), \tag{1}$$

und, wenn $p = 2$ ist, durch ein Element y mit

$$y^2 - y = R(x) \tag{2}$$

erzeugt werden [Kk^* kann nicht inseparabel quadratisch über $k^*(x)$ sein, weil es sonst das Geschlecht 0 hätte]. $f(x)$ und $R(x)$ bedeuten Elemente von $k^*(x)$.

2.

Wir betrachten zunächst den Fall $p \neq 2$. $f(x)$ kann als quadratfreies Polynom gewählt werden. Damit für Kk^* das Geschlecht 1 herauskomme, muß $f(x)$ vom Grade 3 oder 4 sein. Im ersten Falle,

$$f(x) = \varrho\,(x - \xi_1)\,(x - \xi_2)\,(x - \xi_3),$$

sind die Zähler von $x - \xi_1$, $x - \xi_2$, $x - \xi_3$ und der Nenner von x in K verzweigt, im zweiten Falle,

$$f(x) = \varrho\,(x - \xi_1)\,(x - \xi_2)\,(x - \xi_3)\,(x - \xi_4),$$

sind die Zähler der $x - \xi_\nu$ in Kk verzweigt. Im ersten Falle wollen wir $\xi_4 = \infty$ setzen.

Alle ganzen zu $\mathfrak{a}$ äquivalenten Divisoren sind Linearkombinationen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, denn die Klasse von $\mathfrak{a}$ hat die Dimension 2. Wenn wir also statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei andere ganze Divisoren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ der gleichen Klasse nehmen, so bedeutet das, daß wir statt x ein anderes Element

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \tag{3}$$

nehmen, das den gleichen rationalen Funktionenkörper $k^*(x') = k^*(x)$ erzeugt, In (3) ist auch gleich der Fall einbegriffen, daß sich x' von x nur um einen konstanten Faktor unterscheidet. Die Verzweigungsstellen von Kk^* über $k^*(x) = k^*(x')$ sind die Zähler der $x' - \xi'_\nu$,

$$\xi'_\nu = \frac{\alpha\xi_\nu + \beta}{\gamma\xi_\nu + \delta} \tag{4}$$

gesetzt; ist ein ξ'_ν gleich ∞, so ist statt des Zählers von $x' - \xi'_\nu$ der Nenner von x' zu nehmen. Das Doppelverhältnis

$$\lambda = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi_1 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4}$$

der vier Verzweigungsstellen ist mithin bei der Transformation (4) invariant. λ nimmt bei den 24 Vertauschungen der ξ_ν die 6 Werte λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$,

$1 - \frac{1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ an. Von diesen 6 Werten ist keiner 0, weil die ξ_ν verschieden sind. Wir setzen

$$(\xi) \qquad j = 2^8 \frac{(1 - \lambda(1 - \lambda))^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2}.$$

j bleibt bei Vertauschungen der ξ_ν ungeändert und ist daher allein durch K und die zugrunde gelegte Divisorenklasse zweiten Grades von Kk^* bestimmt. Wir zeigen jetzt, daß j auch von dieser Divisorenklasse nicht abhängt und folglich eine allein von K abhängige *Invariante* ist.

Zu diesem Zweck nehmen wir die definierende Gleichung (1) in der Gestalt

$$(6) \qquad y^2 = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)$$

an, bringen also einen Verzweigungspunkt nach $x = \infty$. Der Nenner von x ist dann in Kk^* ein Quadrat $\mathfrak{o}^2$, das in der gegebenen Klasse zweiten Grades liegt. Gehen wir von einer anderen Klasse zweiten Grades aus, so erhalten wir eine definierende Gleichung

$$(7) \qquad x^{*2} = (x^* - \xi_1^*)(x^* - \xi_2^*)(x^* - \xi_3^*),$$

wo x^* einen quadratischen Nenner $\mathfrak{o}^{*2}$ hat. Es gibt aber einen Automorphismus σ von Kk^*/k^*, der $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}^*$ überführt: ist z ein Element mit dem Nenner $\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*$, — es gibt ein solches z, weil es zu $\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*$ äquivalente von $\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*$ verschiedene ganze Divisoren gibt —, so ist Kk^* über $k^*(z)$ vom Grade 2 und der von der Identität verschiedene Automorphismus σ von $Kk^*/k^*(z)$ vertauscht $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}^*$. σ führt die Klasse von $\mathfrak{o}^2$ in die Klasse von $\mathfrak{o}^{*2}$ über; daher kann $x^* = x^\sigma$ genommen werden und die definierende Gleichung (7) nimmt die Form

$$(y^\sigma)^2 = (x^* - \xi_1)(x^* - \xi_2)(x^* - \xi_3)$$

an, führt also zu dem gleichen Wert von j wie (6), was zu beweisen war.

Wir zeigen jetzt, daß j dem ursprünglichen Konstantenkörper k angehört. Jedenfalls ist j separabel algebraisch über k. Denn da K separabel erzeugbar ist, so hat es separable Primdivisoren, durch eine separabel algebraische Konstantenerweiterung k^{**} kann also erreicht werden, daß Kk^{**} ganze Divisoren zweiten Grades enthält. Kk^{**} hat eine definierende Gleichung der Gestalt (1), wo $f(x)$ ein kubisches oder biquadratisches Polynom mit Koeffizienten aus k^{**} ist. j ist aber eine symmetrische Funktion der Wurzeln von $f(x)$ mit absolut rationalen Koeffizienten, ist also eine rationale Funktion der Koeffizienten von $f(x)$ mit absolut rationalen Koeffizienten und gehört daher dem Körper k^{**} an. Wir können k^{**} gleich als normal über k annehmen. Ein Automorphismus σ von k^{**}/k kann zu einem Automorphismus von Kk^{**}/K erweitert werden. Die durch $y^2 = f(x)$ verbundenen erzeugenden Elemente x, y von Kk^{**}/k^{**} gehen durch σ in ein Paar x^σ, y^σ von erzeugenden

Elementen über, aus denen sich dann die Invariante x zu j'' berechnet. Mithin ist $j'' = j$, das heißt, j muß zu k gehören.

Es ist umgekehrt leicht einzusehen, daß durch den Wert von j der Typus von K eindeutig bestimmt ist. Die drei ersten Verzweigungspunkte ξ_1, ξ_2, ξ_3 können durch eine lineare Transformation (3) nach $\xi_1 = \infty$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ gebracht werden. Das Doppelverhältnis der ξ_ν ist dann gleich ξ_4, ξ_4 ist also eine der sechs Nullstellen λ von (5). Alle sechs Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda_3 = 1 - \lambda$, $\lambda_4 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, $\lambda_5 = 1 - \frac{1}{\lambda}$, $\lambda_6 = \frac{1}{1 - \lambda}$. Die zugehörigen sechs linearen Transformationen $x \to x$, $x \to \frac{1}{x}$, $x \to 1 - x$, $x \to \frac{x}{x-1}$, $x \to 1 - \frac{1}{x}$, $x \to \frac{1}{1-x}$ bringen die vier Verzweigungspunkte, abgesehen von der Reihenfolge, in die sechs Lagen $\infty, 0, 1, \lambda_\nu$; $\lambda_\nu = 1, 2, \ldots, 6$. Daher führt die Kenntnis von j eindeutig zu dem Typus von K: als Verzweigungspunkte können ∞, 0, 1 und *irgendeine* Wurzel λ von (5) genommen werden. Die definierende Gleichung heißt dann

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \quad (\textit{Legendresche Normalform}).$$

Wir wollen jetzt die definierende Gleichung von $Kk^*/k^*(x)$ in der Form

$$y^2 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \tag{8}$$

annehmen, also einen Verzweigungspunkt nach $x = \infty$ legen, und j durch die a_ν ausdrücken. ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die drei Nullstellen des Polynoms rechts und ξ_4 ist ∞. Daher ist $\lambda = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}$ und es kommt

$$j = 2^8 \frac{\left[1 - \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}\left(1 - \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}\right)\right]^3}{\left(\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}\right)^2 \left(1 - \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}\right)^2}$$

$$= 2^8 \frac{\left((\sum \xi_\nu)^2 - 3 \sum_{\nu<\mu} \xi_\nu \xi_\mu\right)^3}{\prod_{\nu<\mu} (\xi_\nu - \xi_\mu)^2}.$$

Es ist

$$\sum_\nu \xi_\nu = -a_1/a_0 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu<\mu} \xi_\nu \xi_\mu = a_2/a_0$$

und für die Diskriminante D des Polynoms $\sum_{\nu=0}^{3} a_\nu x^{3-\nu} = a_0 \prod_{\nu=1}^{3} (x - \xi_\nu)$ haben wir den Ausdruck

$$D = a_0^4 \prod_{\nu<\mu} (\xi_\nu - \xi_\mu)^2 = a_1^2 a_2^2 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4 a_1^3 a_3 - 4 a_0 a_2^3 - 27 a_0^2 a_3^2; \tag{9}$$

daher ist

$$j = \frac{2^8 (a_1^2 - 3 a_0 a_2)^3}{a_0^2 D} = \frac{2^8 (a_1^2 - 3 a_0 a_2)^3}{a_0^2 a_1^2 a_2^2 + 18 a_0^3 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0^3 a_1^3 a_3 - 4 a_0^3 a_2^3 - 27 a_0^4 a_3^2}. \tag{10}$$

Nehmen wir jetzt zuerst an, daß $p \neq 3$ ist. Dann kann durch die lineare Transformation $x = 4\,a_0 x' - a_1/3a_0$, $y = 2\,a_0 y'$ erreicht werden, daß $a_1 = 0$ und $a_0 = 4$ ist. Dann haben wir eine definierende Gleichung der Form

$$y^2 = 4\,x^3 - g_2 x - g_3 \quad (\textit{Weierstraßsche Normalform}). \tag{11}$$

Wir bemerken, daß wenn K einen Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{o}$ hat und unter x ein Element mit dem Nenner $\mathfrak{o}^2$ verstanden wird, schon K und nicht erst Kk^* eine definierende Gleichung der Form (7) und also auch eine der Form (11) hat.

x und y sind in Kk^* (oder auch schon in K selbst) durch die Bedingung, daß der Nenner von x gleich $\mathfrak{o}^2$ ist und daß zwischen ihnen eine Gleichung der Form (10) bestehen soll, bis auf eine Transformation

$$x' = \varepsilon^2 x, \quad y' = \varepsilon^3 y, \qquad \varepsilon \neq 0 \text{ aus } k^* \text{ (aus } k) \tag{12}$$

festgelegt, es gilt $y'^2 = 4\,x'^3 - g_2' x' - g_3'$ mit

$$g_2' = \varepsilon^4 g_2, \quad g_3' = \varepsilon^6 g_3. \tag{13}$$

Die Invariante j ergibt sich aus (10) zu

$$j = 2^6 \cdot 3^3 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\,g_3^2}. \tag{14}$$

Sei $p = 3$. Dann ist

$$j = \frac{a_1^4}{(a_0 a_1 a_2)^2 - a_0^3 a_1^3 a_3 - a_0^4 a_2^3}. \tag{15}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $j = 0$. Dann ist $a_1 = 0$. Durch die Transformation $x \to a_0 x$, $y \to a_0^2 y$ erhalten wir eine Gleichung der Form

$$y^2 = x^3 - g_2 x - g_3. \tag{16}$$

K selbst ist durch eine Gleichung dieser Gestalt erzeugbar, wenn es in K einen Primdivisor $\mathfrak{o}$ ersten Grades gibt. x und y sind in Kk^* (in K) durch die Bedingung, daß $\mathfrak{o}^2$ der Nenner von x sei und daß zwischen x und y eine Gleichung der Form (15) bestehe, bis auf eine Transformation

$$x' = \varepsilon^2 (x - \alpha), \quad y' = \varepsilon^3 y, \qquad \varepsilon \neq 0 \text{ und } \alpha \text{ aus } k^* \text{ (aus } k) \tag{17}$$

festgelegt, es gilt $y'^2 = x'^3 - g_2' x' - g_3'$ mit

$$g_2' = \varepsilon^4 g_2, \quad g_3' = \varepsilon^6 (g_3 + g_2 \alpha - \alpha^3). \tag{18}$$

Es ist notwendig $g_2 \neq 0$, sonst hätte das Polynom dritten Grades eine dreifache Nullstelle.

In Kk^* können wir die Transformation (17) mit $\varepsilon = g_2^{-\frac{1}{4}}$ und $\alpha^3 - g_2 \alpha - g_3 = 0$ ausführen. Dadurch erhalten wir eine definierende Gleichung der Form

$$y^2 = x^3 - x. \tag{19}$$

2. $j \neq 0$. Dann ist $a_1 \neq 0$. Die Transformation $x \to a_0 x + \frac{a_2}{a_1}$, $y \to a_0^2 y$ bringt die definierende Gleichung auf die Form

$$y^2 = x^3 - g_1 x^2 - g_3, \qquad g_1 \neq 0. \tag{20}$$

Wieder ist schon K selbst durch eine solche Gleichung erzeugbar, wenn es in K einen Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{o}$ gibt. Durch die Forderung, daß $\mathfrak{o}^2$ der Nenner von x sei und daß zwischen x und y eine Gleichung von der Gestalt (20) bestehe, sind x und y bis auf eine Transformation

$$x' = \varepsilon^2 x, \; y' = \varepsilon^3 y, \qquad \varepsilon \neq 0 \text{ aus } k^* \text{ (aus } k) \tag{21}$$

festgelegt; es gilt dann $y'^2 = x'^3 - g' x'^2 - g_3'$ mit

$$g_1' = \varepsilon^3 g_1, \quad g_3' = \varepsilon^6 g_3. \tag{22}$$

Die Invariante j ist

$$j = -\, g_1^3\, g_3^{-1}. \tag{23}$$

Mit Hilfe der Normalformen läßt sich jetzt leicht zeigen, *daß es zu jedem Element j von k elliptische Körper K mit k als Konstantenkörper gibt, deren Invariante j ist*: wir schreiben einfach in den drei Fällen $p \neq 3$, $p = 3$ und $j = 0$, $p = 3$ und $j \neq 0$ die definierenden Gleichungen hin

$$(24)\quad \begin{cases} p \neq 3,\ j \neq 0,\ \neq 2^6 \cdot 3^3\colon & y^2 = 4x^3 - 3j(j - 2^6 \cdot 3^3)x - j(j - 2^6 \cdot 3^3)^2, \\ p \neq 3,\ j = 0\colon & y^2 = 4(x^3 - 1), \\ p \neq 3,\ j = 2^6 \cdot 3^3\colon & y^2 = 4(x^3 - x), \\ p = 3,\ j = 0\colon & y^2 = x^3 - x, \\ p = 3,\ j \neq 0\colon & y^2 = x^3 - x^2 + \frac{1}{j}. \end{cases}$$

Da andererseits j in k enthalten sein muß, so ist, unter P den Primkörper der Charakteristik p verstanden, $\mathsf{P}(j)$ *der kleinste Konstantenkörper, in dem ein elliptischer Funktionenkörper mit der Invariante j möglich ist.*

3.

Der Fall $p = 2$ ist ganz anders gelagert. Wir haben in diesem Falle eine definierende Gleichung der Form (2)

$$y^2 - y = R(x).$$

y ist bis auf eine Transformation $y \to y + B(x)$, $B(x)$ aus $k^*(x)$ bestimmt, $R(x)$ daher bis auf einen Summanden $B^2 - B$. Durch passende Wahl von B kann erreicht werden, daß der Nenner von $R(x)$ ein Produkt von Primdivisorpotenzen aus $k^*(x)$ mit ungeraden Exponenten ist [dies reduzierte $R(x)$ entspricht dem quadratfreien $f(x)$ im Falle $p \neq 2$]. In Kk^* werden gerade die Nennerprimfaktoren von $R(x)$ Primdivisorquadrate $\mathfrak{p}_r^2$. Ist $\prod_{r=1}^{m} \mathfrak{p}^{2\lambda_r}$, $\lambda_r \equiv 1 \bmod 2$, der Nenner von R, so ist $\prod_{r=1}^{m} \mathfrak{p}_r^{\lambda_r + 1}$ die Differente

von $Kk^*/k^*(x)$ [3]). Da die Differente den Grad 4 haben muß, so sind zwei Fälle möglich:

a) $m = 1$, $\lambda = 3$, eine Verzweigungsstelle $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$.

b) $m = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, zwei Verzweigungsstellen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$.

Fall a. Durch eine lineare Transformation von x kann erreicht werden, daß $\mathfrak{o}^2$ der Nenner von x ist. Die definierende Gleichung von $Kk^*/k^*(x)$ lautet dann

$$y^2 - y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \qquad a_3 \neq 0. \tag{25}$$

Die Gestalt dieser Gleichung hängt nicht von der Divisorenklasse zweiten Grades ab, der Zähler und Nenner von x angehören. Es sei $\mathfrak{a}^*$ ein ganzer Divisor einer anderen Klasse zweiten Grades. Die Klasse von $\mathfrak{a}^*\mathfrak{o}^{-2}$ ist das Quadrat einer Klasse C, ist $\mathfrak{o}^*$ der (einzige) Primdivisor der Klasse $\mathfrak{o}C$, so liegt $\mathfrak{o}^{*2}$ in der Klasse von $\mathfrak{a}^*$. Wir schließen jetzt wie unter 2.: Ist z ein Element mit dem Nenner $\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*$, so führt der von der Identität verschiedene Automorphismus von $Kk^*/k^*(z)$ $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}^*$ und daher x und y in ein Paar erzeugender Elemente x^*, y^* von Kk^* über, zwischen denen die Gleichung

$$y^{*2} - y^* = a_0 x^{*3} + a_1 x^{*2} + a_2 x^* + a_3$$

besteht. Daraus schließen wir insbesondere, daß schon K selbst eine definierende Gleichung dieser Form hat, sobald es einen Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{o}$ in K/k gibt, $\mathfrak{o}^2$ kann dann als Nenner von x genommen werden.

x und y können noch einer Transformation

$$x = \alpha x' + \beta, \quad \alpha \neq 0, \ \beta, \ \gamma, \ \delta \text{ aus } k^* \text{ (aus } k),$$
$$y = y' + \gamma x' + \delta$$

unterworfen werden, ohne daß sich die Form der Gleichung $y^2 - y =$ Polynom dritten Grades von x zwischen ihnen ändert. Es wird

$$\begin{aligned} y'^2 - y' &= a_0' x'^3 + a_1' x'^2 + a_2' x' + a_3', \\ a_0' &= a_0 \alpha^3, \\ a_1' &= a_0 \alpha^2 \beta + a_1 \alpha^2 + \gamma^2, \\ a_2' &= a_0 \alpha \beta^2 + a_2 \alpha + \gamma, \\ a_3' &= a_0 \beta^3 + a_1 \beta^2 + a_2 \beta + a_3 + \delta^2 + \delta. \end{aligned}$$

In k^* können wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihe nach aus den separabeln algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= a_0, \\ a_0^2 \beta^4 + a_0 \beta &= a_1 + a_2^2, \\ \gamma &= \alpha (a_0 \beta^2 + a_2), \\ \delta^2 + \delta &= a_0 \beta^3 + a_1 \beta^2 + a_2 \beta + a_3 \end{aligned} \tag{26}$$

[3]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. Math. 172 (1934), S. 37—54.

bestimmen, dann besteht zwischen x' und y' die Gleichung

$$y^2 - y = x^3. \tag{27}$$

Im Falle a gibt es also nur einen Körpertypus, und dieser ist in jedem Konstantenkörper der Charakteristik 2, insbesondere schon im Primkörper möglich.

Fall b. Durch eine lineare Transformation von x kann erreicht werden, daß die beiden Verzweigungspunkte nach $x = 0$ und $x = \infty$ kommen. Die definierende Gleichung hat dann die Gestalt

$$y^2 - y = \frac{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{x}, \qquad a_0 a_2 \neq 0. \tag{28}$$

Wie oben unter 2. wird bewiesen, daß Gestalt und Koeffizienten dieser Gleichung nicht von der Divisorenklasse zweiten Grades abhängen, der Zähler und Nenner von x angehören, und daß schon K selbst eine definierende Gleichung der Form (28) hat, wenn es in K einen Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{o}$ gibt, dessen Quadrat dann als Nenner von x genommen werden kann.

Ersetzen wir in (28) x durch $x/a_0^2 a_2$ und y durch $y + x/a_0 a_2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon^2 - \varepsilon = a_1$, so vereinfacht sich (28) zu

$$y^2 - y = j x^2 + \frac{1}{j x} \quad \text{mit} \quad j = a_0^{-2} a_2^{-2}. \tag{29}$$

Wir sehen ohne weiteres ein, daß x und y durch die Angabe des Nenners $\mathfrak{o}^2$ von x und durch die Forderung, zwischen ihnen solle eine Gleichung der Form (29) bestehen, völlig bestimmt sind, bis auf die Transformation $x \to x$, $y \to y + 1$. Daher ist j eine den Typus von K kennzeichnende *Invariante*. Dem Körpertypus mit der definierenden Gleichung (27) ordnen wir die Invariante $j = 0$ zu.

Eine ähnliche Schlußweise wie unter 2. zeigt, daß j stets dem Konstantenkörper k angehört, und (29) zeigt, daß es zu jedem j aus k einen Körper K mit der Invariante j gibt. $\mathsf{P}(j)$ ist auch für $p = 2$ der kleinste Konstantenkörper in dem ein elliptischer Körper K mit der Invariante j möglich ist

4.

Die Weierstraßsche Normalform ist nur für $p \neq 2, 3$ brauchbar, die Legendresche auch noch für $p = 3$, aber nicht für $p = 2$. Für gewisse Anwendungen ist es vorteilhaft, eine Normalform zur Hand zu haben, die alle Fälle umfaßt. Wir beweisen:

Für alle Charakteristiken und jeden Wert von j kann — nach einer passenden endlichen algebraischen Konstantenerweiterung — K durch eine Gleichung

$$y^2 - y + \alpha x y = x^3 \tag{30}$$

erzeugt werden. α berechnet sich aus der Gleichung

$$(31)\quad \varphi(\alpha^3) = \alpha^3(\alpha^3+24)^3 + j(\alpha^3+27)$$
$$= \alpha^{12} + 2^3\cdot 3^2\cdot\alpha^9 + 2^6\cdot 3^3\cdot\alpha^6 + 2^9\cdot 3^3\cdot\alpha^3 + j\alpha^3 + 3^3\cdot j = 0.$$

Umgekehrt ist (30) *für jeden Wert $\alpha^3 \neq -27$ eine Gleichung vom Geschlechte* 1 *mit der Invariante*

$$j = -\frac{\alpha^3(\alpha^3+24)^3}{\alpha^3+27}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst den Fall $p \neq 2$. Wir setzen in (30) $y + \frac{1}{2}(\alpha x - 1) = t$ und finden

$$t^2 = y^2 + y(\alpha x - 1) + \tfrac{1}{4}(\alpha x - 1)^2 = x^3 + \tfrac{1}{4}(\alpha x - 1)^2$$

oder

$$t^2 = x^3 + \tfrac{1}{4}\alpha^2 x^2 - \tfrac{1}{2}\alpha x + \tfrac{1}{4}.$$

Die Diskriminante des kubischen Polynoms rechts ist nach (9) gleich $-2^{-4}(\alpha^3+27)$. Für $\alpha^3 \neq -27$ ist also (30) vom Geschlechte 1 und hat die Invariante

$$j = -\frac{2^8(\alpha^6\cdot 2^{-4} + \alpha\cdot 3\cdot 2^{-1})^3}{2^{-4}(\alpha^3+27)} = -\frac{\alpha^3(\alpha^3+24)^3}{\alpha^3+27}.$$

Umgekehrt, wenn j gegeben ist, so ist (30) mit einer Wurzel α der Gleichung (31) eine Gleichung vom Geschlechte 1 mit dieser Invariante j [wegen $\varphi(-27) = 3^6$ ist sicher $\alpha^3 \neq -27$].

Es sei jetzt $p = 2$. Für $\alpha = 0$ ist (30) gerade der Gleichungstyp (27), dem wir die Invariante $j = 0$ zugeordnet hatten. Es wird andererseits $-\frac{\alpha^3(\alpha^3+24)^3}{\alpha^3+27} = 0$ für $\alpha = 0$. Ist $\alpha \neq 0$, so setzen wir

$$x = \alpha^{-1}(1+u^{-1}) \quad \text{und} \quad y = \alpha^{-\frac{3}{2}} + tu^{-1},$$

dadurch verwandelt sich (30) in

$$t^2 - t = \frac{(\alpha^{-3} + \alpha^{-\frac{3}{2}})u^2 + \alpha^{-3}u + \alpha^{-3}}{u}.$$

Wegen $\alpha^3 \neq 27$ ist $(\alpha^{-3} + \alpha^{-\frac{3}{2}})\cdot\alpha^{-3} \neq 0$, so daß (30) eine Gleichung vom Geschlechte 1 ist, deren Invariante nach (29) den Wert

$$j = \frac{\alpha^{12}}{1+\alpha^3} = -\frac{\alpha^3(\alpha^3+24)^3}{\alpha^3+27}$$

hat. Ist umgekehrt j gegeben, so ist (30) mit $\varphi(\alpha^3) = \alpha^{12} + j(\alpha^3+1) = 0$ eine Gleichung vom Geschlechte 1 mit der Invariante j [wegen $\varphi(27) = \varphi(1) = 1$ ist $\alpha \neq 0$].

(Eingegangen am 8. Juni 1940.)

Über die Approximation stetiger Funktionen durch trigonometrische Polynome.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Funktionen von einer Variablen.

Eine Funktion der Form

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

oder, was dasselbe ist, eine rationale ganze Funktion der beiden Größen $\cos x$ und $\sin x$ heißt ein trigonometrisches Polynom von x. Den von Weierstraß (Mathematische Werke, Band 3, S. 22) herrührenden Satz, daß eine stetige Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x mit der Periode 2π sich gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt, beweist man heute wohl meistens nach Herrn Fejér, indem man auf die Fouriersche Reihe von $f(x)$ das Summationsverfahren von Cesàro anwendet[1]). Noch einfacher dürfte aber eine von Herrn de la Vallée Poussin angegebene Methode sein[2]). Beide Methoden sind, wie hier gezeigt werden soll, Spezialfälle eines sehr allgemeinen Prinzips.

Eine Folge von nicht identisch verschwindenden trigonometrischen Polynomen

$$P_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

heiße *zulässig*, wenn

$$P_n(x) \geqq 0 \quad \text{für alle } x \tag{2}$$

und wenn außerdem jedem Paar (beliebig kleiner) positiver Zahlen ε, δ eine Zahl n_0 zugeordnet werden kann derart, daß

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt < \varepsilon \int_{0}^{2\pi} P_n(t)\,dt \quad \text{für } n \geqq n_0 \tag{3}$$

ist. Beispiele siehe unten.

---

[1]) L. Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Annalen 58, S. 51—69; K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. Auflage. Berlin 1931. § 61.

[2]) Ch.-J. de la Vallée Poussin, Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier. Académie royale de Belgique, bulletins de la classe des sciences 1908, S. 193—254, speziell S. 227 ff.

Mit dieser Definition gilt der

Satz 1. *Ist $f(x)$ eine stetige Funktion der reellen Variablen x mit der Periode 2π und ist $P_n(x)$ irgendeine zulässige Folge trigonometrischer Polynome, so ist auch*

$$Q_n(x) = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)\, P_n(t-x)\, dt}{\int_0^{2\pi} P_n(t)\, dt} \tag{4}$$

ein trigonometrisches Polynom von x, und es gilt die Formel

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = f(x)$$

gleichmäßig für alle x.

Beweis. Daß $Q_n(x)$ ein trigonometrisches Polynom von x ist, sieht man sofort, wenn man $P_n(x)$ in der Gestalt (1) schreibt. In (4) kann man wegen der Periodizität von $f(t)$ und $P_n(t)$ die Integrale statt von 0 bis 2π über ein beliebiges Intervall der Länge 2π erstrecken. Ersetzt man dann im Zähler die Integrationsvariable t durch $t + x$, so erhält man

$$Q_n(x) - f(x) = \frac{\int_0^{2\pi} [f(t+x) - f(x)]\, P_n(t)\, dt}{\int_0^{2\pi} P_n(t)\, dt}. \tag{5}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es zu jedem positiven ε ein positives δ so, daß

$$|f(t+x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{für } -\delta < t < \delta$$

ist, und man kann $\delta < \pi$ annehmen. Außerdem ist $f(x)$ beschränkt: $|f(x)| \leqq M$. Dann folgt aus (5), indem man die Integrale nach Bedarf von $-\delta$ bis $2\pi - \delta$ erstreckt:

$$|Q_n(x) - f(x)| \leqq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon\, P_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} 2M\, P_n(t)\, dt}{\int_{-\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\, dt} \leqq \varepsilon + 2M\, \frac{\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\, dt}{\int_0^{2\pi} P_n(t)\, dt},$$

mit Rücksicht auf (3) also

$$|Q_n(x) - f(x)| < \varepsilon + 2M\varepsilon \qquad \text{für } n \geqq n_0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 1. Die Funktionen

$$P_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \alpha_\nu \sin^2\frac{x}{2}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \alpha_\nu \frac{1-\cos x}{2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

bilden eine Folge nicht identisch verschwindender trigonometrischer Polynome. Wir zeigen, daß das, falls nur

$$0 \leqq \alpha_\nu \leqq 1, \quad \sum \alpha_\nu \text{ divergent}$$

ist, eine *zulässige* Folge ist. Zunächst ist nämlich trivialerweise die Forderung (2) erfüllt. Außerdem ist

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt < \int_\delta^{2\pi-\delta} \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{2}\right)dt < 2\pi \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt \geqq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} P_n(t)\,dt > \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{4}\right)dt = \delta \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{4}\right).$$

Daher

$$\frac{\int_\delta^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt}{\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt} < \frac{2\pi}{\delta} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{2}}{1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{4}} = \frac{2\pi}{\delta} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1-\alpha_\nu \frac{\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\delta}{4}}{1-\alpha_\nu \sin^2\frac{\delta}{4}}\right)$$

$$< \frac{2\pi}{\delta} \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\alpha_\nu\left(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\delta}{4}\right)\right).$$

Wegen der Divergenz der Reihe $\sum \alpha_\nu$ geht das letzte Produkt für $n \to \infty$ nach 0, so daß auch die Forderung (3) erfüllt ist.

Speziell für $\alpha_\nu = 1$ erhält man die zulässige Folge

$$P_n(x) = \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Das ist die von Herrn de la Vallée Poussin benutzte Folge.

Beispiel 2. Die Formeln

$$\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\frac{x}{2} - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2} + \cdots\right]^2,$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

lehren, daß die Funktionen

$$P_n(x) = \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

eine Folge trigonometrischer Polynome bilden. Wir zeigen, daß sie *zulässig* ist. Zunächst ist offenbar wieder die Forderung (2) erfüllt. Sodann ist

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt < \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 dt < \frac{2\pi}{\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\int_{0}^{2\pi} P_n(t)\,dt > \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} P_n(t)\,dt > \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{\frac{nt}{4}}{\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \frac{n\pi}{2}.$$

Daher ist

$$\frac{\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt}{\int_{0}^{2\pi} P_n(t)\,dt} < \frac{4}{n\cdot\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

also $< \varepsilon$ für genügend großes n. Daher ist auch die Forderung (3) erfüllt. Die Fejérsche Methode läuft auf die Benutzung dieser Funktionenfolge hinaus[3]).

§ 2.

Deutung als Summationsmethode der Fourierschen Reihe.

Die obigen Beispiele von zulässigen $P_n(x)$ sind lauter gerade Funktionen, also Kosinuspolynome; man kann leicht auch andere angeben, etwa

$$P_n(x) = (1 + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{6}\sin^3 x)^n,$$

wobei der Nachweis der Zulässigkeit dem Leser überlassen sei. Aber den Kosinuspolynomen kommt noch eine besondere Bedeutung zu, weil sie Summationsmethoden für Fouriersche Reihen liefern. Sei

$$P_n(x) = \tfrac{1}{2}c_{n0} + \sum_{\nu=1}^{N} c_{n\nu}\cos\nu x \tag{8}$$

eine Folge zulässiger Kosinuspolynome. Sei ferner

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x) \tag{9}$$

---

[3]) In der Fejérschen Darstellung seines Verfahrens spielt die Formel

$$\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = 2n\pi$$

eine entscheidende Rolle. Wie man oben sieht, kommt man auch ohne deren Kenntnis mit einer rohen Abschätzung aus.

die Fouriersche Reihe von $f(x)$, also

$$(10)\quad \begin{cases} a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\nu t\,dt & (\nu = 0,1,2,\ldots), \\ b_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\nu t\,dt & (\nu = 1,2,3,\ldots). \end{cases}$$

Dann ist

$$\frac{\int_0^{2\pi} f(t)\,P_n(t-x)\,dt}{\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt}$$

$$= \frac{1}{c_{n0}\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\Big[\frac{1}{2}c_{n0} + \sum_{\nu=1}^{N} c_{n\nu}(\cos\nu t\cos\nu x + \sin\nu t\sin\nu x)\Big]\,dt$$

$$= \frac{1}{c_{n0}}\Big[\frac{1}{2}c_{n0}a_0 + \sum_{\nu=1}^{N} c_{n\nu}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x)\Big].$$

Definiert man also noch

$$(11)\quad c_{n\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu > N$$

und setzt dann

$$(12)\quad \varphi_\nu(n) = \frac{c_{n\nu}}{c_{n0}} \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots),$$

so läuft das Verfahren darauf hinaus, daß man statt der Fourierschen Reihe (9) die Funktion

$$\Phi(n) = \tfrac{1}{2}a_0\varphi_0(n) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x)\,\varphi_\nu(n)$$

betrachtet und dann beweist, daß

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n) = f(x)$$

ist. Den Funktionen $\varphi_\nu(n)$ kommt daher die Bedeutung von summatorischen Folgen für Fouriersche Reihen zu. Ob die $\varphi_\nu(n)$ in jedem Fall summatorische Folgen in dem früher von mir eingeführten Sinne[4]) sind, so daß sie insbesondere für jede konvergente Reihe den richtigen Wert liefern, d. h. ob sie den Forderungen

$$(13)\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_\nu(n) = 1 \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$(14)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(n) - \varphi_{\nu+1}(n)| \leqq M \quad \text{(unabhängig von } n)$$

[4]) Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Math. Zeitschr. 6, S. 286–310.

genügen, kann ich heute nicht allgemein beweisen. Wohl aber kann ich die Formel (13) allgemein und die Formel (14) wenigstens für die Beispiele des vorigen Paragraphen beweisen. Aus (8) folgt für $\nu \leqq N$

$$\pi c_{n\nu} = \int_0^{2\pi} P_n(t) \cos \nu t \, dt = \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t) \cos \nu t \, dt, \tag{15}$$

und mit Rücksicht auf die Definition (11) gilt das auch für $\nu > N$. Daher ist

$$\varphi_\nu(n) - 1 = \frac{c_{n\nu} - c_{n0}}{c_{n0}}$$

$$= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)\,[\cos \nu t - 1]\,dt + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\,[\cos \nu t - 1]\,dt}{\int_{-\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt},$$

also bei festem ν und beliebig kleinem positivem ε, wenn δ hinreichend klein und sodann n hinreichend groß gewählt wird:

$$|\varphi_\nu(n) - 1| \leqq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)\,[1 - \cos \nu \delta]\,dt}{\int_{-\delta}^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt} + \frac{\int_{\delta}^{2\pi-\delta} 2\,P_n(t)\,dt}{\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt}$$

$$< 1 - \cos \nu \delta + 2\varepsilon < 3\varepsilon.$$

Daher gilt die Formel (13). Was die Formel (14) anbelangt, so bedarf sie im Fall des zweiten Beispiels keines Beweises, weil dieses Beispiel ja auf die Cesàro-Fejérsche Summationsmethode hinausläuft und diese sich meiner Summationstheorie durch summatorische Folgen unterordnet. Im Fall des ersten Beispiels genügt es wegen $\varphi_0(n) = 1$, zu beweisen, daß

$$\int_0^{2\pi} P_n(t) \cos \nu t \, dt \geqq \int_0^{2\pi} P_n(t) \cos (\nu + 1)\, t \, dt \geqq 0 \tag{16}$$

ist. Dann ist nämlich wegen (12) und (15)

$$1 \geqq \varphi_\nu(n) \geqq \varphi_{\nu+1}(n) \geqq 0,$$

also $\varphi_\nu(n)$ eine fallende summatorische Folge (a. a. O., § 2). Nun ist

$$P_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \alpha_\nu + \alpha_\nu \cos^2 \frac{t}{2}\right) = \sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_{n\lambda} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2\lambda},$$

wobei $\gamma_{n\lambda} \geqq 0$. Daher ist[5])

$$\int_0^{2\pi} P_n(t) \cos \nu t \, dt = \sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_{n\lambda} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2\lambda} \cos \nu t \, dt = \sum_{\lambda=0}^{n} \gamma_{n\lambda} \binom{2\lambda}{\lambda+\nu} \frac{\pi}{2^{2\lambda-1}},$$

woraus (16) unmittelbar folgt.

Bei einer Summationsmethode für Fouriersche Reihen wird man sich auch dafür interessieren, was sie bei unstetigen Funktionen leistet. Es gilt der

Satz 2. *Ist $f(x)$ eine beschränkte integrierbare Funktion der reellen Variablen x mit der Periode 2π, ist ferner $P_n(x)$ eine zulässige Folge von Kosinuspolynomen und ist dann $Q_n(x)$ die durch* (4) *definierte Folge trigonometrischer Polynome, so gilt die Formel*

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(x) = \tfrac{1}{2} \lim_{t \to 0} [f(x+t) + f(x-t)]$$

für jedes x, für das der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beweis. Da $P_n(t)$ jetzt eine gerade Funktion ist, so ist

$$Q_n(x) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) P_n(t) \, dt}{\int_{-\pi}^{\pi} P_n(t) \, dt} = \frac{\int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] P_n(t) \, dt}{2 \int_0^{\pi} P_n(t) \, dt}.$$

Setzt man also

$$\tfrac{1}{2} \lim_{t \to 0} [f(x+t) + f(x-t)] = g(x),$$

so ist

$$Q_n(x) - g(x) = \frac{\int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2g(x)] P_n(t) \, dt}{2 \int_0^{\pi} P_n(t) \, dt}.$$

Zerlegt man das Zählerintegral in $\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$ und wählt δ so klein (bei festem x), daß

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2g(x)| < 2\varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < t < \delta,$$

---

[5]) Hier ist die folgende Formel zu benutzen:

$$\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2\lambda} = \frac{1}{2^{2\lambda}} \left(e^{\frac{it}{2}} + e^{-\frac{it}{2}}\right)^{2\lambda}$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda-1}} \left[\cos \lambda t + \binom{2\lambda}{1} \cos(\lambda - 1)t + \cdots + \binom{2\lambda}{\lambda-1} \cos t + \frac{1}{2} \binom{2\lambda}{\lambda}\right].$$

so erhält man

$$|Q_n(x) - g(x)| < \varepsilon + 4M \frac{\int_{\delta}^{\pi} P_n(t)\,dt}{2\int_{0}^{\pi} P_n(t)\,dt} < \varepsilon + 4M\varepsilon,$$

wenn nur n genügend groß.

§ 3.

Funktionen von mehreren Variablen.

Eine Summe von endlich vielen Gliedern der Form

$$\alpha\,\varphi_1(\nu_1 x_1)\,\varphi_2(\nu_2 x_2)\ldots\varphi_k(\nu_k x_k), \tag{17}$$

wo die ν_k ganze Zahlen sind und jedes φ_k die Bedeutung cos oder sin hat, oder, was dasselbe ist, eine rationale ganze Funktion von

$$\cos x_1,\ \sin x_1,\ \ldots,\ \cos x_k,\ \sin x_k,$$

heißt ein trigonometrisches Polynom von $x_1, \ldots, x_k$. Bekanntlich läßt sich auch eine stetige Funktion von k reellen Variablen, die in bezug auf jede dieser Variablen die Periode 2π hat, gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren. Insbesondere kann zum Beweis das Fejérsche Summationsverfahren der Fourierschen Reihe auf Funktionen von k Variablen ausgedehnt werden[6]). Aber auch der Satz 1 läßt sich in vollem Umfang übertragen.

Als *zulässig* wird man jetzt eine Folge von nicht identisch verschwindenden trigonometrischen Polynomen

$$P_n(x_1, \ldots, x_k) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bezeichnen, wenn stets

$$P_n(x_1, \ldots, x_k) \geqq 0 \tag{18}$$

und wenn außerdem jedem Paar (beliebig kleiner) positiver Zahlen ε, δ eine Zahl n_0 zugeordnet werden kann derart, daß

$$\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} P_n(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1\ldots dt_k - \int_{-\delta}^{\delta}\ldots\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1\ldots dt_k \tag{19}$$
$$< \varepsilon \int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} P_n(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1\ldots dt_k \quad \text{für } n \geqq n_0$$

ist. Insbesondere wird hiernach, wenn $P_{n1}(x), \ldots, P_{nk}(x)$ k zulässige Folgen von trigonometrischen Polynomen *einer* Variablen sind, die Folge

$$P_n(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{\varkappa=1}^{k} P_{n\varkappa}(x_\varkappa) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

[6]) Siehe etwa L. Tonelli, Serie trigonometriche, Bologna 1928, Cap. IX, § 4.

eine zulässige Folge sein; also beispielsweise die Folge[7])

$$P_n(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{\varkappa=1}^{k} \left(\cos \frac{x_\varkappa}{2}\right)^{2n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder auch die Folge

$$P_n(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{\varkappa=1}^{k} \left(\frac{\sin \frac{n\, x_\varkappa}{2}}{\sin \frac{x_\varkappa}{2}} \right)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es gilt der

Satz 3. *Ist $f(x_1, \ldots, x_k)$ eine stetige Funktion der reellen Variablen $x_1, \ldots, x_k$, die in bezug auf jede dieser Variablen die Periode 2π hat, und ist $P_n(x_1, \ldots, x_k)$ irgendeine zulässige Folge trigonometrischer Polynome, so ist auch*

$$Q_n(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(t_1, \ldots, t_k)\, P_n(t_1 - x_1, \ldots, t_k - x_k)\, dt_1 \ldots dt_k}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} P_n(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \ldots dt_k}$$

ein trigonometrisches Polynom, und es gilt die Formel

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$$

gleichmäßig für alle Wertsysteme $x_1, \ldots, x_k$.

Der Beweis ist so völlig dem Beweis von Satz 1 analog, daß auf eine ausführliche Wiedergabe verzichtet werden kann.

---

[7]) Diese Folge findet sich bei F. Sibirani, Su la rappresentazione approssimata delle funzioni di più variabili reali e delle loro derivate per polinomi trigonometrici. Atti della reale Accademia di Torino **44** (1909), S. 659–683.

(Eingegangen am 5. Juni 1940.)

Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden.

Von

Heinz Thomas in Darmstadt.

I. Allgemeine Fragestellung.

1. Ein ebenes Netz mit quadratischen Maschen von beliebig kleiner Seitenlänge Δs, das aus zwei Geradenscharen eines ebenen, konvexen Bereiches besteht, werde in der Weise realisiert, daß die Geraden durch „ideale", d. h. unendlich dünne, undehnbare und ohne Zwang verbiegbare Fäden ersetzt und die beiden Fadenscharen in den Kreuzungspunkten miteinander verknotet werden. Ein solches verknotetes Fadennetz läßt sich sowohl in der Ebene wie im Raum in mannigfacher Weise verformen. Wir betrachten jetzt Verformungen, bei denen die Fäden gespannt bleiben, die Quadrate des Netzes also in ebene oder räumliche Rhomben von konstanter Seitenlänge übergehen, und schließen dabei Rhomben mit Winkeln von 0^0 oder 180^0 aus. Ein so verformtes Fadennetz, ein sogenanntes Tschebyscheffnetz[1]), läßt sich stets innerhalb gewisser Grenzen auf einem starren Modell einer beliebigen Fläche ausbreiten[2]).

Wir lassen nun in den Randpunkten unseres über das Flächenmodell ausgebreiteten Fadennetzes beliebig kleine Kräfte, sogenannte Randkräfte, in Richtung der Fäden angreifen. Diese Randkräfte können stets so gewählt werden, daß sich das Netz im Gleichgewicht befindet. Dabei werden die Netzfäden im allgemeinen einen Druck senkrecht zur Trägerfläche ausüben. Wir

---

[1]) Vgl. Tschebyscheff, Sur la coupe des vêtements. Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Paris (1878), S. 154. Ferner: A. Voss, Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Math. Annalen **19** (1882), S. 1 — Voss bezeichnet diese in Rede stehenden infinitesimalen Tschebyscheffnetze zum Unterschied von den gewöhnlichen inf. Rhombennetzen als äquidistante Rhombennetze. Bei den inf. Tschebyscheffnetzen ist die „Seitenlänge" der Rhomben konstant, bei den gewöhnlichen inf. Rhombennetzen dagegen nicht.

[2]) Vgl. Bieberbach, Über Tschebyscheffsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten. Sitzungsber. d. Preuß. Akademie (1926), S. 294.

fragen nun, ob im Falle $\Delta s \to 0$, d. h. für ein infinitesimales Tschebyscheffnetz mit inf. Randkräften, sich Fläche, Netz und Randkräfte so bestimmen lassen, daß in allen Flächenpunkten die von dem Netz auf die Fläche ausgeübten Druckkräfte Null werden. Dann ist die starre Fläche als widerstandgebender Träger für das Netz zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts entbehrlich; das in den Flächenrand eingespannte Fadennetz erzeugt für sich allein ein „Fadenmodell" der nämlichen Fläche[3]).

2. Die gesuchte Fläche habe nun die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung E, F, G; L, M, N und sei in einem u/v-Bereich — im Sinne der Differentialgeometrie — regulär. Unser inf. Tschebyscheff-Fadennetz stellt auf der Fläche ein Kurvennetz dar, dessen beide Kurvenscharen aus den Parameterlinien u/v bestehen sollen, also topologisch in zwei Parallelenscharen eines entsprechenden, ebenen u/v-Bereiches abbildbar seien.

Wir betrachten zunächst ein Kurvennetz aus zwei Folgen diskret aufeinanderfolgender Parameterlinien, dessen topologisches Bild in der u/v-Ebene ein geradliniges Rhombennetz von der Maschenweite Δt ist. Ferner ersetzen wir dieses Kurvennetz durch ein Sehnennetz, das wir wieder in der angegebenen Weise durch verknotete und gespannte Fäden realisiert denken, und fragen nach den Gleichgewichtsbedingungen in seinen Knotenpunkten.

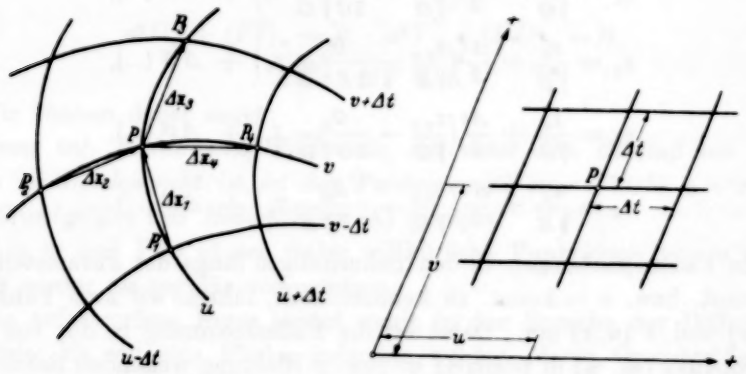

Fig. 1.

Zu einem Knotenpunkt P des Sehnenetzes gehören vier Nachbarknotenpunkte P_i $(i = 1, .., 4)$ (vgl. Fig. 1). Sind $\Delta \mathfrak{x}_i$ die P mit

[3]) Vgl. auch S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Band VI (1899), S. 45.

P_i verbindenden Sehnenvektoren und $\Delta s_i = \sqrt{\Delta \mathfrak{x}_i^2}$ ihre Beträge, so ist:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathfrak{x}_1 &= \Delta t\Big(\mathfrak{x}_v - \frac{\Delta t}{2}\mathfrak{x}_{vv} + \Delta t^2(..)\Big),\\
\Delta \mathfrak{x}_2 &= \Delta t\Big(\mathfrak{x}_u - \frac{\Delta t}{2}\mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^2(..)\Big),\\
\Delta \mathfrak{x}_3 &= \Delta t\Big(\mathfrak{x}_v + \frac{\Delta t}{2}\mathfrak{x}_{vv} + \Delta t^2(..)\Big),\\
\Delta \mathfrak{x}_4 &= \Delta t\Big(\mathfrak{x}_u + \frac{\Delta t}{2}\mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^2(..)\Big);
\end{aligned}$$

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned}
\Delta s_1 &= \Delta t\Big(\sqrt{G} - \Delta t\frac{G_v}{4\sqrt{G}} + \Delta t^2(..)\Big),\\
\Delta s_2 &= \Delta t\Big(\sqrt{E} - \Delta t\frac{E_u}{4\sqrt{E}} + \Delta t^2(..)\Big),\\
\Delta s_3 &= \Delta t\Big(\sqrt{G} + \Delta t\frac{G_v}{4\sqrt{G}} + \Delta t^2(..)\Big),\\
\Delta s_4 &= \Delta t\Big(\sqrt{E} + \Delta t\frac{E_u}{4\sqrt{E}} + \Delta t^2(..)\Big).
\end{aligned}$$

Sind ferner $\mathfrak{e}_i = \frac{\Delta \mathfrak{x}_i}{\Delta s_i}$ vier Einheitsvektoren in Richtung dieser Sehnenvektoren, so ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_1 &= \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} - \frac{\Delta t}{2}\Big(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v}{2G\sqrt{G}}\mathfrak{x}_v\Big) + \Delta t^2(..),\\
\mathfrak{e}_2 &= \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} - \frac{\Delta t}{2}\Big(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u}{2E\sqrt{E}}\mathfrak{x}_u\Big) + \Delta t^2(..),\\
\mathfrak{e}_3 &= \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\Delta t}{2}\Big(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v}{2G\sqrt{G}}\mathfrak{x}_v\Big) + \Delta t^2(..),\\
\mathfrak{e}_4 &= \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2}\Big(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u}{2E\sqrt{E}}\mathfrak{x}_u\Big) + \Delta t^2(..).
\end{aligned}$$

Um die Fadenspannungen in den Sehnenzügen längs der Parameterkurven v = konst. bzw. u = konst. zu kennzeichnen, führen wir zwei Funktionen $U(u, v)$ und $V(u, v)$ ein. Dabei sei die Fadenspannung in der von einem Knotenpunkt (u_0, v_0) in positiver u- bzw. v-Richtung weisenden Sehne durch den Wert $\Delta t\, U(u_0, v_0)$ bzw. $\Delta t\, V(u_0, v_0)$ gegeben. Es ergeben sich also in den Sehnen $\Delta \mathfrak{x}_i$ die folgenden Fadenspannungen:

$$\begin{aligned}
\Delta k_1 &= \Delta t\, V(u,\ v - \Delta t) = \Delta t\,(V - \Delta t V_v + \Delta t^2(..)),\\
\Delta k_2 &= \Delta t\, U(u - \Delta t,\ v) = \Delta t\,(U - \Delta t U_u + \Delta t^2(..)),\\
\Delta k_3 &= \Delta t\, V(u, v) = \Delta t V,\\
\Delta k_4 &= \Delta t\, U(u, v) = \Delta t U.
\end{aligned}$$

Damit nun in dem Knotenpunkt P Gleichgewicht herrscht, muß die Vektorsumme der vier angreifenden Kräfte verschwinden. Wir erhalten somit als Gleichgewichtsbedingung:

$$-\Delta k_1 \mathfrak{e}_1 - \Delta k_2 \mathfrak{e}_2 + \Delta k_3 \mathfrak{e}_3 + \Delta k_4 \mathfrak{e}_4 = 0,$$

d. h.

$$\left\{\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{E_u}{2E\sqrt{E}}\mathfrak{x}_u\right)U + \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}}U_u + \left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{G_v}{2G\sqrt{G}}\mathfrak{x}_v\right)V + \frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}}V_v\right\} + \\ + \Delta t(..) = 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die inneren Produkte mit drei nicht komplanaren Vektoren, etwa den Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und dem Flächennormalenvektor $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ verschwinden, wenn also die drei folgenden Beziehungen gelten:

$$\left\{\sqrt{EG}\,U_u - \frac{1}{2G}(FG_v + GG_u - 2GF_v)V + FV_v\right\} + \Delta t(..) = 0,$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\sqrt{EG}\,V_v - \frac{1}{2E}(FE_u + EE_v - 2EF_u)U + FU_u\right\} + \Delta t(..) = 0,$$

$$\left(\frac{L}{\sqrt{E}}U + \frac{N}{\sqrt{G}}V\right) + \Delta t(..) = 0.$$

Wir führen nun unser Sehnennetz in ein inf. Tschebyscheffnetz über: Für $\Delta t \to 0$ wird dann $\Delta s_i/\Delta t \to a$, wobei a eine Konstante ist. Die Gleichungen (I) und (II) liefern:

$$E = G = a^2 \neq 0,$$

$$\text{(A)}\qquad a^2 U_v + (FV)_v = 0, \quad a^2 V_v + (FU)_u = 0,$$

$$LU + NV = 0.$$

Wir können daher sagen:

Unser inf. Tschebyscheff-Fadennetz, das unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht ist, ist das Parameternetz einer Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, *deren Grundgrößen den Bedingungen* (A) *genügen.*

$U(u, v)$ und $V(u, v)$ sind dabei willkürliche Funktionen von u und v, die wir wieder als regulär voraussetzen.

Die aufgeworfene Frage lautet somit in der Sprache der Differentialgeometrie: Es soll eine Fläche gefunden werden, deren Grundgrößen den Bedingungen (A) genügen.

II. Netze mit isotroper Spannungsverteilung.

1. Unter unseren im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzen betrachten wir nun im folgenden diejenigen speziellen Netze, bei denen in jedem Knotenpunkt die beiden hindurchgehenden Fäden gleiche Spannung besitzen, also $U(u, v) \equiv V(u, v)$ ist. Solche Netze bezeichnen wir als *Netze mit isotroper Spannungsverteilung.*

2. Für $U \equiv V$ lauten die Bedingungsgleichungen (A):

$$E = G = a^2, \quad L = -N,$$

$$(')\qquad a^2 U_u + (FU)_v = 0, \quad a^2 U_v + (FU)_u = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen (*) erhält man durch partielles Differentiieren nach u und v und paarweises Subtrahieren der neuen Gleichungen:

$$\begin{array}{ll|ll} a^2 U_{uu} + (FU)_{uv} = 0, & & a^2 U_{uv} + (FU)_{vv} = 0, & \\ a^2 U_{vv} + (FU)_{uv} = 0, & \text{bzw.} & a^2 U_{uv} + (FU)_{uu} = 0, & \\ \hline U_{uu} - U_{vv} = 0; & & (FU)_{uu} - (FU)_{vv} = 0. & \end{array}$$

Die sich hieraus ergebenden Funktionen

$$U = \bar{P}(u+v) + \bar{Q}(u-v), \quad FU = \bar{R}(u+v) + \bar{S}(u-v),$$

worin $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$, $\bar{S}$ willkürliche Funktionen der angegebenen Argumente sind. liefern in die beiden Gleichungen (*) eingesetzt:

$$a^2(\bar{P}' + \bar{Q}') + \bar{R}' - \bar{S}' = 0, \quad a^2(\bar{P}' - \bar{Q}') + \bar{R}' + \bar{S}' = 0,$$

woraus

$$\bar{R} = -a^2(\bar{P} - C_1),$$
$$\bar{S} = a^2(\bar{Q} + C_2)$$

mit den willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 folgt. Wir erhalten somit:

$$F = \frac{\bar{R}(u+v) + \bar{S}(u-v)}{\bar{P}(u+v) + \bar{Q}(u-v)} = a^2 \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)},$$

wenn wir noch zur Abkürzung $\bar{Q} + \frac{1}{2}(C_1 + C_2) = Q$, $\bar{P} - \frac{1}{2}(C_1 + C_2) = P$ setzen.

Zusammenfassend können wir sagen:

Unser im Gleichgewicht befindliches inf. Tschebyscheff-Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung ist das Parameternetz einer Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ *mit den Grundgrößen*:

$$(B)\qquad E = G = a^2, \quad F = a^2 \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)}, \quad L = -N,$$

wobei P und Q willkürliche Funktionen der angegebenen Argumente sind.

3. *Führen wir als neue Parameterlinien* u_1/v_1 *die Diagonalkurven* (= *Winkelhalbierenden*) *des Tschebyscheffnetzes ein*, setzen wir also $u + v = u_1$, $u - v = v_1$ und versehen die neuen Grundgrößen mit dem Zeiger 1, *so gehen die Gleichungen* (B) *in die folgenden Gleichungen* (B_1) *über*:

$$(B_1)\qquad E_1 = \frac{a^2 Q(v_1)}{P(u_1) + Q(v_1)}, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = \frac{a^2 P(u_1)}{P(u_1) + Q(v_1)},$$
$$L_1(u_1, v_1) = -N_1(u_1, v_1),$$

wobei jetzt P und Q willkürliche Funktionen der angegebenen Argumente sind.

4. Aus dem Ausdruck für das Gaußsche Krümmungsmaß

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{L^2 + M^2}{EG - F^2} < 0$$

folgt, daß *die gesuchten Flächen* (von dem trivialen Fall der Ebene abgesehen) *stets negativ gekrümmt* sind.

III. Drehnetze mit isotroper Spannungsverteilung.

Ergebnis: a) Trägerfläche = Drehfläche konstanter negativer Krümmung,
b) Netzlinien = Schmiegtangentenkurven.

1. Wir fragen nach im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzen, die zugleich *Drehnetze* sind. Als Drehnetze bezeichnen wir Netze aus zwei Kurvenscharen, für welche die Kurven jeder Schar mitsamt den auf ihnen befindlichen Netzknotenpunkten durch Drehung um eine für beide Scharen gemeinsame Achse auseinander hervorgehen. Hieraus folgt, daß die Trägerfläche eines Drehnetzes eine Drehfläche ist, deren Breitenkreise die eine Schar der Diagnoalkurven des Netzes darstellen. Da nun bei einem Tschebyscheffnetz die beiden Scharen von Diagonalkurven orthogonal sind, bestehen bei einem Tschebyscheff-Drehnetz die Diagonalkurven aus den Breitenkreisen und Meridianen der Trägerdrehfläche. Fordern wir jetzt, daß unser Tschebyscheff-Drehnetz ein im Gleichgewicht befindliches Fadennetz darstellt, und führen wir auf seiner Trägerdrehfläche sein Diagonalnetz (Breitenkreise und Meridiane) als Parameternetz ein, dann müssen die Grundgrößen der Fläche den Bedingungen (B_1) genügen.

2. Eine beliebige Drehfläche kann in Zylinderkoordinaten (φ, r, z) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \varphi &= u_1, \\ r &= r(v_1). \\ z &= z(v_1). \end{aligned}$$

Die Parameterlinien $u_1 = \text{konst.}$ $(0 \leqq u_1 < 2\pi)$ bzw. $v_1 = \text{konst.}$ $(0 < r)$ sind die Meridiane bzw. Breitenkreise der Drehfläche; ihre Meridiankurve stellt sich in der Form $r = r(v_1)$, $z = z(v_1)$ dar, hat also die Gleichung $z = f(r)$. Die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung sind:

$$E_1 = r^2, \qquad F_1 = 0, \qquad G_1 = r'^2 + z'^2,$$

$$L_1 = \frac{-rz'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}, \qquad M_1 = 0, \qquad N_1 = \frac{r''z' - r'z''}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}.$$

3. Die Grundgrößen der gesuchten Drehfläche müssen nun den Bedingungen (B_1) genügen, also:

$$\frac{a^2 Q(v_1)}{P(u_1) + Q(v_1)} = r^2(v_1), \qquad \frac{a^2 P(u_1)}{P(u_1) + Q(v_1)} = r'^2(v_1) + z'^2(v_1),$$

$$-r(v_1)\, z'(v_1) = -r''(v_1)\, z'(v_1) + r'(v_1)\, z''(v_1),$$

woraus neben $P(u_1) \equiv$ konst. folgt:

$$r^2 + r'^2 + z'^2 = a^2,$$
$$rz' - r''z' + r'z'' = 0.$$

Aus diesen beiden simultanen Differentialgleichungen für $r(v_1)$ und $z(v_1)$ erhält man durch Integration (mit der Integrationskonstanten c)

$$\frac{dr}{dv_1} = \sqrt{(a^2 - r^2)\left(1 - c\,(a^2 - r^2)\right)},$$
$$\frac{dz}{dv_1} = \sqrt{c}\,(a^2 - r^2)$$

und hieraus durch Elimination von v_1 die Gleichung $z = f(r)$ der Meridiankurve der gesuchten Drehfläche:

$$z = \int \sqrt{\frac{c\,(a^2 - r^2)}{1 - c\,(a^2 - r^2)}}\,dr.$$

Hierbei wurde von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten, die nur eine Parallelverschiebung der Meridiankurve in Richtung der Drehachse bedeutet, abgesehen. Bilden wir nun das Gaußsche Krümmungsmaß

$$K = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2}$$

für die Drehfläche mit dieser Meridiankurve, so wird wegen $L_1 = -N_1$

$$K = -\frac{z'^2}{(r'^2 + z'^2)^2} = -c.$$

Da bereits gezeigt wurde (vgl. S. 71), daß die gesuchten Flächen negativ gekrümmt sein müssen, können wir $c = k^2$ setzen. Wir haben somit das Ergebnis: *Die Trägerflächen der Drehnetze, die zugleich im Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze sind, sind Drehflächen konstanter negativer Krümmung*; dabei ist a der Radius des Rückkehrkreises.

4. Wir untersuchen die *Formmannigfaltigkeit* der erhaltenen *Drehflächen* konstanter negativer Krümmung. Wir wollen im folgenden nur die formverschiedenen Flächen betrachten und die zu ihnen ähnlichen Flächen von der Betrachtung ausschließen. Hierzu setzen wir den Radius des Rückkehrkreises $a = 1$. Die Gleichung der Meridiankurve lautet dann:

$$z = k \int \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 - k^2\,(1 - r^2)}}\,dr.$$

Für $k^2 > 1$ erhält man den sogenannten *Hyperboloidtypus*, für $k^2 < 1$ den *Kegeltypus der Drehflächen konstanter negativer Krümmung* und für $k^2 = 1$ die *Pseudosphäre*.

5. Wir fragen nach der *Art* und nach der *Mannigfaltigkeit* der auf den Drehflächen konstanter negativer Krümmung gelegenen *Drehnetze*, die im

Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze sind. Wir machen durch die Parametertransformation

$$u_1 = u + v, \quad v_1 = u - v$$

das Drehnetz zum Parameternetz. Dann werden wegen $L_1 + N_1 = 0 = M_1$ die zugehörigen Grundgrößen zweiter Ordnung $L(u, v) \equiv N(u, v) \equiv 0$, d. h. das gesuchte Drehnetz ist das *Netz der Schmiegtangentenkurven*.

6. Wir haben somit das folgende Ergebnis:

Die einzigen Drehnetze, die zugleich im Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze darstellen, sind die Netze der Schmiegtangentenkurven auf den Drehflächen konstanter negativer Krümmung. Umgekehrt ist auch jede Drehfläche konstanter negativer Krümmung die Trägerfläche eines Drehnetzes, das ein im Gleichgewicht befindliches Tschebyscheff-Fadennetz darstellt und folglich aus den Schmiegtangentenkurven der Drehfläche besteht.

Zur Veranschaulichung der auf den drei verschiedenen Typen von Drehflächen konstanter negativer Krümmung gelegenen Tschebyscheff-Fadennetze dienen die in Fig. 2 bis 4 abgebildeten Modelle.

IV. Unität der Drehnetze mit isotroper Spannungsverteilung.

a) Drehnetze als einzige im Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze auf Flächen konstanter negativer Krümmung.

1. Wir fragen, ob eine allgemeine Fläche konstanter negativer Krümmung die Trägerfläche eines im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzes sein kann. Führen wir das Netz der Diagonalkurven des Tschebyscheffnetzes als Parameternetz ein, so haben wir die Bedingungsgleichungen

$$(B_1) \quad E_1 = \frac{a^2 Q(v_1)}{P(u_1) + Q(v_1)}, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = \frac{a^2 P(u_1)}{P(u_1) + Q(v_1)}, \quad L_1 = -N_1,$$

und die Beziehung

$$K = -\frac{L_1^2 + M_1^2}{E_1 G_1} = -k^2$$

zu erfüllen, wo k eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Damit es nun überhaupt eine Fläche gibt, deren Grundgrößen diesen Bedingungen genügen, müssen die Grundgleichungen erfüllt sein.

2. Für die angegebenen Grundgrößen lautet das Gaußsche Theorema egregium:

$$(1) \quad P\left(2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2}\right) + Q\left(2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2}\right) + \\ + P\left(2\frac{P''}{P} - 3\frac{P'^2}{P^2} - 4a^2k^2\right) + Q\left(2\frac{Q''}{Q} - 3\frac{Q'^2}{Q^2} - 4a^2k^2\right) = 0.$$

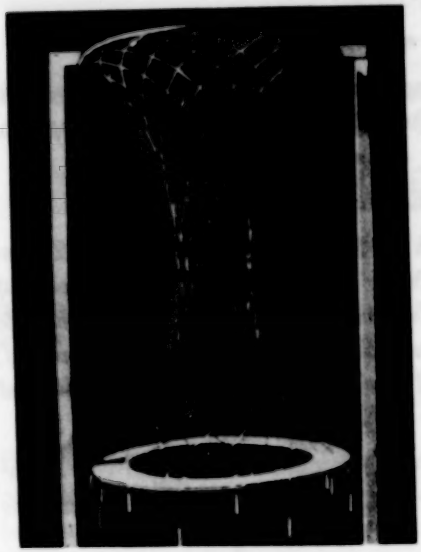

Fig. 2.

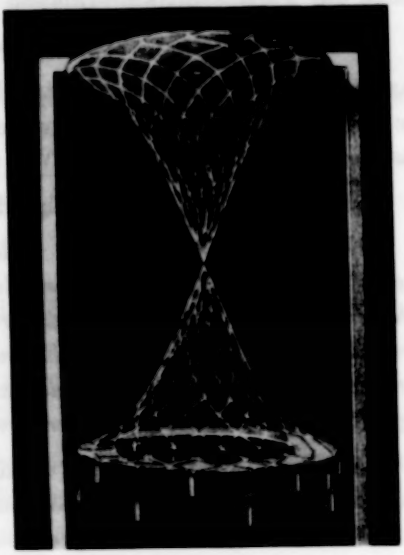

Fig. 3.

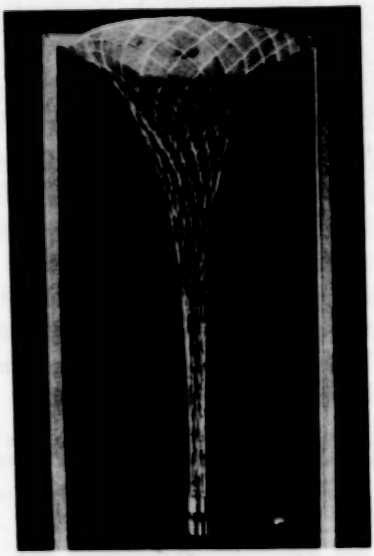

Fig. 4.

wobei $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ ist. Setzt man für

$$2\frac{P''}{P} - \frac{P'^2}{P^2} = A(u_1), \qquad 2\frac{Q''}{Q} - \frac{Q'^2}{Q^2} = B(v_1),$$

$$2\frac{P'^2}{P^2} + 4a^2k^2 = A_1(u_1), \quad 2\frac{Q'^2}{Q^2} + 4a^2k^2 = B_1(v_1).$$

so nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$PB + QA + P(A - A_1) + Q(B - B_1) = 0,$$

und liefert, nach u_1, nach v_1 und nach u_1 und v_1 differentiiert, die Gleichungen:

(2a) $$P'B + QA' + (P(A - A_1))' = 0,$$

(2b) $$PB' + Q'A + (Q(B - B_1))' = 0,$$

(3) $$P'B' + Q'A' = 0.$$

Aus der Gleichung (3) folgt

$$A' = -cP' \quad B' = cQ'.$$

hieraus weiter durch Integration

$$A = -cP + c_1, \quad B = cQ + c_2,$$

und schließlich durch Einsetzen in die Gleichungen (2a) und (2b):

(4) $$P'(-c_1 + c_2 - 4a^2k^2) = 0, \quad Q'(c_1 - c_2 - 4a^2k^2) = 0,$$

wobei c, c_1 und c_2 Konstante sind. Bei der Diskussion der Gleichungen (4) müssen wir drei Fälle unterscheiden:

1) $-c_1 + c_2 = 4a^2k^2$ und $+c_1 - c_2 = 4a^2k^2$, d. h. $a^2k^2 = 0$. Wegen der Voraussetzungen $a \neq 0$ und $k \neq 0$ scheidet dieser Fall als unmöglich aus.

2) $P' \equiv Q' \equiv 0$, d. h. $P = C = \text{konst.}$ und $Q = \overline{C} = \text{konst.}$ Für diese Werte von P und Q lautet Gleichung (1) $a^2k^2(C + \overline{C}) = 0$. Wegen der Voraussetzungen $P = C \neq 0$ $Q = \overline{C} \neq 0$ und $E_1G_1 - F_1^2 = \frac{a^2C\overline{C}}{(C+\overline{C})^2} > 0$ kann der Faktor $C + \overline{C}$ nicht verschwinden. Dieser Fall scheidet daher auch als unmöglich aus.

3) entweder $P' \equiv 0$, $+c_1 - c_2 = 4a^2k^2$ und $Q' \neq 0$
oder $Q' \equiv 0$, $-c_1 + c_2 = 4a^2k^2$ und $P' \neq 0$.

was aber gleichbedeutend ist und besagt, daß die Grundgrößen E_1 und G_1 nur Funktionen des einen Parameters sind.

Wir nehmen jetzt $Q' \neq 0$ und $P = C = \text{konst.}$ an, wobei nach Voraussetzung $C \neq 0$ ist, und erhalten für die gesuchte Fläche die Grundgrößen:

(5) $$E_1 = \frac{a^2Q}{C+Q}, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = \frac{a^2C}{C+Q}, \quad L_1 = -N_1$$

mit der Nebenbedingung

(6) $$L_1^2 + M_1^2 = k^2a^4\frac{CQ}{(C+Q)^3},$$

aus der durch partielle Differentiation nach u_1 folgt:

$$\frac{1}{M_1}\frac{\partial L_1}{\partial u_1}+\frac{1}{L_1}\frac{\partial M_1}{\partial u_1}=0. \tag{7}$$

3. Für die zuletzt angegebenen Grundgrößen lauten die Codazzi-Mainardischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial v_1}-\frac{\partial M_1}{\partial u_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}\frac{C-Q}{C+Q},\\&-\frac{1}{M_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_1}+\frac{\partial M_1}{\partial v_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Durch Addition der Gleichungen (7) und (8) erhält man

$$\frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial v_1}-\frac{1}{M_1}\frac{\partial M_1}{\partial v_1}=\frac{CQ'}{Q(C+Q)},$$

woraus durch Integration folgt

$$\frac{L_1}{M_1}=\frac{Q}{C+Q}\frac{1}{T}; \tag{9}$$

T ist hier eine willkürliche Funktion von u_1. Aus den Gleichungen (6) und (9) erhalten wir nun

$$L_1=ka^2\frac{Q}{C+Q}\sqrt{\frac{CQ}{Q^2+T^2(C+Q)^2}},\qquad M_1=ka^2T\sqrt{\frac{CQ}{Q^2+T^2(C+Q)^2}}, \tag{10}$$

und schließlich nach Einsetzen in die Gleichungen (8):

$$Q^2T'=CT^2Q'. \tag{11}$$

Bei der Diskussion der Gleichungen (11) müssen wir drei Fälle unterscheiden:

1) $Q\equiv 0$ widerspricht der Voraussetzung $Q'\neq 0$.

2) $\frac{CQ'}{Q^2}=\frac{T'}{T^2}=$ konst. Aus der hieraus folgenden Gleichung $CQ'=$ konst. $\cdot Q^2$ und dem Gaußschen Theorema egregium [Gleichung (1) mit $P=C$] ergibt sich $Q=$ konst., was abermals der Voraussetzung $Q'\neq 0$ widerspricht.

3) $T\equiv 0$. In diesem Fall ergeben sich für die gesuchte Fläche die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung [Gleichungen (5) und (10)] als Funktionen des *einen* Parameters v_1 und zwar:

$$E_1=\frac{a^2Q}{C+Q},\qquad F_1=0,\quad G_1=\frac{a^2C}{C+Q},$$

$$L_1=ka^2\frac{Q}{C+Q}\sqrt{\frac{C}{Q}},\quad M_1=0,\quad N_1=-ka^2\frac{Q}{C+Q}\sqrt{\frac{C}{Q}}.$$

4. Da *sämtliche* Grundgrößen nur Funktionen *eines* Parameters sind und da zugleich $F_1=M_1=0$ ist, stellt die gesuchte Fläche konstanter negativer Krümmung eine *Drehfläche* dar, deren Paramete netz aus den Meridianen und Breitenkreisen besteht. Falls also eine beliebige Fläche konstanter negativer Krümmung die Trägerfläche eines im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzes sein soll, muß sie speziell eine Drehfläche sein; ihre Meridiane und Breitenkreise müssen das Diagonalnetz des Tschebyscheff-Fadennetzes darstellen, d. h. das Tschebyscheff-Fadennetz

muß ein Drehnetz sein. Andererseits wurde bereits in Kap. III gezeigt, daß es unter den im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzen tatsächlich Drehnetze gibt; sie haben als Trägerflächen Drehflächen konstanter negativer Krümmung und bestehen aus deren Schmiegtangentenkurven.

Wir können somit zusammenfassend aussagen:

Die einzigen im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetze, deren Trägerflächen konstante negative Krümmung besitzen, sind die Drehnetze aus den Schmiegtangentenkurven der Drehflächen konstanter negativer Krümmung.

b) Drehnetze als einzige im Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze aus den Schmiegtangentenkurven ihrer Trägerflächen.

1. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen die Netze ihrer Schmiegtangentenkurven im Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze darstellen. Da sich nach Voss[1]) die Schmiegtangentenkurven nur auf den Flächen konstanter negativer Krümmung zu einem Tschebyscheffnetz anordnen lassen, und da nach Kap. IVa die einzigen im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetze, deren Trägerflächen konstante negative Krümmung besitzen, Drehnetze sind, müssen die im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetze aus Schmiegtangentenkurven Drehnetze sein, deren Trägerflächen konstante negative Krümmung besitzen. Andererseits wurde bereits in Kap. III gezeigt, daß die Drehnetze auf den Flächen konstanter negativer Krümmung, die zugleich im Gleichgewicht befindliche Tschebyscheff-Fadennetze sind, tatsächlich aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerflächen bestehen.

Wir können somit zusammenfassen:

Die einzigen im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetze, deren Netzlinien Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche sind, sind die Drehnetze auf den Drehflächen konstanter negativer Krümmung.

Zusammenfassung.

Wir können die Ergebnisse der Kap. III, IVa und IVb zu folgendem Satz vereinigen:

Unter den im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung befinden sich solche mit den drei folgenden Eigenschaften:

1) *Die Netze sind Drehnetze.*
2) *Die Trägerflächen besitzen konstante negative Krümmung.*
3) *Die Netze bestehen aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerflächen.*

Aus jeder dieser drei Eigenschaften folgen die beiden übrigen Eigenschaften.

(Eingegangen am 29. Juni 1940.)

Über die Ableitungsgleichungen einer Mannigfaltigkeit im mehrdimensionalen komplexen euklidischen Raum.

Von

Josef Lense in München.

§ 1.

Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen.

Die Theorie der Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen (Gleichungen von Gauss und Codazzi-Mainardi) einer Fläche des gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raumes wurde von G. Ricci [1]) auf den Fall einer m-dimenionalen Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen euklidischen Raum verallgemeinert, allerdings unter der Einschränkung, daß der Rang des quadrierten Bogenelementes der Mannigfaltigkeit gleich m ist. Im folgenden soll diese Voraussetzung fallen gelassen werden und der diesen Untersuchungen zugrunde liegende Gedankengang vollkommen allgemein im komplexen n-dimensionalen euklidischen Raum klargelegt werden.

Die Mannigfaltigkeit V_m sei in der Umgebung eines ihrer Punkte P durch die Gleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

gegeben, wo der Vektor $\mathfrak{x}$ eine analytische Funktion der komplexen Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in der Umgebung von P ist. Der Rang der Funktionalmatrix $\left\| \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \right\|$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ ist also in der genannten Umgebung gleich m. Wir ordnen dem Punkt P ein n-Bein zu, bestehend aus den n linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{y}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, wobei auch die $\mathfrak{y}_\nu$ analytische Funktionen der u_α in der Umgebung von P sind. Dann ist

$$\mathfrak{y}_\lambda \mathfrak{y}_\mu = B_{\lambda\mu} = B_{\mu\lambda} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

und

$$\text{Det.} |B_{\lambda\mu}| \neq 0.$$

Die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{y}_\nu$ müssen sich linear homogen durch die $\mathfrak{y}_\nu$ darstellen lassen, also ist

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_\lambda}{\partial u_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} C^\nu_{\lambda\alpha} \mathfrak{y}_\nu \qquad \text{(Ableitungsgleichungen).} \tag{2}$$

[1]) G. Ricci, Lincei Rend. Rom. (4) 4, II (1888), S. 203–207.

Aus (1) und (2) erhält man

$$\frac{\partial B_{\lambda\mu}}{\partial u_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} (C^\nu_{\lambda\alpha} B_{\nu\mu} + C^\nu_{\mu\alpha} B_{\nu\lambda}). \tag{3}$$

Differenziert man (2) nach u_β ($\beta = 1, 2, \ldots, m$), so folgt mit Hilfe von (2)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{y}_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial C^\nu_{\lambda\alpha}}{\partial u_\beta} \mathfrak{y}_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} C^\nu_{\lambda\alpha} C^\mu_{\nu\beta} \mathfrak{y}_\mu$$

und durch Vertauschung von α und β

$$\frac{\partial C^\mu_{\lambda\alpha}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial C^\mu_{\lambda\beta}}{\partial u_\alpha} + \sum_{\nu=1}^{n} (C^\nu_{\lambda\alpha} C^\mu_{\nu\beta} - C^\nu_{\lambda\beta} C^\mu_{\nu\alpha}) = 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen (4) sind die Integrabilitätsbedingungen des Systems (2). Setzt man

$$\sum_{\nu=1}^{n} (C^\nu_{\lambda\alpha} C^\mu_{\nu\beta} - C^\nu_{\lambda\beta} C^\mu_{\nu\alpha}) = -F^\mu_{\lambda\alpha\beta} = F^\mu_{\lambda\beta\alpha}, \tag{5}$$

so kann man (4) auch schreiben

$$\frac{\partial C^\mu_{\lambda\alpha}}{\partial u_\beta} = \frac{\partial C^\mu_{\lambda\beta}}{\partial u_\alpha} + F^\mu_{\lambda\alpha\beta}. \tag{6}$$

Differenziert man (6) nach u_γ ($\gamma = 1, 2, \ldots, m$), vertauscht dann β mit γ und verwendet wieder (6), so ergeben sich die Integrabilitätsbedingungen von (6) zu

$$\frac{\partial F^\mu_{\lambda\beta\gamma}}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial F^\mu_{\lambda\gamma\alpha}}{\partial u_\beta} + \frac{\partial F^\mu_{\lambda\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = 0$$

und diese sind zufolge (5), wie eine längere, aber einfache Rechnung lehrt, immer erfüllt.

§ 2.

Bestimmung der Mannigfaltigkeit bis auf ihre Lage.

Es seien nun die $B_{\lambda\mu}$ mit Det. $|B_{\lambda\mu}| \neq 0$ und $C^\nu_{\lambda\alpha}$ als willkürliche analytische Funktionen der u_α in der Umgebung von P gegeben, so daß die Gleichungen (3) und (4) erfüllt sind. Dann kann man die Gleichungen (2) eindeutig lösen, wobei noch die Werte der $\mathfrak{y}_\nu$ in P willkürlich bleiben. Diese seien so gewählt, daß in P die Gleichungen (1) gelten. Die so erhaltenen Funktionen $\mathfrak{y}_\nu$ befriedigen die Gleichungen (1) überall in der Umgebung von P. Denn es ist zufolge (3)

$$\frac{\partial (\mathfrak{y}_\lambda \mathfrak{y}_\mu - B_{\lambda\mu})}{\partial u_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} [C^\nu_{\mu\alpha} (\mathfrak{y}_\lambda \mathfrak{y}_\nu - B_{\lambda\nu}) + C^\nu_{\lambda\alpha} (\mathfrak{y}_\mu \mathfrak{y}_\nu - B_{\mu\nu})]. \tag{7}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen (7) sind durch ihre Werte im Punkte P eindeutig bestimmt. Da diese Null sind und Null eine Lösung von (7) ist, hat (7) nur die Lösung Null, womit die Behauptung erwiesen ist. Die so erhaltenen Vektoren $\mathfrak{y}_\nu$ sind linear unabhängig, denn aus $\sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \mathfrak{y}_\lambda = 0$ würde durch Multiplikation mit $\mathfrak{y}_u$ wegen Det. $|B_{\lambda u}| \neq 0$ das Verschwinden sämtlicher c_λ folgen. Wie schon erwähnt, müssen die Werte der $\mathfrak{y}_\nu$ in P so gewählt werden, daß die Gleichungen (1) erfüllt sind. Aus einer solchen Lösung erhält man alle übrigen durch eine orthogonale Substitution[2]), die Werte in P sind also bis auf Drehungen und Spiegelungen willkürlich.

Wählt man für die ersten m der $\mathfrak{y}_\nu$ die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta}$, also m linear unabhängige Vektoren, die den Tangential-R_m der V_m aufspannen, so hat man nach (2)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} C^\nu_{\beta\alpha} \mathfrak{y}_\nu ,$$

also

$$C^\nu_{\alpha\beta} = C^\nu_{\beta\alpha}. \tag{8}$$

Befriedigen die $C^\nu_{\lambda\alpha}$ auch noch die Gleichungen (8), so lassen sich die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta} = \mathfrak{y}_\beta \tag{9}$$

eindeutig lösen, wenn man die Werte von $\mathfrak{x}$ in P willkürlich wählt, weil die Integrabilitätsbedingungen von (9) wegen (8) erfüllt sind.

Sind somit die $B_{\lambda u}$ mit Det. $|B_{\lambda u}| \neq 0$ *und die $C^\nu_{\lambda\alpha}$ als willkürliche analytische Funktionen der u_α in der Umgebung von P gegeben, wobei diese Funktionen die Gleichungen* (3), (4) *und* (8) *erfüllen, so ist dadurch die Mannigfaltigkeit V_m bis auf ihre Lage, d. h. bis auf Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen bestimmt.* Die Integrabilitätsbedingungen (4) und (8) sind die Verallgemeinerung der Gleichungen von Gauss und Codazzi-Mainardi.

Für $m = 1$ (Kurven) fallen die Gleichungen (4) und (8) weg. Wählt man $\mathfrak{y}_\nu = \frac{d^\nu \mathfrak{x}}{d u^\nu}$, so kann man die C^ν_λ berechnen und erhält eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet[2]).

§ 3.

Isotrope Mannigfaltigkeiten.

Das Bogenelement der V_m ist durch $ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$ gegeben, wobei

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta} \tag{10}$$

[2]) J. Lense, Boll. Un. mat. Ital. (2) **2** (1940), S. 227–230.

ist. k sei der Rang der Determinante $|g_{\alpha\beta}|$. *Dann wollen wir die Mannigfaltigkeit isotrop vom Rang k nennen.* Ein Punkt des Tangential-R_m in P ist durch $\mathfrak{x} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} z_\alpha$ festgelegt, wobei $\mathfrak{x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}$ in P zu nehmen sind. Das Bogenelement des Tangential-R_m ist somit nach (10) durch $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\beta}\, dz_\alpha\, dz_\beta$ gegeben. *Der Tangential-R_m ist infolgedessen isotrop vom Rang k* [3]). Durch eine passende lineare Substitution kann man diese quadratische Form auf eine Summe von k Quadraten bringen oder, geometrisch gesprochen, man kann an Stelle der den Tangential-R_m aufspannenden Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}$ andere ihn aufspannende Vektoren $\mathfrak{z}_\alpha$ wählen, so daß

$$\begin{aligned} &\mathfrak{z}_1^2 = \mathfrak{z}_2^2 = \cdots = \mathfrak{z}_k^2 = 1, \\ &\mathfrak{z}_{k+1}^2 = \mathfrak{z}_{k+2}^2 = \cdots = \mathfrak{z}_m^2 = 0, \end{aligned} \qquad \mathfrak{z}_\alpha \mathfrak{z}_\beta = 0 \ (\alpha \neq \beta) \tag{11}$$

ist.

Der Normalraum in P wird durch $n - m$ linear unabhängige Lösungen $\mathfrak{n}$ der Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}\mathfrak{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{z}_\alpha \mathfrak{n} = 0 \tag{12}$$

bestimmt. Von diesen liegen genau $m - k$ zufolge (11) im Tangential-R_m, d. h. *der Normal-R_{n-m} hat mit dem Tangential-R_m einen vollisotropen R_{m-k}* [3]) *gemeinsam.*

Wegen (11) und (12) ist der Rang des quadrierten Bogenelementes des Normal-R_{n-m} höchstens $(n - m) - (m - k) = n - 2m + k$. Er kann aber auch nicht kleiner sein. Denn sonst würde es im Normal-R_{n-m} außerhalb des vollisotropen R_{m-k} einen Vektor $\mathfrak{v}$ geben, der auf allen $\mathfrak{n}$ senkrecht stünde und daher im Tangential-R_m läge, was unmöglich ist, weil Tangential- und Normalraum nur den R_{m-k} gemeinsam haben. *Der Normal-R_{n-m} ist also isotrop vom Rang $n - 2m + k$.* Man kann hiermit $n - 2m + k$ Vektoren $\mathfrak{n}_r$ so bestimmen, daß

$$\begin{aligned} &\mathfrak{n}_r \mathfrak{n}_s = \delta_{rs} \quad \text{mit} \quad \delta_{rs} = \begin{cases} 0 \text{ für } r \neq s, \\ 1 \text{ für } r = s, \end{cases} \\ &\mathfrak{n}_r \mathfrak{z}_{k+1} = \mathfrak{n}_r \mathfrak{z}_{k+2} = \cdots = \mathfrak{n}_r \mathfrak{z}_m = 0 \ (r, s = 1, 2, \ldots, n - 2m + k). \end{aligned} \tag{13}$$

Wie man leicht sieht, sind wegen (13) die Vektoren $\mathfrak{z}_\alpha$ und $\mathfrak{n}_r$ voneinander linear unabhängig und es gilt immer $k \leqq m \leqq \frac{n+k}{2}$, n.

§ 4.

Isotrope Mannigfaltigkeiten vom Rang Null.

Als Vektoren $\mathfrak{y}_r$ kann man die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}$, $\mathfrak{n}_r$ und noch $m - k$ andere Vektoren wählen. Zufolge der Beziehungen (12) und (13) werden dadurch die

[3]) J. Lense, Math. Ann. **116** (1939), S. 297–309, insbesondere S. 297 und 298.

Funktionen $B_{\lambda u}$ spezialisiert. Für $k = m$ erhält man die Untersuchungen von Ricci, den Fall $k = 0$ habe ich in einer früheren Arbeit [4]) behandelt. Das dort verwendete n-Bein erhält man von hier aus in folgender Weise:

Die $n - 2m$ Vektoren $\mathfrak{n}_r$ spannen einen R_{n-2m} auf, ein Punkt dieses Raumes ist durch $\mathfrak{x} + \sum_{r=1}^{n-2m} w_r \mathfrak{n}_r$, das Bogenelement also durch $\sum_{r=1}^{n-2m} dw_r^2$ gegeben, daher vom Rang $n - 2m$, *der R_{n-2m} infolgedessen nicht isotrop*. Der darauf normale R_{2m} möge durch die Vektoren $\mathfrak{u}_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, 2m$) aufgespannt werden. Ein Punkt dieses R_{2m} ist daher durch $\mathfrak{x} + \sum_{\varrho=1}^{2m} u_\varrho \mathfrak{u}_\varrho$, sein Bogenelement durch $\sum_{\varrho,\sigma=1}^{2m} \mathfrak{u}_\varrho \mathfrak{u}_\sigma du_\varrho du_\sigma$ gegeben. Weil die Vektoren $\mathfrak{u}_\varrho$, $\mathfrak{n}_r$ den ganzen R_n aufspannen, ist Det. $|\mathfrak{u}_\varrho \mathfrak{u}_\sigma| \neq 0$, d. h. *der R_{2m} nicht isotrop*, sein quadriertes Bogenelement vom Rang $2m$. Durch eine passende lineare Substitution, geometrisch gesprochen, durch Einführung passender Vektoren an Stelle der $\mathfrak{u}_\varrho$ kann man diese quadratische Form auf eine Summe von $2m$ Quadraten oder durch Zusammenfassung von je zwei der Quadrate und Faktorenzerlegung auf die Gestalt $\sum_{\alpha=1}^{m} dv_\alpha d\bar{v}_\alpha$ bringen. Man hat damit den R_{2m} durch $2m$ Vektoren $\mathfrak{v}_\alpha$, $\bar{\mathfrak{v}}_\alpha$ aufgespannt, die in folgender Weise normiert sind:

$$\mathfrak{v}_\alpha \mathfrak{v}_\beta = \bar{\mathfrak{v}}_\alpha \bar{\mathfrak{v}}_\beta = 0, \quad \mathfrak{v}_\alpha \bar{\mathfrak{v}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \tag{14}$$

Die Vektoren $\mathfrak{v}_\alpha$ und $\bar{\mathfrak{v}}_\alpha$ spannen also je einen vollisotropen R_m auf, der im R_{2m} liegt.

Zu jedem vollisotropen R_m des R_{2m} kann man auf unendlich viele Arten einen zweiten derartigen R_m finden, so daß die $2m$ Vektoren, welche die beiden R_m aufspannen, linear unabhängig sind. Nach Ph. Furtwängler [5]) läßt sich nämlich jeder vollisotrope R_m des R_{2m} bei passender Bezeichnung durch die Vektoren

$$\mathfrak{w}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} (b_{\alpha\beta} \mathfrak{v}_\beta + \delta_{\alpha\beta} \bar{\mathfrak{v}}_\beta), \quad b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha} = 0 \tag{15}$$

oder

$$\mathfrak{w}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m-1} (b_{\alpha\beta} \mathfrak{v}_\beta + \delta_{\alpha\beta} \bar{\mathfrak{v}}_\beta) - b_\alpha \bar{\mathfrak{v}}_m, \quad b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha \neq m, \tag{16}$$

$$\mathfrak{w}_m = \sum_{\beta=1}^{m-1} b_\beta \mathfrak{v}_\beta + \mathfrak{v}_m$$

aufspannen. Wir betrachten einen vollisotropen R_m, der durch

$$\bar{\mathfrak{w}}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} (\bar{b}_{\alpha\beta} \mathfrak{v}_\beta + \delta_{\alpha\beta} \bar{\mathfrak{v}}_\beta), \quad \bar{b}_{\alpha\beta} + \bar{b}_{\beta\alpha} = 0 \tag{17}$$

---

[4]) J. Lense, Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 721–736.
[5]) Ph. Furtwängler, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 396–400.

aufgespannt wird. Aus

$$\sum_{\alpha=1}^{m} (c_\alpha \mathfrak{w}_\alpha + \bar{c}_\alpha \bar{\mathfrak{w}}_\alpha) = 0 \tag{18}$$

erhält man nach (15) $\bar{c}_\alpha = -c_\alpha$, $\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha (b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta}) = 0$, daher $c_\alpha = \bar{c}_\alpha = 0$, wenn Det. $|b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta}| \neq 0$ ist. Da diese Determinante als schiefsymmetrische Determinante für gerades m nicht identisch verschwindet, kann man bei gegebenen $b_{\alpha\beta}$ die $\bar{b}_{\alpha\beta}$ auf unendliche viele Arten so wählen, daß die Determinante von Null verschieden ist. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen. Sind beide R_m von der Gestalt (16), so ergibt eine ähnliche Rechnung die Gleichungen $\bar{c}_\alpha = -c_\alpha$,

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta}) + c_m (b_\beta - \bar{b}_\beta) = 0 \qquad (\beta \neq m),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (b_\alpha - \bar{b}_\alpha) = 0,$$

also wieder m lineare homogene Gleichungen für die c_α mit einer schiefsymmetrischen Determinante der Ordnung m und daher durch passende Wahl der gestrichenen Größen $c_\alpha = \bar{c}_\alpha = 0$.

Ist m ungerade, so ist die Determinante identisch Null. In diesem Fall betrachten wir die beiden Räume (16) und (17). (18) liefert jetzt $\bar{c}_\alpha = -c_\alpha$ $(\alpha \neq m)$,

$$\bar{c}_m = \sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha b_\alpha, \quad c_m = \sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha \bar{b}_{\alpha m},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta}) + c_m b_\beta + \bar{c}_m \bar{b}_{m\beta} = 0 \qquad (\beta \neq m)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} c_\alpha (b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta} + b_\beta \bar{b}_{\alpha m} + b_\alpha \bar{b}_{m\beta}) = 0.$$

Die Determinante $|b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta} + b_\beta \bar{b}_{\alpha m} + b_\alpha \bar{b}_{m\beta}|$ ist schiefsymmetrisch und von gerader Ordnung, weil m ungerade ist, daher nicht identisch Null, also lassen sich, wenn (16) gegeben ist, die Koeffizienten in (17), und umgekehrt, wenn (17) gegeben ist, die von (16) so wählen, daß die Determinante nicht verschwindet, so daß wieder alle c_α und c_α Null sind. Damit ist die Behauptung allgemein bewiesen.

Man kann somit zu den Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}$, *die den vollisotropen Tangential-*R_m *aufspannen,* m *Vektoren* $\mathfrak{x}_\alpha$ *finden, die einen vollisotropen* R_m *und zusammen mit den* $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}$ *den* R_{2m} *aufspannen.* Ein Punkt des R_{2m} ist daher durch

$\mathfrak{x} + \sum_{\alpha=1}^{m} \left(x_\alpha \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} + y_\alpha \mathfrak{x}_\alpha \right)$, sein Bogenelement wegen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta} = \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta = 0$ durch $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \mathfrak{x}_\beta \, dx_\alpha \, dy_\beta$ gegeben. Setzen wir $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \mathfrak{x}_\beta = a_{\alpha\beta}$, so ist Det. $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$, weil der R_{2m} nicht isotrop, die quadratische Form also vom Rang $2m$ ist. Wir bezeichnen mit $A_{\alpha\beta}$ das durch die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ dividierte algebraische Komplement von $a_{\alpha\beta}$. Führen wir dann an Stelle der Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha$ die Vektoren $\bar{\mathfrak{x}}_\alpha$ durch $\mathfrak{x}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} a_{\beta\alpha} \bar{\mathfrak{x}}_\beta$ ein, so ist $\mathfrak{x}_u = \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_\beta$, daher $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta} = \bar{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_\beta = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha} \bar{\mathfrak{x}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Das sind aber gerade die in der Arbeit [4]) verwendeten Vektoren.

(Eingegangen am 28. Juni 1940.)

Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Es kommt nicht selten vor, daß die Elemente eines *Verbandes* eine weitere Verknüpfung, z. B. eine solche von gruppenartigem Charakter, zulassen. Derartige Verbände bieten kein besonderes Interesse, solange die beiden Verbandsverknüpfungen und die dritte Verknüpfung gänzlich *unabhängig* voneinander sind. Die Problematik setzt erst ein, wenn die Verknüpfungen aufeinander einwirken. Wir wollen in diesem Fall von *gekoppelten* Verknüpfungen sprechen. Die Koppelung der Verknüpfungen kann in mannigfacher Weise vorgenommen werden; sie vollzieht sich in den *Koppelungsaxiomen* und kann mehr oder weniger eng sein.

Im folgenden gehen wir näher auf eine bestimmte Gattung derartiger Verbände ein; vornehmlich handelt es sich um Verbände, die in der Algebra und Zahlentheorie beheimatet sind. In § 1 betrachten wir die sogenannten *Assoziative* und die $\mathfrak{A}$-*Systeme*, in § 2 die *Semigruppen* und die $\mathfrak{B}$-*Systeme*. Bei der Suche nach den zwischen den verschiedenen Axiomen und Axiomgruppen bestehenden Abhängigkeiten stößt man auf bemerkenswerte Zusammenhänge; diese finden in den Sätzen 1, 5 und 6 ihre Formulierung. Für die Anwendungen von Bedeutung sind die Relationen (5′) und (5″) in § 1 bzw. (9′) und (9″) in § 2, von denen insbesondere in der additiven Zahlentheorie Gebrauch gemacht wird. § 3 bringt Beispiele, und zwar vorwiegend solche aus der Zahlenlehre. Die Rolle der Verbandsverknüpfungen spielen dabei gewisse elementare Zahlverknüpfungen, während die dritte Verknüpfung im Gewand der gewöhnlichen Addition oder Multiplikation erscheint. Bei dieser Gelegenheit noch ein Wort über den Sinn und Wert des *Beispiels* in der Mathematik, wobei es ganz gleich ist, ob die Mathematik mit formalistischen oder intuitionistischen oder logizistischen Augen gesehen wird. Ohne Zweifel ist das Beispiel ein pädagogisches Hilfsmittel, das nicht hoch genug eingeschätzt werden kann; sein eigentlicher Wirkungsbereich ist aber nicht psychologischer, sondern logischer Natur. Als Modell liegt ihm nämlich ob, eine axiomatisch konstruierte Begriffswelt zu realisieren. Das Beispiel spricht also ein *Existentialurteil* aus; es nimmt als solches einen hohen logischen Rang ein. Seine Krönung

als Instrument logischer Fundierung erfährt das Beispiel in den klassischen Widerspruchslosigkeits- und Unabhängigkeitsbeweisen.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir hauptsächlich assoziative Verknüpfungen, die überdies *kommutativ* sind. Mit einigen Spezialfällen hat man sich schon seit längerer Zeit beschäftigt. So hat Dedekind Verbände betrachtet, die sich zugleich als *Abelsche Gruppen* präsentieren[1]), und in anderer Richtung spezialisierte *Semigruppen* habe ich — wenn auch nicht unter dieser Bezeichnung — in einer früheren Arbeit behandelt[2]). Neuerdings hat man begonnen, Verbände zu studieren, deren Elemente einer *nichtkommutativen Multiplikation* fähig sind[3]).

Was die Vorkenntnisse anbetrifft, die zum Verständnis der folgenden Ausführungen notwendig sind, so setzen wir voraus, daß der Leser mit den Grundlagen der Theorie der Verbände vertraut ist; dagegen sind besondere verbandstheoretische Kenntnisse nicht erforderlich. Hier darf auf den kürzlich erschienenen Enzyklopädie-Artikel über die Theorie der Verbände aufmerksam gemacht werden, in dem die neue Disziplin von Grund auf entwickelt und ihre Bedeutung für Logik, Algebra und Geometrie im einzelnen dargelegt wird[4]).

§ 1.

Assoziativ und $\mathfrak{A}$-System.

1. Es sei M eine Menge von unterscheidbaren Elementen. Es bedeute $\wedge$ eine *Verknüpfung* in M. Diese Verknüpfung sei hinsichtlich der mit $=$ bezeichneten Elementidentität durch die folgenden *Axiome* näher bestimmt:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es ein Element c aus M derart, daß — in dieser Reihenfolge —

$$a \wedge b = c$$

ist.

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M ist

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

---

[1]) In unserer Bezeichnungsweise stellt das Dedekindsche Beispiel ein Modell für ein $\mathfrak{B}$-System dar; vgl. Dedekind [W. XXVIII], S. 120ff. — An einer anderen Stelle — vgl. [Di], S. 500ff. — bringt Dedekind ein Beispiel für ein eigentliches $\mathfrak{A}$-System, d. h. für ein $\mathfrak{A}$-System, das kein $\mathfrak{B}$-System ist; vgl. auch Beispiel 5 in § 3 der vorliegenden Arbeit.

(Das Literaturverzeichnis befindet sich am Schluß der vorliegenden Arbeit. Zwecks Vervollständigung der früheren Verzeichnisse sind in das jetzige auch solche Arbeiten zur Theorie der Verbände aufgenommen, die den Gegenstand unserer Untersuchung nicht unmittelbar berühren.)

[2]) Vgl. [A. V. III], insbesondere § 2 und 5.

[3]) Vgl. Dilworth [1].

[4]) Vgl. Hermes-Köthe [1].

Erklärung 1. Eine von der Nullmenge verschiedene Menge M mit einer den Axiomen A I und A II genügenden Elementverknüpfung $\wedge$ heiße ein *Assoziativ* in bezug auf $\wedge$. Je nachdem endlich oder unendlich viele Elemente vorhanden sind, werde das Assoziativ als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet.

Sind keine Mißverständnisse zu befürchten, so schreiben wir an Stelle von $a \wedge b$ kürzer ab. Wir machen weiterhin sowohl von der ersten, der additiven Schreibweise als auch von der zweiten, der multiplikativen Schreibweise Gebrauch.

In bekannter Weise zeigt man, daß über A I hinaus das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \dots a_n$$

einen Sinn hat. Insbesondere schreiben wir dafür a^n, wenn

$$a_1 = \cdots = a_n = a$$

ist, wobei $a^1 = a$ zu setzen ist. Es gilt

$$(1) \qquad a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Erklärung 2. Das Assoziativ M heiße *kommutativ*, wenn das folgende *Axiom* in Kraft ist:

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M ist

$$a \wedge b = b \wedge a.$$

Ersichtlich bilden die Potenzen eines beliebigen Elementes aus M, wo M ein nicht notwendigerweise kommutatives Assoziativ ist, ein kommutatives Assoziativ. Ist M aber kommutativ, so gilt neben (1) noch

$$(2) \qquad a^m b^m = (ab)^m.$$

2. Nunmehr bringen wir Verband und Assoziativ miteinander in Verbindung.

Erklärung 3. Eine Menge M, die sowohl ein Verband als auch ein kommutatives Assoziativ ist, heiße ein $\mathfrak{A}$-*System*.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir $\mathfrak{A}$-Systeme, die mindestens einem der folgenden *Koppelungsaxiome* genügen:

K I. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M ist[5])

$$(a \cup b)(a \cap b) = ab.$$

K II′. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M ist

$$a(b \cup c) = ab \cup ac.$$

---

[5]) Zur Ersparung von Klammern werde festgesetzt, daß $\wedge$ stärker bindet als $\cup$ und $\cap$.

K II''. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M ist

$$a\,(b \cap c) = ab \cap ac.$$

Wir beweisen einige Sätze über $\mathfrak{A}$-Systeme. Satz 1 spricht eine zwischen den Koppelungsaxiomen bestehende Abhängigkeit aus, während die Sätze 2, 3 und 4 mehr das eigentliche Rechnen betreffen.

Satz 1. *Sind für das $\mathfrak{A}$-System M die Axiome* K II' *und* K II'' *in Kraft, so ist auch* K I *in Kraft.*

Beweis. Für drei Elemente x, y, z eines *beliebigen* Verbandes gelten die nachstehenden Beziehungen[6]):

$$(x \cup y) \cap (x \cup z) > x \cup (y \cap z),$$
$$(x \cap y) \cup (x \cap z) < x \cap (y \cup z).$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich

$$(a \cup b)\,(a \cap b) = (a \cup b)\,a \cap (a \cup b)\,b = (a^2 \cup a\,b) \cap (a\,b \cup b^2) > a\,b \cup (a^2 \cap b^2),$$
$$(a \cap b)\,(a \cup b) = (a \cap b)\,a \cup (a \cap b)\,b = (a^2 \cap a\,b) \cup (a\,b \cap b^2) < a\,b \cap (a^2 \cup b^2).$$

Also ist

$$ab \cap (a^2 \cup b^2) > ab \cup (a^2 \cap b^2)$$

und weiter

$$ab \cap (a^2 \cup b^2) = ab \cup (a^2 \cap b^2), \quad ab = (a \cup b)\,(a \cap b).$$

Der folgende Satz ist ohne weiteres einleuchtend.

Satz 2. *Es sei M ein dem Axiom* K II' *genügendes $\mathfrak{A}$-System. Sind a, b, c Elemente aus M derart, daß $b > c$ ist, so ist auch*

$$ab > ac.$$

Ein entsprechender Satz gilt für den Fall, daß M ein dem Axiom K II'' genügendes $\mathfrak{A}$-System ist.

Was den nächsten Satz anbetrifft, so ist folgendes zur Symbolik zu bemerken. Wie sich das Symbol Σ auf die Verknüpfung $+$ bezieht, sollen sich die Symbole $\overset{\cup}{\Sigma}$ und $\overset{\cap}{\Sigma}$ auf die Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ beziehen.

Satz 3. *Es sei M ein dem Axiom* K II' *genügendes $\mathfrak{A}$-System. Für n Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

aus M ist

$$(a_1 \cup \ldots \cup a_n)^m = \overset{\cup}{\sum_{(\mu_1 + \cdots + \mu_n = m)}} a_1^{\mu_1} \ldots a_n^{\mu_n},$$

[6]) Vgl. [Verb. 2], S. 602.

wobei m eine natürliche Zahl ist. Auf der rechten Seite soll sich die Verknüpfung $\cup$ auf alle Potenzprodukte mit ganzzahligen und nichtnegativen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_n$ erstrecken, für die

$$\mu_1 + \cdots + \mu_n = m$$

ist; dabei sind Potenzen mit dem Exponenten 0 fortzulassen[7]).

Dieser Satz ist das Gegenstück zu dem polynomischen Lehrsatz der gewöhnlichen Arithmetik. Man kann ihn auch genau so beweisen; nur ist zu beachten, daß wegen der Verbandsregel $a \cup a = a$ die Polynomialkoeffizienten nunmehr gleich 1 werden.

Ein entsprechender Satz gilt für den Fall, daß M ein dem Axiom K II'' genügendes $\mathfrak{A}$-System ist.

Hinsichtlich Satz 4 ebenfalls einige Vorbemerkungen. Wie üblich werde, wenn r eine reelle Zahl ist, unter $[r]$ die größte ganze Zahl verstanden, die nicht größer als r ist. In der folgenden Erklärung führen wir zwei ähnliche Funktionen ein.

Erklärung 4. Ist r eine reelle Zahl, so werde mit $\gamma(r)$ die größte *gerade* Zahl bezeichnet, die nicht größer als r ist. Entsprechend werde mit $\omega(r)$ die größte *ungerade* Zahl bezeichnet, die nicht größer als r ist.

Die zahlentheoretischen Funktionen $\gamma(r)$, $\omega(r)$ und $[r]$ hängen vermöge der Gleichungen

$$\gamma(r) = 2\left[\frac{r}{2}\right], \quad \omega(r) = 2\left[\frac{r-1}{2}\right] + 1 \tag{3}$$

zusammen, wie man leicht erkennt. Ferner gelten die Rekursionsformeln

$$\gamma(r+1) = \omega(r) + 1, \quad \omega(r+1) = \gamma(r) + 1. \tag{4}$$

Der Beweis der Gleichungen (4) verläuft so: Nach (3) ist

$$\gamma(r+1) = 2\left[\frac{r+1}{2}\right] = 2\left[\frac{r-1}{2}\right] + 2 = \omega(r) + 1,$$

$$\omega(r+1) = 2\left[\frac{r}{2}\right] + 1 = \gamma(r) + 1.$$

Weiter werde festgesetzt, daß sich die Produkte

$$\prod_{a_n}(a_1 \cup \ldots \cup a_\nu), \quad \prod_{a_n}(a_1 \cup \ldots \cup a_\nu \cup b \cup c \cup \ldots)$$

auf alle ν-gliedrigen Kombinationen erstrecken sollen, die vermittelst der n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ für $1 \leqq \nu \leqq n$ gebildet werden können. Hiernach ist beispielsweise

$$\prod_{a_n} a_1 = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu, \qquad \prod_{a_n}(a_1 \cup \ldots \cup a_n) = a_1 \cup \ldots \cup a_n.$$

---

[7]) Dieser Satz ist für den Sonderfall $n = 2$ von Dedekind angegeben; vgl. [W. XXVIII], S. 127 und [Di], S. 503. Dort findet man auch noch weitere Formeln.

Einen entsprechenden Sinn verbinden wir mit den Produkten

$$\prod_{a_n}(a_1 \cap \ldots \cap a_n), \quad \prod_{a_n}(a_1 \cap \ldots \cap a_n \cap b \cap c \cap \ldots).$$

Dieses vorausgeschickt, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 4. *Es sei M ein dem Axiom* K I *genügendes* $\mathfrak{A}$*-System. M sei als Verband distributiv. Dann gelten für n beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

aus M die Relationen

$$(5') \quad (a_1 \cup \ldots \cup a_n) \prod_{a_n}(a_1 \cap a_2) \prod_{a_n}(a_1 \cap a_2 \cap a_3 \cap a_4) \ldots \prod_{a_n}(a_1 \cap \ldots \cap a_{\gamma(n)})$$
$$= \prod_{a_n} a_1 \prod_{a_n}(a_1 \cap a_2 \cap a_3) \ldots \prod_{a_n}(a_1 \cap \ldots \cap a_{\omega(n)}),$$

$$(5'') \quad (a_1 \cap \ldots \cap a_n) \prod_{a_n}(a_1 \cup a_2) \prod_{a_n}(a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup a_4) \ldots \prod_{a_n}(a_1 \cup \ldots \cup a_{\gamma(n)})$$
$$= \prod_{a_n} a_1 \prod_{a_n}(a_1 \cup a_2 \cup a_3) \ldots \prod_{a_n}(a_1 \cup \ldots \cup a_{\omega(n)}),$$

wobei die vor bzw. hinter dem Gleichheitszeichen auftretenden Kombinationen aus einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Gliedern bestehen.

Beweis. Da (5′) und (5″) zueinander dual sind, reicht es aus, eine der beiden Formeln, etwa (5′), abzuleiten. Wir wenden den Schluß von n auf $n+1$ an. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist (5′) richtig, denn im ersten Fall reduziert sich (5′) auf $a_1 = a_1$ und im zweiten Fall auf

$$(a_1 \cup a_2)(a_1 \cap a_2) = a_1 a_2.$$

Unter der Annahme, daß (5′) für den Index n richtig ist, zeigen wir folgendermaßen, daß (5′) auch für den Index $n+1$ Gültigkeit hat. Es ist

$$a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1} = (a_1 \cup \ldots \cup a_n) \cup a_{n+1},$$

also nach K I

$$(a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1})\{(a_1 \cup \ldots \cup a_n) \cap a_{n+1}\} = (a_1 \cup \ldots \cup a_n)\, a_{n+1}.$$

Setzt man

$$(6) \qquad a_i \cap a_{n+1} = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so erhält man auf Grund des distributiven Gesetzes

$$(a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1})(b_1 \cup \ldots \cup b_n) = (a_1 \cup \ldots \cup a_n)\, a_{n+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$\prod_{b_n}(b_1 \cap b_2) \ldots \prod_{b_n}(b_1 \cap \ldots \cap b_{\gamma(n)}) \prod_{a_n}(a_1 \cap a_2) \ldots \prod_{a_n}(a_1 \cap \ldots \cap a_{\gamma(n)})$$

und berücksichtigt (5′) sowie die Relation, die aus (5′) hervorgeht, wenn darin überall a durch b ersetzt wird, so ergibt sich

$$(a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1}) \prod_{b_n} b_1 \ldots \prod_{b_n} (b_1 \cap \ldots \cap b_{\omega(n)}) \prod_{a_n} (a_1 \cap a_2) \ldots \prod_{a_n} (a_1 \cap \ldots \cap a_{\gamma(n)})$$
$$= a_{n+1} \prod_{a_n} a_1 \ldots \prod_{a_n} (a_1 \cap \ldots \cap a_{\omega(n)}) \prod_{b_n} (b_1 \cap b_2) \ldots \prod_{b_n} (b_1 \cap \ldots \cap b_{\gamma(n)}).$$

Unter Beachtung der aus (6) folgenden Gleichung

$$b_{\varkappa_1} \cap \ldots \cap b_{\varkappa_i} = a_{\varkappa_1} \cap \ldots \cap a_{\varkappa_i} \cap a_{n+1},$$

wobei $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_i$ irgendeine Umstellung der Zahlen $1, \ldots, i$ ist, findet man weiter

$$(a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1}) \prod_{a_{n+1}} (a_1 \cap a_2) \ldots \prod_{a_{n+1}} (a_1 \cap \ldots \cap a_{\gamma(n+1)})$$
$$= \prod_{a_{n+1}} a_1 \ldots \prod_{a_{n+1}} (a_1 \cap \ldots \cap a_{\omega(n+1)}),$$

womit alles bewiesen ist.

Wir wollen noch kurz auf den Fall eingehen, daß M als Verband *unten geschlossen* ist, daß also in M ein Element e existiert derart, daß für alle Elemente a aus M stets $a > e$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist es möglich, daß die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ zu je zweien *fremd* zueinander sind, d. h. daß gilt

$$a_\mu \cap a_\nu = e \qquad (\mu \neq \nu).$$

Ist die Bedingung der Elementfremdheit erfüllt, so vereinfacht sich (5′) beträchtlich. Setzt man noch

$$\varepsilon(n) = 2^{n-1},$$

so geht nämlich (5′) über in

$$(7') \qquad e^{\varepsilon(n)-1} \cdot (a_1 \cup \ldots \cup a_n) = e^{\varepsilon(n)-n} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu.$$

Eine entsprechende Relation gilt für den Fall, daß M als Verband *oben geschlossen* ist.

Zum Schluß dieses Paragraphen weisen wir darauf hin, daß ein *Assoziativ*, das mit einem Verband vermöge des Axioms K I gekoppelt ist, notwendigerweise *kommutativ* ist.

§ 2.

Semigruppe und $\mathfrak{B}$-System.

1. Es sei M ein Assoziativ in bezug auf $\wedge$. Auf M wirke das folgende *Doppelaxiom* ein:

Å IV. Sind a, b und a', b' Elemente aus M derart, daß

$$a \wedge b = a' \wedge b \quad \text{bzw.} \quad a \wedge b = a \wedge b'$$

ist, so ist

$$a = a' \quad \text{bzw.} \quad b = b'.$$

Erklärung 5. Ein dem Doppelaxiom A IV genügendes Assoziativ werde als *Semigruppe* in bezug auf $\wedge$ bezeichnet[8]).

Eine *endliche* Semigruppe ist zugleich eine *Gruppe*; bei unendlichen Semigruppen ist das im allgemeinen nicht der Fall.

Gilt

$$a \wedge b = c,$$

so darf, wenn M eine kommutative, d. h. dem Axiom A III genügende Semigruppe ist,

$$a = c \mathbin{\dot\wedge} b, \quad b = c \mathbin{\dot\wedge} a$$

gesetzt werden, wobei $\dot\wedge$ die in diesem Fall eindeutig bestimmte, zu $\wedge$ *inverse* Verknüpfung symbolisiert. Es gelten die folgenden Klammerregeln:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (a \wedge b) \mathbin{\dot\wedge} c = a \wedge (b \mathbin{\dot\wedge} c), \\ (a \mathbin{\dot\wedge} b) \wedge c = a \mathbin{\dot\wedge} (b \mathbin{\dot\wedge} c), \\ (a \mathbin{\dot\wedge} b) \mathbin{\dot\wedge} c = a \mathbin{\dot\wedge} (b \wedge c); \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} a \wedge (b \mathbin{\dot\wedge} c) = (a \mathbin{\dot\wedge} c) \wedge b, \\ a \mathbin{\dot\wedge} (b \mathbin{\dot\wedge} c) = (a \wedge c) \mathbin{\dot\wedge} b, \\ (a \wedge b) \mathbin{\dot\wedge} c = (a \mathbin{\dot\wedge} c) \wedge b. \end{cases}$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß das Symbol $\dot\wedge$ dort, wo es auftritt, auch sinnvoll ist[9]). Zur Vereinfachung der Schreibweise mögen Klammern gemäß folgender Festsetzung unterdrückt werden:

$$(a \wedge b) \mathbin{\dot\wedge} c = a \wedge b \mathbin{\dot\wedge} c,$$
$$(a \mathbin{\dot\wedge} b) \wedge c = a \mathbin{\dot\wedge} b \wedge c,$$
$$(a \mathbin{\dot\wedge} b) \mathbin{\dot\wedge} c = a \mathbin{\dot\wedge} b \mathbin{\dot\wedge} c.$$

2. In § 1 wurden Verband und Assoziativ miteinander in Verbindung gebracht; jetzt verketten wir Verband und Semigruppe.

Erklärung 6. Eine Menge M, die sowohl ein Verband als auch eine kommutative Semigruppe ist, heiße ein $\mathfrak{B}$-*System*.

In dem folgenden Satz kommt zum Ausdruck, daß die Koppelungsaxiome K I, K II′ und K II″ besonders nachhaltig aufeinander einwirken, wenn der Operationsbereich ein $\mathfrak{B}$-System ist. Die gegenseitige Beeinflussung ist, was nicht weiter überraschen kann, wesentlich stärker als bei einem $\mathfrak{A}$-System[10]).

Satz 5. *Es sei M ein dem Axiom* K I *genügendes* $\mathfrak{B}$*-System. Dann gilt mit* K II′ *auch* K II″ *und umgekehrt.*

---

[8]) Wegen der Bezeichnung Semigruppe vgl. Magnus [1], S. 4.

[9]) Vgl. [A. V. I], S. 317. Eine ausführliche Darstellung bringt auch Stolz-Gmeiner [1], S. 55–60.

[10]) Vgl. Satz 1 in § 1 und Beispiel 1 in § 3 der vorliegenden Arbeit.

Beweis. Ist K I in Kraft, so findet

$$(ab \cup ac)\,(ab \cap ac) = a^2bc,$$
$$a^2\,(b \cup c)\,(b \cap c) = a^2bc$$

statt, woraus sich

$$(ab \cup ac)\,(ab \cap ac) = a\,(b \cup c)\,a\,(b \cap c)$$

ergibt. Gilt nun K II′, so ist wegen A IV auch K II″ in Kraft; gilt umgekehrt K II″, so ist aus demselben Grund auch K II′ in Kraft.

Folgerung. Die Sätze 1 und 5 besagen zusammen, daß für ein $\mathfrak{B}$-System, das zweien der Axiome K I, K II′ und K II″ genügt, auch das dritte Axiom in Kraft ist.

Aus dem nächsten Satz geht hervor, daß das Axiom K I auch wesentlich den *Verbandscharakter* des zugrunde gelegten $\mathfrak{B}$-Systems beeinflußt.

Satz 6. *Ein dem Axiom* K I *genügendes* $\mathfrak{B}$*-System ist als Verband distributiv.*

Beweis. Es sei M ein K I genügendes $\mathfrak{B}$-System. Wir weisen zunächst nach, daß M ein *Dedekindscher* Verband ist. Wäre das nicht der Fall, so enthielte M einen Unterverband vom Typus der Fig. 1. Für denselben ist nach K I

$$(a \cup b)\,(a \cap b) = ab.$$

Wegen

$$a \cup b = x, \quad a \cap b = y$$

ist

$$xy = ab.$$

Ebenso ergibt sich

$$xy = ac.$$

Wegen A IV ist das nur möglich, wenn $b = c$ ist, was unserer Annahme widerspricht.

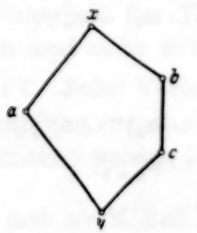

Fig. 1.

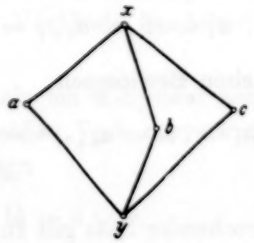

Fig. 2.

Wir weisen nunmehr nach, daß M ein *distributiver* Verband ist. Wäre das nicht der Fall, so enthielte M einen Unterverband vom Typus der Fig. 2. Für denselben ist wie soeben nach K I

$$xy = ab.$$

Ebenso ergibt sich

$$xy = bc, \quad xy = ca.$$

Wegen A IV ist das nur möglich, wenn $a = b = c$ ist, was unserer Annahme widerspricht.

Folgerung. Wegen Satz 1 ist ein den Axiomen K II′ und K II″ genügendes $\mathfrak{B}$-System als Verband distributiv.

Der folgende Satz knüpft an Satz 3 an.

Satz 7. *Es sei M ein dem Axiom* K II′ *genügendes $\mathfrak{B}$-System. Für n Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

aus M ist

$$(a_1 \cup \ldots \cup a_n)^m = a_1^m \cup \ldots \cup a_n^m, \tag{8}$$

wobei m eine natürliche Zahl ist.

Beweis. Nach Satz 3 ist

$$(a \cup b)^m = \bigcup_{(\mu = 0, \ldots, m)} a^{m-\mu} b^{\mu}.$$

Durch Multiplikation mit $a^m \cup b^m$ ergibt sich

$$(a \cup b)^m (a^m \cup b^m) = \bigcup_{(\mu = 0, \ldots, 2m)} a^{2m-\mu} b^{\mu} = (a \cup b)^{2m}.$$

Nach A IV folgt daraus

$$(a \cup b)^m = a^m \cup b^m.$$

Wir wenden nun den Schluß von n auf $n + 1$ an. Die Gleichung (8) sei also für den Index n richtig. Wegen

$$a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1} = (a_1 \cup \ldots \cup a_n) \cup a_{n+1}$$

ist nach dem eben Bewiesenen

$$\begin{aligned}(a_1 \cup \ldots \cup a_{n+1})^m &= (a_1 \cup \ldots \cup a_n)^m \cup a_{n+1}^m \\ &= a_1^m \cup \ldots \cup a_{n+1}^m.\end{aligned}$$

Ein entsprechender Satz gilt für den Fall, daß M ein dem Axiom K II″ genügendes $\mathfrak{B}$-System ist.

Der folgende Satz knüpft an Satz 4 an.

Satz 8. *Es sei M ein dem Axiom* K I *genügendes $\mathfrak{B}$-System. Dann gelten für n beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene Elemente*

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

aus M die Relationen[11])

$$(9') \quad a_1 \cup \ldots \cup a_n = \prod_{a_n} a_1 \wedge \prod_{a_n} (a_1 \cap a_2 \cap a_3) \wedge \ldots \wedge \prod_{a_n} (a_1 \cap \ldots \cap a_{\omega(n)})$$
$$\dot{\wedge} \prod_{a_n} (a_1 \cap a_2) \dot{\wedge} \prod_{a_n} (a_1 \cap a_2 \cap a_3 \cap a_4) \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} \prod_{a_n} (a_1 \cap \ldots \cap a_{\gamma(n)}),$$

$$(9'') \quad a_1 \cap \ldots \cap a_n = \prod_{a_n} a_1 \wedge \prod_{a_n} (a_1 \cup a_2 \cup a_3) \wedge \ldots \wedge \prod_{a_n} (a_1 \cup \ldots \cup a_{\omega(n)})$$
$$\dot{\wedge} \prod_{a_n} (a_1 \cup a_2) \dot{\wedge} \prod_{a_n} (a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup a_4) \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} \prod_{a_n} (a_1 \cup \ldots \cup a_{\gamma(n)}).$$

Beweis. Nach Satz 6 ist M als Verband distributiv, so daß die Relationen (5′) und (5″) des Satzes 4 bestehen. Da A IV in Kraft ist, dürfen (5′) und (5″) jeweils nach dem ersten Faktor aufgelöst werden.

Unter den am Schluß von Satz 4 angegebenen Bedingungen geht (7′) für ein $\mathfrak{B}$-System über in

$$(10') \quad a_1 \cup \ldots \cup a_n = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \dot{\wedge} e^{n-1}.$$

§ 3.

Beispiele.

Zunächst einige Bezeichnungen. Es bedeute $\mathfrak{R}$ die Menge der *reellen* Zahlen, $\mathfrak{R}_0$ die Menge der *reellen, von* 0 *verschiedenen* Zahlen und $\mathfrak{N}$ die Menge der *natürlichen* Zahlen. Unter $\max(a, b)$ bzw. $\min(a, b)$ werde das *Maximum* bzw. *Minimum* der reellen Zahlen a und b verstanden, während $v(a, b)$ bzw. $t(a, b)$ das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* bzw. den *größten gemeinschaftlichen Teiler* von a und b bedeuten soll, wobei a, b sowohl *natürliche Zahlen* als auch *Moduln* eines Zahlkörpers, insbesondere *Ideale*, sein können.

Wir bemerken noch, daß es sich beim ersten Beispiel um eine triviale Realisierung innerhalb der Theorie der Verbände handelt[12]). Die anderen Realisierungen sind nicht trivial.

Beispiel 1. Jeder Verband kann als ein $\mathfrak{A}$-System aufgefaßt werden, da die Verknüpfung $\wedge$ mit einer der beiden Verbandsverknüpfungen, etwa mit $\cup$, identifiziert werden kann. Wegen

$$(a \cup b) \cup (a \cap b) = a \cup b,$$
$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup (a \cup c)$$

---

[11]) Vgl. den verwandten Satz in [A. V. I], S. 320. Hinsichtlich der diesen merkwürdigen Satz betreffenden Literatur vgl. Church [1]; in diesem Referat wird eine einschlägige Arbeit von S. Pankajam besprochen und dabei auf Untersuchungen von P. S. Poreckij, G. U. Yule und Hassler Whitney hingewiesen.

[12]) Eine weitere verbandsinterne Realisierung ist in [A. V. III], § 5 angegeben.

sind die Koppelungsaxiome K I und K II′ identisch erfüllt. Dagegen ist K II″ im allgemeinen nicht in Kraft. Dann und nur dann, wenn der Verband auch distributiv ist, ist wegen

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

auch K II″ erfüllt. Demgegenüber ist ein aus mehreren Elementen bestehender Verband bei dieser Interpretation niemals ein $\mathfrak{B}$-System; das verbietet das Semigruppen-Axiom A IV.

Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß — anders als für ein $\mathfrak{B}$-System (vgl. die Folgerung im Anschluß an Satz 5) — für ein $\mathfrak{A}$-System, das den Koppelungsaxiomen K I und K II′ genügt, nicht notwendigerweise auch K II″ in Kraft zu sein braucht.

Beispiel 2. Es sei M die mit $\mathfrak{R}$ bezeichnete Menge. Dieselbe ist ein Verband in bezug auf die dadurch erklärten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$, daß $a \cup b$ als $\max(a, b)$ und $a \cap b$ als $\min(a, b)$ gedeutet wird. Zugleich ist $\mathfrak{R}$ eine kommutative Semigruppe in bezug auf die dadurch erklärte Verknüpfung $\wedge$, daß $a \wedge b$ als $a + b$ gedeutet wird. $\mathfrak{R}$ ist bei dieser Interpretation also ein $\mathfrak{B}$-System. Wegen

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b,$$
$$a + \max(b, c) = \max(a + b, a + c),$$
$$a + \min(b, c) = \min(a + b, a + c)$$

sind die Axiome K I, K II′ und K II″ in Kraft. Als Verband ist $\mathfrak{R}$ linear, also, wie es auch sein muß, distributiv. Die Relationen (9′) und (9″) verwandeln sich in die folgenden:

$$\max(a_1, \ldots, a_n) = \sum a_1 + \cdots + \sum \min(a_1, \ldots, a_{\omega(n)}) - \\ - \sum \min(a_1, a_2) - \cdots - \sum \min(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)}),$$
$$\min(a_1, \ldots, a_n) = \sum a_1 + \cdots + \sum \max(a_1, \ldots, a_{\omega(n)}) - \\ - \sum \max(a_1, a_2) - \cdots - \sum \max(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)});$$

dabei steht $\sum$ an Stelle von $\sum_{a_n}$.

Beispiel 3. Wie soeben sei M die mit $\mathfrak{R}$ bezeichnete Menge. Ebenfalls wie soeben werde dieselbe als ein Verband in bezug auf die max-Verknüpfung und die min-Verknüpfung aufgefaßt. Anders als soeben werde $a \wedge b$ als das gewöhnliche Produkt von a und b gedeutet, so daß $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\wedge$ zwar ein kommutatives Assoziativ, aber keine Semigruppe, also in bezug auf alle drei Verknüpfungen zwar ein $\mathfrak{A}$-System, aber kein $\mathfrak{B}$-System ist. Wegen

$$\max(a, b) \cdot \min(a, b) = ab,$$
$$a \cdot \max(b, c) = \max(ab, ac),$$
$$a \cdot \min(b, c) = \min(ab, ac)$$

sind alle drei Koppelungsaxiome in Kraft. Wie soeben ist $\mathfrak{R}$ als Verband linear und damit distributiv. Die Relationen (5′) und (5″) verwandeln sich in die folgenden:

$$\max(a_1, \ldots, a_n) \cdot \prod \min(a_1, a_2) \ldots \prod \min(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)}) = \prod a_1 \ldots \prod \min(a_1, \ldots, a_{\omega(n)}),$$

$$\min(a_1, \ldots, a_n) \cdot \prod \max(a_1, a_2) \ldots \prod \max(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)}) = \prod a_1 \ldots \prod \max(a_1, \ldots, a_{\omega(n)});$$

dabei steht $\prod$ an Stelle von $\prod_{a_n}$.

Was die mit $\mathfrak{R}_0$ bezeichnete Menge anbetrifft, so ist diese bei derselben Interpretation der Verknüpfungen ein $\mathfrak{B}$-System, so daß die eben angegebenen Relationen in diesem Fall durch Division nach $\max(a_1, \ldots, a_n)$ und $\min(a_1, \ldots, a_n)$ aufgelöst werden können.

Beispiel 4. Es sei M die mit $\mathfrak{R}$ bezeichnete Menge. Dieselbe ist ein Verband in bezug auf die dadurch erklärten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$, daß $a \cup b$ als $v(a, b)$ und $a \cap b$ als $t(a, b)$ gedeutet wird. Zugleich ist $\mathfrak{R}$ eine kommutative Semigruppe in bezug auf die gewöhnliche Multiplikation. $\mathfrak{R}$ ist bei dieser Interpretation also ein $\mathfrak{B}$-System. Wegen

$$v(a, b) \cdot t(a, b) = ab,$$

$$a \cdot v(b, c) = v(ab, ac),$$

$$a \cdot t(b, c) = t(ab, ac)$$

sind die Axiome K I, K II′ und K II″ in Kraft. Als Verband ist $\mathfrak{R}$ zwar nicht linear, aber doch distributiv, wie es sein muß. Die Relationen (9′) und (9″) verwandeln sich in die folgenden:

$$v(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\prod a_1 \ldots \prod t(a_1, \ldots, a_{\omega(n)})}{\prod t(a_1, a_2) \ldots \prod t(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)})},$$

$$t(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\prod a_1 \ldots \prod v(a_1, \ldots, a_{\omega(n)})}{\prod v(a_1, a_2) \ldots \prod v(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)})}.$$

Eine Bemerkung. Ist M ein *Halbverband* in bezug auf eine vorgegebene Verknüpfung $\cup$, so gibt es bekanntlich *höchstens* eine Verknüpfung $\cap$ derart, daß M ein *Verband* in bezug auf $\cup$ und $\cap$ ist[13]). Bei Vorgabe *einer* der beiden konstituierenden Verknüpfungen kann also ein Operationsbereich nur auf *eine* Art zu einem Verband ausgebaut werden. Anders ist es bei den $\mathfrak{A}$- und $\mathfrak{B}$-Systemen. Dafür ist es möglich, einen Operationsbereich bei Vorgabe der *beiden* Verbandsverknüpfungen auf *mehrere* Arten zu einem $\mathfrak{A}$- oder $\mathfrak{B}$-System auszubauen, sogar unter der weiteren Bedingung, daß alle drei Koppelungs-

[13]) Vgl. [Verb. 1], S. 235.

axiome in Kraft bleiben. So können in bezug auf $\mathfrak{R}_0$ die konstituierenden Verknüpfungen sowohl im Sinne von Beispiel 2 als auch von Beispiel 3 interpretiert werden, was besagt, daß durch die Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ die Verknüpfung $\wedge$ nicht eindeutig festgelegt ist. Ferner können in bezug auf $\mathfrak{R}$ die konstituierenden Verknüpfungen sowohl im Sinne von Beispiel 3 als auch von Beispiel 4 interpretiert werden, was besagt, daß umgekehrt durch die Verknüpfung $\wedge$ die Verbandsverknüpfungen nicht eindeutig festgelegt sind.

Beispiel 5. Es sei M die Menge der *Moduln* eines *Dedekindschen Körpers*. Diese Menge ist ein Verband in bezug auf die dadurch erklärten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$, daß $a \cup b$ als $v\,(a, b)$ und $a \cap b$ als $t\,(a, b)$ gedeutet wird. Zugleich ist M ein kommutatives Assoziativ — aber im allgemeinen keine Semigruppe[14]) — in bezug auf die dadurch erklärte Verknüpfung $\wedge$, daß $a \wedge b$ als das im Sinne der Zahlentheorie verstandene Produkt der Moduln a und b gedeutet wird. M ist bei dieser Deutung also immer ein $\mathfrak{A}$-System, aber im allgemeinen kein $\mathfrak{B}$-System. Dasselbe genügt dem Axiom K II″, aber im allgemeinen weder K I noch K II′. Als Verband ist M dedekindsch, aber im allgemeinen nicht distributiv.

Ist M dagegen die Menge der *Ideale* eines Dedekindschen Körpers, so ist bei derselben Interpretation der Verknüpfungen das Axiom A IV in Kraft, so daß M eine kommutative Semigruppe in bezug auf $\wedge$ und somit ein $\mathfrak{B}$-System in bezug auf alle drei Verknüpfungen ist. Ferner gelten neben K II″ auch K I und K II′. Als Verband ist M, wie es sein muß, distributiv. Die Relationen (9′) und (9″) gehen in die bereits in Beispiel 4 angegebenen Formeln über.

Beispiel 6. In dem vorhergehenden Beispiel haben wir gesehen, daß in bezug auf ein $\mathfrak{A}$-System das Axiom K I nicht aus K II″ und also aus Symmetriegründen auch nicht aus K II′ folgt. Darüber hinaus zeigen wir nunmehr, daß sogar in bezug auf ein $\mathfrak{B}$-System das Axiom K I weder eine Folge von K II′ noch von K II″ ist. Wir müssen bei diesem Beispiel etwas ausführlicher sein. Es genügt, nachzuweisen, daß K I nicht aus K II′ folgt.

Mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen wir ganze, nichtnegative Zahlen. Es sei M die Menge aller Paare (ξ_1, ξ_2), für die

$$\xi_1 + \xi_2 \geqq 2$$

ist; außerdem sei $e = (0, 0)$ Element von M. Die Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ definieren wir so: Sind

$$a = (\alpha_1, \alpha_2), \quad b = (\beta_1, \beta_2), \quad c = (\gamma_1, \gamma_2), \quad d = (\delta_1, \delta_2)$$

Elemente aus M, so sei dann und nur dann

$$a \cup b = c,$$

[14]) Vgl. [Di], S. 502.

wenn

$$\gamma_1 = \max(\alpha_1, \beta_1), \quad \gamma_2 = \max(\alpha_2, \beta_2)$$

ist. Was die andere Verbandsverknüpfung anbetrifft, so unterscheiden wir zwei Fälle. Findet

$$\min(\alpha_1, \beta_1) + \min(\alpha_2, \beta_2) \geqq 2$$

statt, so sei dann und nur dann

$$a \frown b = d,$$

wenn

$$\delta_1 = \min(\alpha_1, \beta_1), \quad \delta_2 = \min(\alpha_2, \beta_2)$$

ist; findet dagegen

$$\min(\alpha_1, \beta_1) + \min(\alpha_2, \beta_2) < 2$$

statt, so sei dann und nur dann

$$a \frown b = d,$$

wenn

$$\delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad d = e$$

ist.

Folgendermaßen ergibt sich, daß M ein Verband in bezug auf die so definierten Verknüpfungen $\smile$ und $\frown$ ist. Zunächst sieht man sofort, daß die $\smile$ betreffenden Verbandsaxiome erfüllt sind und M also ein Halbverband in bezug auf $\smile$ ist[15]). Was den Nachweis angeht, daß M auch ein Halbverband in bezug auf $\frown$ ist, so müssen wir nur bei dem *assoziativen* Gesetz etwas verweilen; der Nachweis, daß die übrigen Halbverbands-Axiome in Kraft sind, macht keine Schwierigkeiten. Das in Frage stehende Assoziationsgesetz lautet:

Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M ist

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c).$$

Zur Abkürzung werde

$$a \frown b = z, \quad b \frown c = x,$$

$$z \frown c = u, \quad a \frown x = v$$

gesetzt. Zu zeigen ist, daß immer $u = v$ ist. Wir gehen zuerst auf die Bestimmung von u ein. Dafür hat man den Wert von z nötig. Drei Fälle sind in Betracht zu ziehen. Ist erstens

$$\min(\alpha_1, \beta_1) + \min(\alpha_2, \beta_2) \geqq 2,$$

so ist

$$z = \{\min(\alpha_1, \beta_1), \min(\alpha_2, \beta_2)\}.$$

[15]) Vgl. [H. 1], S. 33 und 38.

Ist zweitens

$$\min(\alpha_1, \beta_1) + \min(\alpha_2, \beta_2) = 0,$$

so gilt dasselbe. Ist aber drittens

$$\min(\alpha_1, \beta_1) + \min(\alpha_2, \beta_2) = 1,$$

also

$$\min(\alpha_1, \beta_1) = 1, \quad \min(\alpha_2, \beta_2) = 0$$

oder

$$\min(\alpha_1, \beta_1) = 0, \quad \min(\alpha_2, \beta_2) = 1,$$

so soll nach der Definition der Verknüpfung $\frown$ nicht

$$z = (1, 0) \quad \text{bzw.} \quad z = (0, 1).$$

sondern $z = (0, 0)$ sein. Die Ersetzung von (1, 0) bzw. (0, 1) durch (0, 0) mag für den Augenblick als *Reduktion* bezeichnet werden. Es zeigt sich, daß es für die Bestimmung von u gleichgültig ist, ob man die Reduktion bereits bei z vornimmt oder aber zunächst den Wert von

$$U = (\min\{\min(\alpha_1, \beta_1), \gamma_1\}, \ \min\{\min(\alpha_2, \beta_2), \gamma_2\})$$

feststellt und diesen reduziert[16]). Jedenfalls kommt man stets mit einer Reduktion aus. Da die min-Verknüpfung assoziativ ist, folgt

$$U = \{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \ \min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\}.$$

Ebenso erhält man, wenn

$$V = (\min\{\alpha_1, \min(\beta_1, \gamma_1)\}, \ \min\{\alpha_2, \min(\beta_2, \gamma_2)\})$$

gesetzt wird,

$$V = \{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \ \min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\}.$$

Es ist somit stets

$$U = V, \quad \text{d. h.} \quad u = v.$$

M ist also, wie behauptet, ein Verband in bezug auf $\smile$ und $\frown$.

Die Verknüpfung $\wedge$ definieren wir durch die folgende Vorschrift: Es sei dann und nur dann

$$a \wedge b = c,$$

wenn

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$$

ist, wobei $+$ die gewöhnliche Addition anzeigen soll. Es ist klar, daß M in bezug auf diese Verknüpfung eine kommutative Semigruppe und somit in bezug auf alle drei Verknüpfungen ein $\mathfrak{B}$-System ist.

---

[16]) Das trifft aber nicht mehr für Ausdrücke zu, an deren Aufbau neben der Verknüpfung $\frown$ auch die Verknüpfung $\smile$ beteiligt ist, wie man an Beispielen zeigen kann.

Wir weisen nun nach, daß für unsere Menge M das Axiom K II', d. h.

$$a\,(b \cup c) = ab \cup ac,$$

gilt. Das ist aber der Fall, denn die linke Seite dieser Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$\{\alpha_1 + \max(\beta_1, \gamma_1),\ \alpha_2 + \max(\beta_2, \gamma_2)\},$$

während für die rechte Seite

$$\{\max(\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_1 + \gamma_1),\ \max(\alpha_2 + \beta_2,\ \alpha_2 + \gamma_2)\}$$

geschrieben werden kann. Beide Ausdrücke besagen genau dasselbe.

Dagegen gilt in unserer Menge nicht das Axiom K I, wie das folgende Beispiel zeigt. Es sei

$$a = (2, 0),\ b = (1, 1).$$

Dann ist

$$a \cup b = (2, 1),\quad a \cap b = (0, 0),\quad ab = (3, 1),$$

so daß K I, nämlich

$$(a \cup b)\,(a \cap b) = ab,$$

nicht gilt.

Daß auch K II'' nicht in Kraft ist, folgt nach dem Vorhergehenden aus Satz 1. Man kann das aber auch ohne weiteres direkt bestätigen. Für

$$a = (2, 0),\quad b = (1, 1),\quad c = (0, 2)$$

beispielsweise ist

$$a\,(b \cap c) \neq ab \cap ac,$$

wie eine einfache Rechnung ergibt.

Es ist unbekannt, ob in bezug auf ein $\mathfrak{B}$-System die Axiome K II' und K II'' aus K I folgen oder nicht. Man kann nur sagen, daß aus Gründen der Symmetrie entweder beide Axiome aus K I folgen oder keines der beiden. Im ersten Fall, der aber nicht sehr wahrscheinlich ist, würde — vgl. die Folgerung zu Satz 5 — das Axiom K I der Konjunktion von K II' und K II'' äquivalent sein.

Was den *Verbandstypus* des im vorliegenden Beispiel betrachteten $\mathfrak{B}$-Systems anbetrifft, so zeigen wir noch, daß M ein *nichtdedekindscher* Verband ist. Wir müssen zu diesem Zweck näher auf die *Nachbarschaftsverhältnisse* in M eingehen. Zunächst sieht man, daß das unterste Element e genau *drei* obere Nachbarn in M hat, nämlich die Elemente

(11) $\qquad (2, 0),\quad (1, 1),\quad (0, 2).$

Demgegenüber hat jedes von e verschiedene Element genau *zwei* obere Nachbarn in M; ist nämlich

$$(\xi_1, \xi_2) \neq e, \quad \text{also} \quad \xi_1 + \xi_2 \geqq 2,$$

so sind die beiden Elemente

$$(\xi_1 + 1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2 + 1)$$

seine oberen Nachbarn in M. Hinsichtlich der unteren Nachbarn gilt folgendes. Ein Element

$$(\xi_1, \xi_2) \text{ mit } \xi_1 + \xi_2 = 2,$$

also jedes der Elemente (11), hat genau *einen* unteren Nachbarn, nämlich nur e. Dagegen hat ein Element

$$(\xi_1, \xi_2) \quad \text{mit} \quad \xi_1 + \xi_2 > 2, \quad \xi_1 \neq 0, \quad \xi_2 \neq 0$$

genau *zwei* untere Nachbarn, nämlich

$$(\xi_1 - 1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2 - 1).$$

Schließlich hat ein von e verschiedenes Element

$$(\xi_1, \xi_2) \quad \text{mit} \quad \xi_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \xi_2 = 0$$

wieder genau *einen* unteren Nachbarn.

Nunmehr sind wir in der Lage, nachzuweisen, daß M ein *Birkhoffscher* Verband ist. Dafür genügt es nach einem bekannten Satz, zu zeigen, daß zwei Elemente mit einem gemeinsamen *oberen* Nachbarn immer auch einen gemeinsamen *unteren* Nachbarn haben[17]). Nun haben zwei verschiedene Elemente (α_1, α_2) und (β_1, β_2) dann und nur dann einen gemeinsamen oberen Nachbarn[18]), wenn

$$(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) = -1,$$

d. h. entweder

$$\alpha_1 - \beta_1 = +1, \quad \alpha_2 - \beta_2 = -1$$

oder

$$\alpha_1 - \beta_1 = -1, \quad \alpha_2 - \beta_2 = +1$$

ist. Gemeinsamer oberer Nachbar ist im ersten Fall das Element $(\alpha_1, \alpha_2 + 1)$, im zweiten Fall das Element $(\alpha_1 + 1, \alpha_2)$. In beiden Fällen ist aber auch ein gemeinsamer unterer Nachbar vorhanden, nämlich im ersten Fall das Element

---

[17]) Vgl. [Verb. 7], S. 65.

[18]) Trivial ist, daß zwei verschiedene Elemente eines Verbandes *höchstens einen* gemeinsamen oberen und *höchstens einen* gemeinsamen unteren Nachbarn haben.

$(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$ bzw. e, im zweiten Fall das Element $(\alpha_1, \alpha_2 - 1)$ bzw. e. Somit ist M ein Birkhoffscher Verband *erster Art*. M ist jedoch kein Birkhoffscher Verband *zweiter Art*, denn zwei Elemente mit einem gemeinsamen unteren Nachbarn haben nicht immer einen gemeinsamen oberen Nachbarn. So sind z. B. die Elemente (2, 0) und (0, 2) Nachbarn von e; es ist aber kein gemeinsamer oberer Nachbar vorhanden. Aus dem Umstand, daß M ein Birkhoffscher Verband erster, aber nicht zweiter Art ist, folgt nach einem weiteren bekannten Satz[19]) sofort, daß M als Verband *nichtdedekindsch* ist.

Aus den letzten Ausführungen geht hervor, daß die Koppelungsaxiome K II′ und K II″, wenn sie *einzeln* einwirken, den Verbandscharakter eines $\mathfrak{B}$-Systems verhältnismäßig geringfügig beeinflussen. Treten sie jedoch *vereint* in Aktion, so bestimmen sie, wie aus der Folgerung zu Satz 6 hervorgeht, weitgehend den Typus des Verbandes.

Literaturverzeichnis.

(Die früher erschienenen Arbeiten zur Theorie der Verbände sind in [Verb. 8], [H. 2] und [H. 4] zusammengestellt.)

A. Church.

[1] Journ. of Symbolic Logic **1** (1936), S. 118 (Referat).

R. Dedekind.

[W. XXVIII] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. Ges. Werke **2** (1931), S. 103—147.

R. P. Dilworth.

[1] Non-commutative residuated lattices. Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939), S. 426—444.

[2] Note on complemented modular lattices. Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), S. 74—76.

E. Foradori.

[3] Teiltheorie und Verbände. Deutsche Math. **5** (1940), S. 37—43.

P. G. Lejeune Dirichlet und R. Dedekind.

[Di] Vorlesungen über Zahlentheorie. 4. Aufl. (1894), Supplement XI.

I. Halperin.

[1] Additivity and continuity of perspectivity. Duke math. Journ. **5** (1939), S. 503—511.

H. Hermes und G. Köthe.

[1] Theorie der Verbände. Enzykl. d. Math. Wissensch. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

[19]) Vgl. [Verb. 7], S. 72—73.

F. Klein-Barmen.

[A. V. I] Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 105 (1931), S. 308–323.

[A. V. III] Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 39–60.

[Verb. 1] Beiträge zur Theorie der Verbände. Ebenda 39 (1934), S. 227–239.

[Verb. 2] Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen 111 (1935), S. 596 bis 621.

[Verb. 7] Birkhoffsche und harmonische Verbände. Math. Zeitschr. 42 (1936), S. 58–81.

[Verb. 8] Über die ausgezeichneten Darstellungen der Elemente verzahnter harmonischer Verbände. Deutsche Math. 2 (1937), S. 216–241.

[H. 1] Axiomatische Untersuchungen zur Theorie der Halbverbände und Verbände. Ebenda 4 (1939), S. 32–43.

[H. 2] Theorie der Gewebe. Math. Zeitschr. 45 (1939), S. 107–126.

[H. 4] Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes. Ebenda 46 (1940), S. 472–480.

F. Maeda.

[1] Logical structures of orthogonal systems in Hilbert space. Journ. of science of the Hirosima University (Japan) 8 (1938), S. 15–28.

[2] Ring-decomposition without chain-condition. Ebenda 8 (1938), S. 145–167.

[3] Homogeneous basis for continuous geometry. Ebenda 9 (1939), S. 73–83.

[4] Lattice functions and lattice structure. Ebenda 9 (1939), S. 85–104.

[5] Ideals in a Boolean algebra with transfinite chain condition. Ebenda 10 (1940), S. 7–36.

W. Magnus.

[1] Allgemeine Gruppentheorie. Enzykl. d. Math. Wissensch. I 1, 9; 2. Aufl. (1939).

H. R. Müller.

[1] Algebraischer Aussagenkalkül. Inaugural-Dissertation (Universität Graz) o. J.

O. Stolz und J. A. Gmeiner.

[1] Theoretische Arithmetik. I. Abt. (1911).

(Eingegangen am 25. Juli 1940.)

Zur Kettenbruchtheorie im Dreidimensionalen.

Von

Constantin Yannopoulos in Hamburg.

1. Die von Herrn G. Bullig veröffentlichte Arbeit[1]) über die Kettenbruchtheorie im Dreidimensionalen zieht eine diskrete Menge M im Euklidischen Raum E_3 in Betracht, die vier Axiome erfüllt, insbesondere dies, daß alle Punkte von M im Oktanten O_3: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ liegen; in bezug auf diese Menge sind sog. extreme Quader definiert, von denen drei Arten unterschieden werden.

Die Begrenzungsfläche $B(V)$ der Vereinigungsmenge V aller extremen Quader 3. Art im O_3 bilden eine polyedrale Fläche, die isomorph ist zu der Menge der in O_3 gelegenen Halbgeraden mit dem Nullpunkt als Anfangspunkt.

Die auf dieser Begrenzungsfläche definierten 0- und 1-Intervalle bilden im E_3 einen Streckengraphen, durch den die Bildung der sog. Nachbarquader dargestellt wird.

Hier wollen wir für eine spezielle Menge M eine Methode geben, mit der man eine ebene Darstellung des Graphen bekommen kann, so daß die Zyklen des räumlichen Graphen in vier Arten von konvexen Polygonen übergehen.

2. Der räumliche Graph besteht aus Zyklen, die durch folgende Gleichung darstellbar sind:

$$(1) \qquad (32)\,(31)^{m_2}\,(21)\,(23)^{m_1}\,(13)\,(12)^{m_3}\,(Q) = Q,$$

wobei m_i $(i = 1, 2, 3)$ ganze rationale Zahlen $\geqq 0$ sind, Q ein Knotenpunkt, der einen extremen Quader darstellt und (kj) $(k = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3;\ k \neq j)$ die Prozesse, die in der Arbeit (Z 1) durch Ω_{kj} bezeichnet wurden.

Wir definieren folgendes Übertragungsprinzip: Es sei ein orientiertes Dreieck mit den Eckpunkten X_1, X_2, X_3 vorgegeben. Dann wollen wir den Prozeß (kj) durch einen Vektor darstellen, welcher der Richtung X_kX_j der entsprechenden Seite des orientierten Dreiecks parallel ist.

Durch diese Darstellung der Prozesse werden die Zyklen in konvexe Polygone in der Ebene übergehen.

---

[1]) Abhandlungen d. Math. Sem. d. Hansischen Universität, Bd. 13, H. 3/4. Diese Arbeit wird übrigens durch (Z 1) bezeichnet.

Die betreffenden konvexen Polygone sind Sechsecke mit paarweise parallelen Seiten $[(12)^{m_3}, (21)]$, $[(23)^{m_1}, (32)]$, $[(31)^{m_2}, (13)]$ bzw. Fünfecke mit zwei Paaren paralleler Seiten, z. B. $[(12)^{m_3}, (21)]$, $[(23)^{m_1}, (32)]$ bzw. Vierecke mit einem Paar paralleler Seiten, z. B. $[(12)^{m_3}, (21)]$, endlich Dreiecke (Fig. 1). Die Pfeile auf den Seiten haben die dem Uhrzeigersinn entgegengesetzte Richtung oder nicht, je nachdem die Folge der ganzen Zahlen im Paar (kj) die natürliche ist oder nicht.

Auf jeder der Seiten $(31)^{m_2}$, $(12)^{m_3}$, $(23)^{m_1}$ liegen entsprechend $m_2 - 1$, $m_3 - 1$, $m_1 - 1$ Knotenpunkte außer den Ecken des Polygons. Symmetriehalber werden wir im folgenden ein gleichseitiges Dreieck als Grunddreieck benutzen.

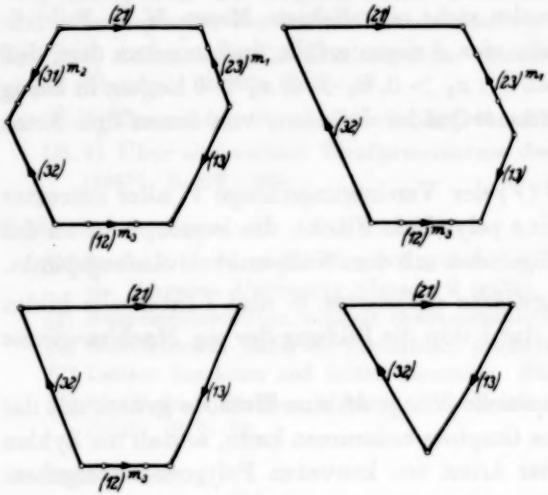

Fig. 1.

3. Das oben betrachtete Darstellungsprinzip werden wir auf ein dreidimensionales Zahlengitter anwenden, in dem wir für M die in O_3 gelegenen Punkte dieses Gitters nehmen.

Wir nehmen drei konjugierte totalreelle kubische Körper K_1, K_2, K_3, die durch die irreduzible Gleichung $x^3 - 8x + 6 = 0$ definiert sind. In diesen Körpern betrachten wir einen dreigliedrigen Modul, der ein Gitter im E_3 bildet, welches die Axiome 1. bis 4. von (Z 1) erfüllt. Die Basisvektoren des Gitters sind:

$$\mathfrak{D}^{(0)} = (1, 1, 1); \quad \mathfrak{D}^{(1)} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3); \quad \mathfrak{D}^{(2)} = (\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2)$$

wobei θ_1, θ_2, θ_3 die drei zueinander konjugierten Wurzeln der oben gegebenen Gleichung sind[2]).

Ein extremer Quader 3. Art, im Sinne von (Z 1), ist durch die folgende Matrix definiert:

$$(\sigma_{pq}) = S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\delta_{pq}), \qquad (\delta_{pq}) \text{ die Einheitsmatrix.}$$

[2]) $\theta_1 = 0{,}818\ldots$, $\theta_2 = 2{,}328\ldots$, $\theta_3 = -3{,}147\ldots$

Die Matrix, die für die Bestimmung der äquivalenten extremen Quader als Kriterium dienen soll, ist[3])

$$M(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -6a_2 & a_0 + 8a_1 & a_1 \\ -6a_1 & 8a_1 - 6a_2 & a_0 + 8a_2 \end{pmatrix},$$

wo $\varepsilon_1 = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_1^2$ eine totalpositive Einheit der Ordnung des Moduls ist.

Der von Herrn Bullig in der Arbeit (Z 2) gegebene Algorithmus[4]) zur Bestimmung der Nachbarquader erzeugt folgende Zyklen:

I. $(31)\,(21)\,(13)\,(32)\,[S] = S.$

II. $(32)\,(31)\,(21)\,(13)\,[S] = S.$

III. $(31)\,(21)\,(23)^4\,(13)\,(12)\,(32)\,[(32)\,S] = (32)\,S.$

IV. $(32)\,(21)\,(13)\,(12)\,[(23)^3\,(13)\,(12)\,(32)^2\,S] = (23)^3\,(13)\,(12)\,(32)^2\,S.$

V. $(32)\,(21)\,(13)\,[(23)^2\,(13)\,(12)\,(32)^2\,S] = (23)^2\,(13)\,(12)\,(32)^2\,S.$

VI. $(32)\,(31)^2\,(21)\,(13)\,(12)\,[(23)\,(13)\,(12)\,(32)^2\,S] = (23)\,(13)\,(12)\,(32)^2\,S.$

VII. $(32)\,(21)\,(13)\,[(13)\,(12)\,(32)^2\,S] = (13)\,(12)\,(32)^2\,S.$

VIII. $(31)^3\,(21)\,(23)^2\,(13)\,(12)^2\,(32)\,[(12)\,(32)^2\,S] = (12)\,(32)^2\,S.$

IX. $(32)\,(31)\,(21)\,(13)\,[(13)\,(12)^2\,(32)\,(12)\,(32)^2\,S] = (13)\,(12)^2\,(32)\,(12)\,(32)^2\,S.$

X. $(32)\,(31)\,(21)\,(23)\,(13)\,[(23)\,(13)\,(12)^2\,(32)\,(12)\,(32)^2\,S]$
$= (23)\,(13)\,(12)^2\,(32)\,(12)\,(32)^2\,S.$

XI. $(32)\,(21)\,(13)\,[(23)\,S] = (23)\,S.$

XII. $(32)\,(31)^2\,(21)\,(23)^5\,(13)\,(12)^7\,[(23)^2\,S] = (23)^2\,S.$

Die in den Gleichungen links in eckigen Klammern liegenden Ausdrücke stellen den extremen Anfangsquader bei der Berechnung des Zyklus dar.

Diese Zyklen bestimmen in dem Streckengraphen sogleich einen Fundamentalbereich der Einheitengruppe.

4. Für die Konstruktion des Fundamentalbereiches schicken wir erst folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz: *Es existiert und konstruiert werden kann ein geschlossenes Polygon* $ABCDEB''A''E'D'C'B'A$ *mit dem Punkt* A' *auf* EB'', *so daß*:

1. $AB \parallel A''B'' \parallel X_3X_1$; $BC \parallel DE \parallel B'C' \parallel D'E' \parallel X_2X_3$;
$EB'' \parallel AB' \parallel C'D' \parallel E'A'' \parallel X_1X_2$.
2. $(AB) = (A''B'')$; $(BC) = (B'C')$; $(CD) = (C'D')$; $(DE) = (D'E')$;
$(EA') = (E'A'')$; $(AB') = (A'B'')$.

---

[3]) G. Bullig, Anwendungen eines Iterationsverfahrens für diskrete Punktmengen auf Gitter (Z 2). Mitteilungen d. Math. Ges. Hamburg, Bd. VIII, Festschrift II (Mai 1940), S. 180.

[4]) (Z 2), S. 178.

3. *Wenn* $BK'KM \parallel CD$, $DK' \parallel AB$, $C'ML \parallel AB$, $B''LK \parallel BC$ *sind, haben wir*:

I. K' *zwischen* B *und* K.

II. L *zwischen* B'' *und* K.

III. K *zwischen* B *und* M.

IV. *Die durch jeden Punkt* O *der Strecke* LM *gezogenen Parallelen zu* CD *bzw.* BC *liegen zwischen* BK, CD *bzw.* $B'C'$, $B''L$.

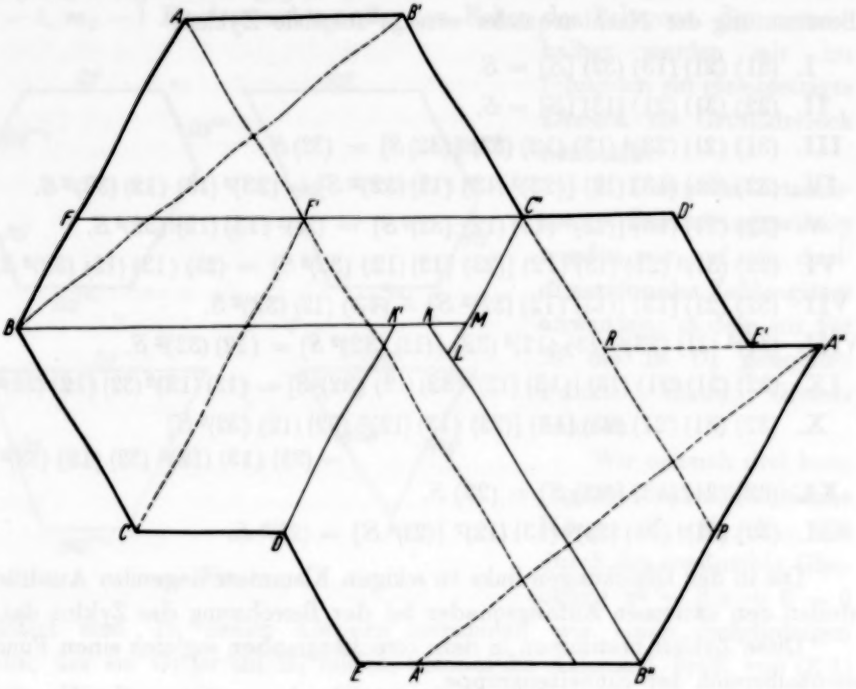

Fig. 2.

Konstruktion: Von einem Punkt A der Ebene (Fig. 2) ziehen wir: $AB \parallel X_3X_1$ und durch einen Punkt F zwischen A, B mit $(AF) > (AB)/2$, $FF' \parallel X_1X_2$, wobei $(FF') = (AF)$ sei. Wir ziehen weiter:

$AF' \parallel X_3X_2$; $F'C \parallel AB$; $CD \parallel X_1X_2$ mit $(FB) < (CD) < (AB)/2$.

$DE \parallel X_3X_2$; $EA' \parallel X_1X_2$, mit $(CD) - (BF) < (EA') < (AF) - (CD)$.

$AB' \parallel X_1X_2$, $(AB) - (CD) < (AB) < (AF)$;

$B'C' \parallel BC$, mit $(B'C') = (AF') = (BC)$; $C'D' \parallel CD$, $(C'D') = (CD)$;

$D'E' \parallel DE$, $(D'E') = (DE)$; $E'A'' \parallel EA'$, $(E'A'') = (EA')$; $(A'B'') = (AB')$.

$A'B'' \parallel AB'$; und endlich verbinden wir A'' und B''.

Es ist $(A''B'') = (AB)$, weil $(BB') = (CC') = (DD') = (EE') = (A'A'')$, $BB' \parallel A'A''$, $(A'B'') = (AB')$, $A'B'' \parallel AB'$, also $A'B''A'' \simeq B'AB$.

Das so konstruierte Polygon erfüllt die Eigenschaften I, II, III, IV:

Beweis von I: Es gilt $(BK') < (BK)$, wenn

$$(BC) + (CD) < (CD) + (EA') + (A'B'')$$

oder

$$(BC) + (CD) < (CD) + (EA') + (AB')$$

oder

$$(AB') > (BC) - (EA') \text{ oder } (AB') > (AF) - (EA');$$

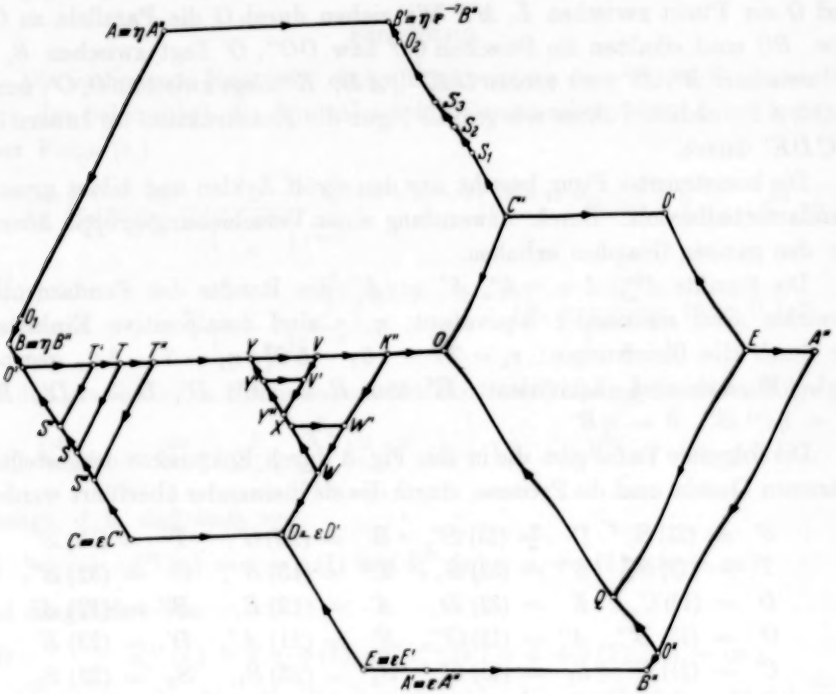

Fig. 3.

nun ist: $(AB') > (AB) - (CD)$, also wir brauchen nur zu beweisen:

$$(AB) - (CD) > (AF) - (EA')$$

oder

$$(AB) - (CD) > (AB) - (FB) - (EA')$$

oder

$$(EA') > (CD) - (BF),$$

was aber vorausgesetzt ist.

Beweis von II: Es ist: $(LB'') < (KB'')$, wenn $(C'P) < (KB'')$ oder $(D'E') + (RP) < (CB) + (DE)$, $(RE') + (E'A'') < (CB)$, $(CD) + (EA') < (AF)$, $(EA') < (AF) - (CD)$ nach Konstruktion.

Beweis von III: Wir haben zu beweisen $(BK) < (BM)$ oder $(CD) + (EA') + (AB') < (FC')$, $(CD) + (EA') + (AB') < (AF) + (AB')$, $(EA') < (AF) - (CD)$.

Beweis von IV: C' und L liegen nicht auf derselben Seite von der Geraden BKM und infolgedessen M liegt zwischen C' und L. Der Punkt L außerdem auf der oberen Seite der Geraden CD. Unter Benutzung von II. und III. folgt die Eigenschaft IV.

Es sei jetzt ein nach dem Hilfssatz konstruiertes Polygon (Fig. 3) gegeben und O ein Punkt zwischen L, M. Wir ziehen durch O die Parallele zu CD bzw. BC und erhalten die Strecken OO' bzw. OO'', O' liegt zwischen B, C; O'' zwischen B'', A''; wir ziehen $DK'' \parallel AB$. K'' liegt zwischen O, O', ferner $E'Q \parallel AB$; endlich führen wir gemäß Figur die Konstruktion im Innern des $O'CDK'$ durch.

Die konstruierte Figur besteht aus den zwölf Zyklen und bildet unseren Fundamentalbereich. Durch Anwendung einer Verschiebungsgruppe können wir den ganzen Graphen erhalten.

Die Punkte A'', $A = \eta A''$, $A' = \varepsilon A''$ des Randes des Fundamentalbereiches sind zueinander äquivalent; η, ε sind totalpositive Einheiten, die durch die Gleichungen: $\varepsilon_1 = 37 - 4\theta_1 - 5\theta_1^2$, $\eta_1 = 7 - 3\theta_1$ gegeben sind. Ebenso sind äquivalent: E' und $E = \varepsilon E'$; D', $D = \varepsilon D'$; B'', $B' = \eta\varepsilon^{-1}B''$, $B = \eta B''$.

Die folgende Tafel gibt die in der Fig. 3 durch Eckpunkte dargestellten extremen Quader und die Prozesse, durch die sie ineinander überführt werden.

$$
\begin{array}{llll}
S' = (23)\,S, & O' = (23)\,S', & B = (23)\,O', & T' = (13)\,S' \\
T = (13)\,S, & S'' = (32)\,S, & T'' = (13)\,S'', & C = (32)\,S''. \\
D = (12)\,C, & E = (32)\,D, & A' = (12)\,E, & B'' = (12)\,A'. \\
O'' = (13)\,B'', & A'' = (13)\,O'', & E' = (21)\,A'', & D' = (23)\,E'. \\
C' = (21)\,D', & S_1 = (23)\,C', & S_2 = (23)\,S_1, & S_3 = (23)\,S_2. \\
O_2 = (23)\,S_3, & O_1 = (13)\,B, & A = (13)\,O_1, & B' = (12)\,A. \\
Y = (12)\,T'', & Y' = (32)\,Y, & Y'' = (32)\,Y', & X = (32)\,Y''. \\
W = (32)\,X, & W' = (13)W, & K'' = (13)W', & V' = (12)\,Y'. \\
V = (12)\,Y, & O = (12)\,K'', & Q = (32)\,O. &
\end{array}
$$

Der konstruierte Graph hat den Vorteil, daß aus der Richtung einer beliebigen seiner Strecken das Indexpaar des zugeordneten Prozesses (rs) abgelesen werden kann.

(Eingegangen am 29. Juli 1940.)

Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen.

Von

V. Garten.

Einleitung.

Die vorliegende Note gibt einige Ergänzungen zum Knopp-Schneeschen Satz, der bekanntlich die Äquivalenz der Cesaroschen Mittel k-ter Ordnung einer Folge (s_ν)

$$c_n^{(k)}(s_\nu) = c_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{\nu} c_\nu^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ c_\nu^{(0)} = s_\nu)$$

(C_k)

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit den gewöhnlichen Hölderschen Mitteln k-ter Ordnung derselben Folge (s_ν)

$$(H_k) \quad h_n^{(k)}(s_\nu) = h_n^{(k)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ h_\nu^{(0)} = s_\nu;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

aussagt, d. h. daß stets von

$$(I) \qquad c_n^{(k)}(s_\nu) = s + o(1) \text{ auf } h_n^{(k)}(s_\nu) = s + o(1) \quad (n \to \infty)$$

und umgekehrt von

$$(II) \qquad h_n^{(k)}(s_\nu) = s + o(1) \text{ auf } c_n^{(k)}(s_\nu) = s + o(1) \quad (n \to \infty)$$

geschlossen werden kann[1]). Ersetzt man hier die gewöhnlichen Mittel einer Folge (s_ν) durch die entsprechenden Integralmittel einer Funktion $s(t)$, also die Cesaroschen Mittel durch die Rieszschen Integralmittel

$$c^{(k)}(x; s(t)) = c^{(k)}(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{k-1} c^{(k-1)}(t)\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots;\ c^{(0)}(t) = s(t))$$

(1)

$$= \frac{k}{x^k} \int_0^x (x-t)^{k-1} s(t)\, dt = \frac{k!}{x^k} S^{(k)}(x) \quad (0 < x < \infty)$$

[1]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 498. — Ebenda finden sich die meisten Beweise für den Äquivalenzsatz namhaft gemacht.

und die gewöhnlichen HÖLDERschen Mittel durch ihre entsprechende Integralmittelbildung

$$(2)\quad h^{(k)}(x;s(t)) = h^{(k)}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x h^{(k-1)}(t)\,dt \quad (k=1,2,\ldots;\ h^{(0)}(t)=s(t);\ 0<x<\infty),$$

so gilt für diese Integralmittel ebenfalls der Äquivalenzsatz[2]), nämlich der

Satz: *Aus*

$$(\mathrm{I}')\qquad c^{(k)}(x;s(t)) = s + o(1) \text{ } \textit{folgt stets} \text{ } h^{(k)}(x;s(t)) = s + o(1)$$

und umgekehrt folgt aus

$$(\mathrm{II}')\qquad h^{(k)}(x;s(t)) = s + o(1) \text{ } \textit{stets} \text{ } c^{(k)}(x;s(t)) = s + o(1).$$

Der Beweis des Äquivalenzsatzes beruht allemal darauf, daß eine der beiden miteinander verglichenen Mittelbildungen selbst wieder durch eine permanente Mittelbildung aus der anderen hervorgeht. Durch eine übersichtliche Rekursion läßt sich letztere bzw. ihre Inverse direkt angeben[3]). Aus dieser Darstellung wird nicht nur der Äquivalenzsatz selbst gewonnen, sondern — und dies stellt das Hauptziel der Mitteilung dar — es werden in Erweiterung desselben auch dann noch Aussagen über das Verhalten beider Mittelbildungen erhalten, wenn in (I′) und (II′) die Voraussetzung der Konvergenz durch diejenige der Beschränktheit ersetzt wird.

Mit den Bezeichnungen

$$(3)\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\, c^{(k)}(x) = \begin{vmatrix} C_k \\ c_k \end{vmatrix}, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\, h^{(k)}(x) = \begin{vmatrix} H_k \\ h_k \end{vmatrix},$$

$$C_k - c_k = \Omega(C_k), \qquad H_k - h_k = \Omega(H_k)$$

---

[2]) Vgl. E. LANDAU, Die Identität des CESÀROschen und HÖLDERschen Grenzwertsatzes für Integrale. Ber. über die Verh. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig **65** (1913), S. 131—138; M. JACOB, Über die Äquivalenz der CESAROschen und der HÖLDERschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$. Math. Zeitschr. **26** (1927); N. OBRESCHKOFF, Über die CESAROschen und HÖLDERschen Mittelwerte und Integrale. Ber. über die Verh. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig **82** (1930), S. 209—215.

[3]) Dies findet sich für gewöhnliche Mittelbildungen, worauf mich Herr KNOPP freundlicherweise aufmerksam machte, durchgeführt bei J. SCHUR: „Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen", Sitzungsber. Berl. Math. Ges., 29. Jahrgang (1930), während sein früherer Beweis (s. [8])) und der LANDAUsche Beweis[2]) des Äquivalenzsatzes die vermittelnde Transformation lediglich für I und I′ explizite darstellen.

liefert die Anwendung des Knoppschen Kernsatzes[4]) bereits eine solche Erweiterung des Äquivalenzsatzes in einer Richtung, nämlich die Ungleichungen (vom direkten Typ)

$$(D) \qquad c_k \leqq h_k \leqq H_k \leqq C_k \quad \text{bzw.} \quad \Omega(H_k) \leqq \Omega(C_k).$$

Als Erweiterung in umgekehrter Richtung liegt (allerdings für die gewöhnlichen Mittelbildungen) wohl nur ein Ergebnis von Winn[5]) vor:

$$(U) \qquad \Omega(C_k) \leqq \omega_k \Omega(H_k),$$

wobei Winn für diese Konstante ω_k den Wert $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)$ angibt. Diese Konstante läßt sich jedoch, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, (wenigstens für Integralmittel) im allgemeinen verbessern. Hingegen ist, wie an einem Beispiel gezeigt wird, die weiter unten angegebene Konstante $\omega_k = k!\,(1+\gamma_k)$ die bestmögliche.

Unter der Nebenbedingung

$$(4) \qquad C_{k+1} = c_{k+1} = s \quad (\text{bzw. } H_{k+1} = h_{k+1} = s)$$

hat Dobrowolski[6]) (für gewöhnliche Mittel) die Relationen

$$(5) \qquad k!\,(H_k - s) = C_k - s, \quad k!\,(s - h_k) = s - C_k \quad \text{bzw. } \Omega(C_k) = k!\Omega(H_k)$$

bewiesen. Ohne jedoch die stark einschränkende Voraussetzung (4) zu machen, also die Konvergenz der Mittel $(k+1)$-ter Ordnung zu fordern, lassen sich unter der schwächeren Voraussetzung der Beschränktheit der C_{k+1}-Mittel die Ungleichungen

$$(6) \quad k!\Omega(H_k) - (k!-1)\,\Omega(C_{k+1}) \leqq \Omega(C_k) \leqq k!\Omega(H_k) + (k!-1)\,\Omega(C_{k+1})$$

ableiten, deren linke Seite für $\Omega(C_{k+1}) < \Omega(H_k)$ dann eine Verbesserung der Aussage (D), deren rechte Seite für $\Omega(C_{k+1}) < \left(1 + \frac{1}{k!-1}\right)\gamma_k \Omega(H_k)$ eine Verschärfung der Aussage (U) bedeutet. Unter der Voraussetzung (4) liefert (6) die Gleichung (5) als Sonderfall. Die Ungleichungen (6) lassen sich unter Heranziehung der Schwankungsintervalle der C_k-Mittel von beliebig hoher Ordnung noch erweitern (vgl. § 2). Diese Erweiterung lautet z. B. für $k = 2$:

$$(6') \qquad \begin{aligned} &2\Omega(H_2) - \Omega(C_n) - \sum_{\nu=3}^{n-3} \frac{2}{\nu(\nu-1)}\{\Omega(C_\nu) - \Omega(C_n)\} \\ &\leqq \Omega(C_2) \leqq 2\Omega(H_2) + \Omega(C_n) + \sum_{\nu=3}^{n-3} \frac{2}{\nu(\nu-1)}\{\Omega(C_\nu) - \Omega(C_n)\}. \end{aligned}$$

---

[4]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren, 1. Mitt., Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 115.

[5]) C. E. Winn, Sur une comparaison entre l'oscillation des moyennes de Cesaro et de Hölder. C. R. **194** (1932), S. 2273–2275.

[6]) S. Dobrowolski, Sur les valeurs limites de moyennes de Cesàro et de Hölder. Bull. intern. de l'Acad. Polon. des sc. (Krakau) Sér. A. 1925, S. 259–264.

§ 1.

Überführung der Rieszschen in die Hölderschen Mittel.

Wir betrachten zunächst die echte Mittelbildung, welche die Rieszschen Mittel in die Hölderschen Integralmittel gleicher Ordnung überführt. Sie ergibt sich mit Hilfe der folgendermaßen rekursiv erklärten Funktionen

$$(7)\qquad \begin{cases} P_{k+1}(\tau) = P_k(\tau) + k\left(1 + \int\limits_{\tau}^{1} \frac{P_k(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha\right) & (k = 1, 2, \ldots), \\ P_1(\tau) \equiv 0 & (0 \leqq \tau \leqq 1) \end{cases}$$

durch Bildung der linearen Transformation:

$$(8)\qquad M_k(x) = M_k(x; s(\tau)) = \frac{1}{k!}\left\{s(x) + \int\limits_{0}^{1} P_k(\tau)\, s(\tau x)\, d\tau\right\},$$

einer über jedes Intervall der Form $(0, x)$ integrierbaren Funktion $s(t)$.

Für diese neue Mittelbildung M_k gilt nämlich der

Satz 1. *Die Transformation M_k führt erstens die Rieszschen in die Hölderschen Integralmittel gleicher Ordnung über, d. h. es gilt*

$$(9)\qquad M_k(x; c^{(k)}(\tau)) = h^{(k)}(x),$$

und sie ist zweitens permanent, d. h. aus $s(x) \to s$ folgt allemal

$$M_k(x) \to s \quad (x \to \infty).$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für $k = 1$ trifft die Behauptung (9) definitionsgemäß zu. Sie sei bereits für $k = 1, 2, \ldots, p$ als richtig erkannt. Dann gilt

$$h^{(p+1)}(x) = \frac{1}{p!}\,\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x}\left|c^{(p)}(t) + \frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t} P_p\left(\frac{y}{t}\right) c^{(p)}(y)\, dy\right| dt$$

$$= \frac{1}{p!}\,\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} y^p\, c^{(p)}(y)\cdot\frac{1}{y^p}\left|1 + \int\limits_{y}^{x}\frac{1}{t}\, P_p\left(\frac{y}{t}\right) dt\right| dy.$$

Da nun aber die Funktion

$$F(y, x) = \frac{1}{y^p}\left|1 + \int\limits_{y}^{x}\frac{1}{t}\, P_p\left(\frac{y}{t}\right) dt\right|$$

die partielle Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{y^{p+1}}\left\{P_p\left(\frac{y}{x}\right) + p + \int_y^x \frac{1}{t} P_p\left(\frac{y}{t}\right) dt\right\} = -\frac{P_{p+1}\left(\frac{y}{x}\right)}{y^{p+1}}$$

besitzt, liefert teilweise Integration wegen $y^\nu c^{(p)}(y) = \frac{1}{p+1}\left(y^{p+1} c^{(p+1)}(y)\right)'$ die Beziehung

$$h^{(p+1)}(x) = \frac{1}{(p+1)!}\,\frac{1}{x}\left\{x\, c^{(p+1)}(x) + \int_0^x c^{(p+1)}(y) \cdot P_{p+1}\left(\frac{y}{x}\right) dy\right\}$$

$$= M_{p+1}\left(x; c^{(p+1)}(y)\right).$$

Das ist aber gerade die Behauptung für $k = p+1$.

Für die Permanenz des Verfahrens genügt es, weil stets $P_k(\tau) \geqq 0$ ist, nachzuweisen, daß die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{k!}\left(1 + \int_0^1 P_k(\tau)\, d\tau\right) = 1 \tag{10}$$

und

$$\frac{1}{x}\int_{T_1}^{T_2} P_k\left(\frac{t}{x}\right) dt \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \text{ bei festen } T_2 > T_1 > 0 \tag{11}$$

erfüllt sind. Aus der bereits bewiesenen Beziehung (9) ergibt sich für die spezielle Wahl von $s(t) \equiv 1$, welche ja auch $c^{(k)}(t) \equiv 1$ und $h^{(k)}(t) \equiv 1$ zur Folge hat, die Richtigkeit von (10). Für den Nachweis von (11) beachte man, daß die Funktionen $P_k(\tau)$ Polynome über $\log\frac{1}{\tau}$ sind. Setzt man nämlich

$$P_k(\tau) = P_k(e^{-z}) = Q_k(z), \tag{12}$$

so gehen die Rekursionsformeln (7) über in die folgenden

$$\begin{cases} Q_{k+1}(z) = Q_k(z) + k\left(1 + \int_0^z Q_k(y)\, dy\right) & (k = 1, 2, \ldots), \\ Q_1(z) \equiv 0 & (0 \leqq z < \infty) \end{cases} \tag{13}$$

und mit

$$Q_k(z) = \sum_{\lambda=0}^{k-2} a_\lambda^{(k)} z^\lambda \tag{14}$$

gelten für die Koeffizienten demnach die Rekursionsformeln[7])

$$(15)\qquad \begin{cases} a_\lambda^{(k)} = a_\lambda^{(k-1)} + \dfrac{k-1}{\lambda}\, a_{\lambda-1}^{(k-1)} & (\lambda = 1, 2, \ldots, k-2), \\ a_0^{(k)} = \binom{k}{2}. \end{cases}$$

Der Beweis von (11) läßt sich jetzt leicht durch vollständige Induktion erbringen. Für $k = 2$ ist (11) trivial. Wegen (7) und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\int_{T_1/x}^{T_2/x} P_k(\tau)\, d\tau = \int_{T_1/x}^{T_2/x} P_{k-1}(\tau)\, d\tau + (k-1)\,\frac{T_2 - T_1}{x} + \\ + (k-1) \int_{T_1/x}^{T_2/x} \int_{\tau}^{1} \frac{P_k(\tau)}{\tau}\, d\alpha\, d\tau \to 0,$$

sobald nur der letzte Summand für $x \to \infty$ selbst gegen Null strebt. Das ist tatsächlich der Fall. Denn aus

$$(16)\qquad P_k(\tau) = \sum_{\lambda=0}^{k-2} a_\lambda^{(k)} \left(\log \frac{1}{\tau}\right)^\lambda$$

folgt zunächst

$$\int_{\tau}^{1} \frac{P_k(\tau)}{\tau}\, d\alpha = (k-1) \sum_{\lambda=0}^{k-2} \frac{a_\lambda^{(k)}}{\lambda+1} \left(\log \frac{1}{\tau}\right)^{\lambda+1},$$

und man hat nunmehr lediglich die Abschätzung

$$\int_{T_1/x}^{T_2/x} \left(\log \frac{1}{\tau}\right)^{\lambda+1} d\tau < \frac{T_2}{x}\, \frac{1}{\lambda+2} \left(\log \frac{x}{T_1}\right)^{\lambda+2} \to 0, \qquad x \to \infty$$

zu berücksichtigen.

---

[7]) Durch Aufsummieren erhält die Rekursionsformel (15) die Gestalt

$$a_\lambda^{(k)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\nu=\lambda+1}^{k-1} \nu\, a_{\lambda-1}^{(\nu)}.$$

Nach Einführung der symbolischen Schreibweise

$$\left(\sum\right)^{\lambda+1} \nu = \sum_{\nu=\lambda+1}^{k-1} \nu \left(\sum\right)^{\lambda} \mu, \qquad \left(\sum\right)^{1} \nu = \sum_{\nu=1}^{k-1} \nu = \binom{k}{2}$$

kann man sie daher auch in der Form

$$a_\lambda^{(k)} = \frac{1}{\lambda!} \left(\sum\right)^{\lambda+1} \nu$$

angeben.

Aus der soeben bewiesenen Darstellung der Transformation der C_k-Mittel in die H_k-Mittel ergibt sich nun ohne Mühe die schon von J. SCHUR[8]) bzw. E. LANDAU[2]) angegebene Darstellung

$$h^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu^{(k)} h^{(\nu)}\{x; c^{(k)}(t)\}, \tag{17}$$

wobei

$$h^{(\nu)}\{x; c^{(k)}(t)\} = \frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{1}{x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\nu-1} c^{(k)}(t)\,dt \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

und

$$h^{(0)}\{x; c^{(k)}(t)\} = c^{(k)}(x)$$

gesetzt ist.

Die Transformation (8) läßt sich nämlich mit Rücksicht auf (12), (14) in der Form

$$M_k(x) = \frac{1}{k!}\left\{s(x) + \sum_{\nu=1}^{k-1} (\nu-1)!\, a_{\nu-1}^{(k)} \cdot \frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{1}{x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\nu-1} s(t)\,dt\right\} \tag{18}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu^{(k)} h^{(\nu)}\{x; s(t)\}$$

schreiben, wenn

$$\alpha_\nu^{(k)} = \frac{(\nu-1)!}{k!}\, a_{\nu-1}^{(k)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \quad \alpha_0^{(k)} = \frac{1}{k!} \tag{19}$$

gesetzt wird. Wegen (15) genügen die Koeffizienten $\alpha_\nu^{(k)}$ der Rekursionsformel

$$\alpha_\nu^{(k)} = \frac{\alpha_\nu^{(k-1)} + (k-1)\,\alpha_{\nu-1}^{(k-1)}}{k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \quad \alpha_0^{(k)} = \frac{1}{k!}. \tag{20}$$

Überdies erkennt man leicht, daß $\alpha_\nu^{(k)} \geqq 0$ und $\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu^{(k)} = 1$ gilt. Daher läßt sich die Permanenzeigenschaft der Mittelbildung M_k auch aus derjenigen der H_k-Mittel unter Berücksichtigung der letztgenannten Beziehungen gewinnen.

§ 2.

Vergleich der Schwankungsintervalle der Rieszschen und Hölderschen Integralmittel unter Nebenbedingungen.

In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von S. DOBROWOLSKI[6]) gilt der Satz:

---

[8]) J. SCHUR, Über die Äquivalenz der CESÀROschen und HÖLDERschen Mittelwerte. Math. Ann. **74** (1913), S. 447–458, insbesondere S. 452, unten.

Satz 2: *Unter der Voraussetzung, daß $\Omega(H_k)$ endlich ist, und unter Berücksichtigung der Schwankungsintervalle der* Rieszschen *Mittel von höherer Ordnung als k gelten die Ungleichungen*

$$k!\,\Omega(H_k) - (k!-1)\,\Omega(C_{k+p}) - \sum_{\nu=1}^{p-1} \zeta_\nu^{(k)} \{\Omega(C_{k+\nu}) - \Omega(C_{k+p})\}$$

(21)

$$\leqq \Omega(C_k) \leqq k!\,\Omega(H_k) + (k!-1)\,\Omega(C_{k+p}) + \sum_{\nu=1}^{p-1} \zeta_\nu^{(k)} \{\Omega(C_{k+\nu}) - \Omega(C_{k+p})\}.$$

Die Koeffizienten $\zeta_\nu^{(k)}$ sind hierbei wohlbestimmte Zahlen, die sich in der Bezeichnungsweise des § 1 wie folgt ausdrücken:

$$(22)\quad \zeta_{\nu+1}^{(k)} = \frac{k!}{(k+\nu+1)!} Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0) = \frac{\nu!\,k!}{(k+\nu+1)!} a_\nu^{(k+\nu)} = \frac{k!}{k+\nu+1} \alpha_\nu^{(k+\nu)}$$

Beweis: Aus der Rekursionsformel (15) ergibt sich durch n-malige Differentiation und gleichzeitiges Ersetzen von k durch $k+p$ und n durch $p+1$ die Beziehung

$$(23)\qquad Q_{k+p+1}^{(p+1)}(z) = Q_{k+p}^{(p+1)}(z) + (k+p)\,Q_{k+p}^{(p)}(z).$$

Daher gilt

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{k+p}}[Q_{k+p}^{(p)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}\right\} = -\frac{1}{t^{k+p+1}}[Q_{k+p+1}^{(p+1)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}$$

und folglich wegen der Bildungsweise der Rieszschen Mittel

$$\frac{1}{(k+p)!}\int_0^x c^{(k+p)}(t)\,[Q_{k+p}^{(p)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\frac{S^{(k+p+1)}(t)}{t^{k+p}}[Q_{k+p}^{(p)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}\right\}_0^x + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{S^{(k+p+1)}(t)}{t^{k+p+1}}[Q_{k+p+1}^{(p+1)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}\,dt.$$

Hiermit ergibt sich bei wiederholter partieller Integration aus (9), d. h. aus

$$(24)\quad h^{(k)}(x) - \frac{1}{k!}c^{(k)}(x) = \frac{1}{k!}\frac{1}{x}\int_0^x P_k\left(\frac{t}{x}\right)c^{(k)}(t)\,dt = \frac{1}{k!}\frac{1}{x}\int_0^x Q_k\left(\log\frac{x}{t}\right)c^{(k)}(t)\,dt$$

die Beziehung

$$(25)\quad h^{(k)}(x) = \frac{1}{k!}c^{(k)}(x) + \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0)}{(k+\nu+1)!}c^{(k+\nu+1)}(x) +$$

$$+ \frac{1}{(k+p)!}\frac{1}{x}\int_0^x c^{(k+p)}(t)\,[Q_{k+p}^{(p)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}\,dt$$

Bei der speziellen Wahl $s(t) \equiv 1$ folgt insbesondere

$$(26)\quad S_{k,p} \equiv \frac{1}{x}\,\frac{1}{(k+p)!}\int_0^x [Q_{k+p}^{(p)}(z)]_{z=\log\frac{x}{t}}\,dt = 1 - \frac{1}{k!} - \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0)}{(k+\nu+1)!}.$$

Läßt man in (25) nunmehr x derart gegen ∞ rücken, daß $c^{(k)}(x) \to C_k$ strebt, so erhält man mit Rücksicht auf $a_\lambda^{(k)} \geqq 0$ und (26) die Ungleichung:

$$H_k + \varepsilon \geqq \frac{1}{k!}\,C_k + \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0)}{(k+\nu+1)!}(c_{k+\nu+1} - \varepsilon) + S_{k,p}\cdot(c_{k+p} - \varepsilon).$$

Wählt man aber x derart, daß $c^{(k)}(x) \to c_k$ strebt, so folgt

$$h_k - \varepsilon \leqq \frac{1}{k!}\,c_k + \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0)}{(k+\nu+1)!}(C_{k+\nu+1} + \varepsilon) + S_{k,p}\cdot(C_{k+p} + \varepsilon).$$

Beide Ungleichungen zusammen liefern wegen der Willkürlichkeit von $\varepsilon > 0$ und der Bedeutung von $S_{k,p}$ die Beziehung

$$(27)\quad \Omega(H_k) \geqq \frac{1}{k!}\,\Omega(C_k) - \left(1 - \frac{1}{k!}\right)\Omega(C_{k+p}) - \\ - \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0)}{(k+\nu+1)!}\{\Omega(C_{k+\nu+1}) - \Omega(C_{k+p})\},$$

der sich durch ein entsprechendes Verfahren, wenn man nämlich erstens x derart wählt, daß $h^{(k)}(x) \to H_k$, und zweitens derart, daß $h^{(k)}(x) \to h_k$ strebt, die Ungleichung

$$(28)\quad \Omega(H_k) \leqq \frac{1}{k!}\,\Omega(C_k) + \left(1 - \frac{1}{k!}\right)\Omega(C_{k+p}) + \\ + \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{Q_{k+\nu}^{(\nu)}(0)}{(k+\nu+1)!}\{\Omega(C_{k+\nu+1}) - \Omega(C_{k+p})\}$$

an die Seite stellen läßt. Beide Beziehungen (27) und (28) zusammen ergeben die Behauptung des Satzes 2.

Speziell für $k = 2$ wird

$$\zeta_{\nu+1}^{(2)} = \frac{(\nu+2)!\,2}{(\nu+3)!} = \frac{2}{(\nu+2)(\nu+3)},$$

weil nach der Rekursionsformel (15) $a_\nu^{(\nu+2)} = \nu + 1$ ist. Dies führt auf die in der Einleitung genannte Beziehung (6′).

Für $p = 1$ ergibt sich die Ungleichung (6) als Sonderfall, die für $\Omega(C_{k+1}) = 0$ die Dobrowolskische Aussage enthält.

§ 3.

Überführung der Hölderschen in die Rieszschen Mittel.

Mit Hilfe der durch die Rekursionsformel

$$(29)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_{k+1}(\tau) = \mathfrak{P}_k(\tau) + k\,\tau^k\left(1 - \int\limits_\tau^1 \frac{\mathfrak{P}_k(\alpha)}{\alpha^{k+1}}\,d\alpha\right) & (k = 1, 2, \ldots) \\ \mathfrak{P}_1(\tau) = 0 & (0 \leqq \tau \leqq 1) \end{cases}$$

erklärten Polynome $\mathfrak{P}_k(\tau)$ von $(k-1)$-ter Ordnung in τ bilde man für eine über jedes Intervall der Form $(0, x)$ integrierbare Funktion $s(t)$ die lineare Transformation:

$$(30)\qquad \mathfrak{M}_k(x) = \mathfrak{M}_k(x; s(\tau)) = k!\,\{s(x) - \int\limits_0^1 \mathfrak{P}_k(\tau)\,s(\tau x)\,d\tau\}.$$

Diese neue Mittelbildung ist zu der in § 1 betrachteten Mittelbildung M_k invers. Es gilt nämlich der

Satz 3: *Die Transformation $\mathfrak{M}_k$ führt erstens die Hölder schen Integralmittel in die Riesz schen Mittel gleicher Ordnung über, d. h. es gilt*

$$(31)\qquad \mathfrak{M}_k(x; h^{(k)}(\tau)) = c^{(k)}(x)$$

und sie ist zweitens permanent, d. h. aus $s(x) \to s$ folgt allemal

$$\mathfrak{M}_k(x) \to s \quad (x \to \infty).$$

Der Beweis erfolgt wie in § 1 durch vollständige Induktion. Für $k = 1$ gilt (31) auf Grund der Definition beider Mittelbildungen C_k und H_k. Es sei nun (31) bereits für $k = 1, 2, \ldots, p$ richtig. Dann gilt

$$(32)\qquad \begin{aligned} c^{(p+1)}(x) &= \frac{(p+1)!}{x}\int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^p \left\{h^{(p)}(t) - \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathfrak{P}_p\left(\frac{y}{t}\right) h^{(p)}(y)\,dy\right\} dt \\ &= \frac{(p+1)!}{x}\int\limits_0^x h^{(p)}(y)\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^p - \frac{1}{x}\int\limits_y^x \left(\frac{t}{x}\right)^{p-1} \mathfrak{P}_p\left(\frac{y}{t}\right) dt\right\} dy. \end{aligned}$$

Wird der in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck zur Abkürzung mit $f(y, x)$ bezeichnet, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}\left\{\mathfrak{P}_p\left(\frac{y}{x}\right) + p\left(\frac{y}{x}\right)^p - \frac{p}{x}\int\limits_y^x \left(\frac{t}{x}\right)^{p-1} \mathfrak{P}_p\left(\frac{y}{t}\right) dt\right\} = \frac{1}{y}\,\mathfrak{P}_{p+1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Partielle Integration in (32) liefert jetzt wegen $h^{(p)}(y) = (y h^{(p+1)}(y))'$ unmittelbar die Behauptung (31) für $k = p + 1$.

Der Nachweis der Permanenzeigenschaft folgt aus dem Bestehen der folgenden drei Bedingungen

$$\int_0^1 \mathfrak{P}_k(\tau)\, d\tau = 1 - \frac{1}{k!}, \tag{33}$$

$$\int_{T_1/x}^{T_2/x} \mathfrak{P}_k(\tau)\, d\tau \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty \quad \text{bei festen} \quad T_2 > T_1 > 0, \tag{34}$$

$$\int_0^1 |\mathfrak{P}_k(\tau)|\, d\tau < \overline{\mathfrak{M}}_k \qquad (\overline{\mathfrak{M}}_k \text{ konstant}). \tag{35}$$

Aus der bereits bewiesenen Beziehung (31) ergibt sich nämlich für $s(t) \equiv 1$ das Bestehen von (33). Die Aussage (35) ist trivial. Die Aussage (34) folgt daraus, daß $\mathfrak{P}_k(\tau)$ ein Polynom ist.

Setzt man nämlich

$$\mathfrak{P}_k(\tau) = \tau^{k-1}\, \Omega_k\left(\frac{1}{\tau}\right), \tag{36}$$

so erhält man aus (29) die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} \Omega_{k+1}(z) = z\, \Omega_k(z) + k\left(1 + \int_z^1 \Omega_k(y)\, dy\right) & (k = 1, 2, \ldots) \\ \Omega_1(z) \equiv 0. \end{cases} \tag{37}$$

Wird ferner

$$\Omega_k(z) = \sum_{\lambda=0}^{k-2} b_\lambda^{(k)} z^\lambda \tag{38}$$

geschrieben, so genügen die Koeffizienten $b_\lambda^{(k)}$ den Beziehungen

$$\begin{cases} b_\lambda^{(k)} = \left(1 - \frac{k-1}{\lambda}\right) b_{\lambda-1}^{(k-1)} & (\lambda = 1, 2, \ldots, k-2), \\ b_0^{(k)} = \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!}. \end{cases} \tag{39}$$

Durch vollständige Induktion beweist man daher leicht die explizite Darstellung der Koeffizienten in der Form

$$b_\lambda^{(k)} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{(k-\lambda-1)^{k-1}}{(k-\lambda-2)!} = (-1)^\lambda \binom{k-1}{\lambda} \frac{(k-\lambda-1)^k}{(k-1)!}. \tag{40}$$

Mithin wird

$$\mathfrak{P}_k(\tau) = \tau \sum_{\nu=0}^{k-2} b_{k-2-\nu}^{(k)} \tau^\nu = (-1)^k \tau \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \frac{(\nu+1)^{k-1}}{\nu!\,(k-\nu-2)!} \tau^\nu. \tag{41}$$

Die Transformation $\mathfrak{M}_k$ läßt in Analogie zu den Ausführungen des § 1 eine weitere Darstellung zu, nach welcher die Rieszschen Mittel k-ter Ordnung sich

additiv aus den Rieszschen Mitteln o-ter bis k-ter Ordnung über den Hölderschen Mitteln k-ter Ordnung zusammensetzen. Es gilt

$$c^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu^{(k)} c^{(\nu)}\{x; h^{(k)}(t)\}, \tag{42}$$

wobei

$$\text{für } \nu = 1, 2, \ldots \qquad c^{(\nu)}\{x; h^{(k)}(t)\} = \frac{\nu}{x^\nu} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} h^{(k)}(t)\, dt$$

und

$$c^{(0)}\{x; h^{(k)}(t)\} = h^{(k)}(x)$$

gesetzt ist.

Es folgt dies daraus, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_k(x) &= k!\left\{s(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} b_{k-1-\nu}^{(k)} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^\nu s(t)\, dt\right\} \\ &= \beta_0^{(k)} s(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu^{(k)} \cdot \frac{\nu}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\nu-1} s(t)\, dt \end{aligned} \tag{43}$$

geschrieben werden kann, wenn

$$b_{k-1-\nu}^{(k)} = \frac{(-1)^\nu}{k!} \sum_{\mu=\nu+1}^{k} \mu\, \beta_\mu^{(k)} \binom{\mu-1}{\nu}; \quad \beta_0^{(k)} = k! \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{44}$$

gesetzt wird. Insbesondere gilt wegen (33) $\sum_{\nu=1}^{k} \nu \beta_\nu^{(k)} = 0$.

§ 4.

Ungleichungen vom Umkehrtyp ohne Nebenbedingung.

Aus der in § 3 bewiesenen Beziehung

$$h^{(k)}(x) - \frac{1}{k!} c^{(k)}(x) = \int_0^1 \mathfrak{P}_k(\tau)\, h^{(k)}(\tau x)\, d\tau \tag{45}$$

werden in den folgenden Zeilen Ungleichungen hergeleitet, welche die Umkehrung der in der Einleitung angeführten direkten Aussage (D) darstellen. Wir formulieren sie als

Satz 4: *Ohne weitere zusätzliche Bedingung über die der Limitierung unterworfene Funktion $s(t)$ gelten die Ungleichungen*

$$k!\,[(1+\delta_k) h_k - \beta_k H_k] \leqq c_k \leqq C_k \leqq k!\,[(1+\delta_k) H_k - \beta_k h_k], \tag{46}$$

$$\Omega(C_k) \leqq k!\,(1+\gamma_k)\,\Omega(H_k), \tag{47}$$

wobei

$$\left.\begin{matrix}\beta_k\\ \delta_k\end{matrix}\right\} = \int_0^1 \frac{|\mathfrak{P}_k(\tau)| \pm \mathfrak{P}_k(\tau)}{2}\, d\tau, \quad \gamma_k = \beta_k + \delta_k. \tag{48}$$

gesetzt ist. — Es ist überdies $k!\,(1+\gamma_k)$ *in* (47) *die bestmögliche Konstante.*

Beweis: Ist $\Omega(H_k)$ unendlich, so ist die Aussage trivial. Andernfalls sei

$$|h^{(k)}(t)| < M \quad \text{für alle } t \geqq 0 \tag{49}$$

und bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$h_k - \varepsilon \leqq h^{(k)}(\tau x) \leqq H_k + \varepsilon \quad \text{für} \quad \tau > \frac{t_0}{x}, \; t_0 > 0 \quad \text{fest.} \tag{50}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\left.\begin{matrix}\overset{+}{J}\\ \bar{J}\end{matrix}\right\} = \int_{t_0/x}^1 \frac{|\mathfrak{P}_k(\tau)| \pm \mathfrak{P}_k(\tau)}{2}\, d\tau; \quad \left.\begin{matrix}\overset{+}{R}\\ \bar{R}\end{matrix}\right| = \int_0^{t_0/x} \frac{|\mathfrak{P}_k(\tau)| \pm \mathfrak{P}_k(\tau)}{2}\, d\tau, \tag{51}$$

$$J = \overset{+}{J} + \bar{J}; \quad R = \overset{+}{R} + \bar{R}, \tag{52}$$

so ist

$$\overset{+}{R} + \overset{+}{J} = \beta_k; \quad \bar{R} + \bar{J} = \delta_k; \quad R + J = \gamma_k. \tag{53}$$

Für $x \to \infty$ hat man, weil $\mathfrak{P}_k(\tau)$ ein mit τ verschwindendes Polynom ist, die Beziehungen

$$\overset{+}{R} = o(1), \quad \bar{R} = o(1); \quad R = o(1). \tag{54}$$

Mit Rücksicht auf (49) und (51) wird wegen (54)

$$\left|\int_0^{t_0/x} \mathfrak{P}_k(\tau)\, h^{(k)}(\tau x)\, d\tau\right| < M \int_0^{t_0/x} |\mathfrak{P}_k(\tau)|\, d\tau = M \cdot R = o(1). \tag{55}$$

Andererseits gilt wegen (50) und (51)

$$(h_k - \varepsilon)\overset{+}{J} - (H_k + \varepsilon)\bar{J} \leqq \int_{t_0/x}^1 \mathfrak{P}_k(\tau)\, h^{(k)}(\tau x)\, d\tau \leqq (H_k + \varepsilon)\overset{+}{J} - (h_k - \varepsilon)\bar{J}.$$

Nach (53), (54) und (55) gewinnt man hieraus die Abschätzung

$$(h_k - \varepsilon)\beta_k - (H_k + \varepsilon)\delta_k + o(1) \leqq h^{(k)}(x) - \frac{1}{k!}\, c^{(k)}(x) \leqq (H_k + \varepsilon)\beta_k - (h_k - \varepsilon)\delta_k + o(1),$$

aus der sich für $x \to \infty$ und wegen der Willkürlichkeit von $\varepsilon > 0$ die Behauptung (46) ergibt. Die Ungleichung (47) ist dann eine unmittelbare Folgerung aus (46).

Daß sich in (47) die Konstante $k!\,(1+\gamma_k)$ nicht verbessern läßt, zeigt das folgende Beispiel. Es sei

$$h^{(k)}(t) = \begin{cases} -\operatorname{sg} \mathfrak{P}_k(t) & \text{in } e^{-m} < t < 1, \qquad h^{(k)}(1) = +1 \\ +\operatorname{sg} \mathfrak{P}_k(t) & \text{in } e^{-2m} < t < e^{-m}, \; h^{(k)}(e^{-m}) = -1, \end{cases}$$

und außerhalb des Intervalls $(e^{-2m}, 1)$ sei $h^{(k)}(t)$ über die positive Halbachse durch die Festsetzung

$$h^{(k)}(t) = h^{(k)}(e^{-2m}t) = h^{(k)}(e^{2\lambda m}t) \quad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

erklärt. Hierdurch ist wegen $h^{(k-1)}(t) = (t h^{(k)}(t))'$ die Beispielfunktion $s(t)$ bis auf ihre Werte in den Sprungstellen von $h^{(k)}(t)$ eindeutig bestimmt. Wir erteilen ihr daselbst sowie in $t = 0$ den Wert Null. Es gilt nun ersichtlich $H_k = 1$, $h_k = -1$.

Zum Beweise zerlege man das Integral

$$J = \int_0^1 \mathfrak{P}_k(\tau)\, h^{(k)}(\tau x)\, d\tau$$

in die beiden Bestandteile

$$J_1(x) = \int_{e^{-m}}^1 \mathfrak{P}_k(\tau)\, h^{(k)}(\tau x)\, d\tau, \quad J_2(x) = \int_0^{e^{-m}} \mathfrak{P}_k(\tau)\, h^{(k)}(\tau x)\, d\tau.$$

Wegen $|h^{(k)}(t)| < 1$ und, weil $\mathfrak{P}_k(\tau)$ ein Polynom ist, findet man bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$|J_2(x)| \leqq \int_0^{e^{-m}} |\mathfrak{P}_k(\tau)|\, d\tau \equiv \varepsilon_m < \varepsilon \text{ für } m > m_0.$$

Mit $x_\lambda = e^{2\lambda m}$ und $y_\lambda = e^{(2\lambda-1)m}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ wird

$$J_1(x_\lambda) = -\int_{e^{-m}}^1 |\mathfrak{P}_k(\tau)|\, d\tau = -\gamma_k + \varepsilon_m,$$

$$J_1(y_\lambda) = +\int_{e^{-m}}^1 |\mathfrak{P}_k(\tau)|\, d\tau = +\gamma_k - \varepsilon_m.$$

Da nun nach (45)

$$h^{(k)}(x_\lambda) - \frac{1}{k!}\, c^{(k)}(x_\lambda) = J_2(x_\lambda) - \gamma_k + \varepsilon_m,$$

$$h^{(k)}(y_\lambda) - \frac{1}{k!}\, c^{(k)}(y_\lambda) = J_2(y_\lambda) + \gamma_k - \varepsilon_m$$

wird und $h^{(k)}(x_\lambda) = +1 = H_k$, $h^{(k)}(y_\lambda) = -1 = h_k$ ist, folgt für unser Beispiel

$$\frac{1}{k!}\, C_k \geqq H_k + \gamma_k - \varepsilon_m, \qquad \frac{1}{k!}\, c_k \leqq h_k - \gamma_k + \varepsilon_m$$

$$\Omega(C_k) \geqq k!\,\{\Omega(H_k) + 2\gamma_k\}$$

und wegen $\Omega(H_k) = 2$ gerade die Behauptung.

Die Wunsche Konstante würde für $k = 3$ lauten: $\omega_3 = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, während sich nach dem Satz 4 aus $\mathfrak{P}_3(\tau) = \tau(4\tau - 1)$ die Konstante $\gamma_k = \frac{41}{48}$ und somit $\omega_3 = 6\left(1 + \frac{41}{48}\right) = 11\,\frac{1}{8}$ ergibt.

(Eingegangen am 31. Juli 1940.)

Beziehungen zwischen Temperaturen und Potentialen.

Von

Lothar Koschmieder in Graz.

Kürzlich hat G. Doetsch Zusammenhänge zwischen Randwertaufgaben verschiedenen Gepräges hergestellt[1]); er knüpft daran die Hoffnung, daß seine Arbeit dazu anregen werde, weitere Beziehungen dieser Art aufzusuchen. Diesem Anstoß entstammen die folgenden Zeilen; sie dienen dem Zweck, die Ergebnisse von Doetsch, die sich auf zwei unabhängige Veränderliche beziehen, auf ihrer mehr auszudehnen.

§ 1.

Zusammensetzung von $n \geqq 2$ einstufigen Temperaturen.

Doetsch betrachtet zwei Gleichungen der linearen Wärmeleitung. Wir fassen hier $n \geqq 2$ solcher Gleichungen ins Auge,

$$\frac{\partial^2 W_k(x_k, t)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial W_k(x_k, t)}{\partial t}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

$$a_k < x_k < b_k, \tag{1.2}$$

$$0 < t; \tag{1.3}$$

jede von ihnen gilt in einem Halbstreifen (1. 2), (1. 3), wenn wir auf die Abhängigkeit von der räumlichen Veränderlichen x_k und der Zeit t achten. Wir bilden das Integral

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\infty \prod_k^{1,n} W_k(x_k, t)\, dt \tag{1.4}$$

und nehmen es in dem Quader (1. 2) als vorhanden und nach den x_k, deren Gesamtheit wir kurz mit X_n bezeichnen, als zweimal unter dem Integralzeichen ableitbar an [entsprechend bei den späteren Ansätzen (2. 2), (3. 3)]; dann ergibt sich mit Hilfe von (1. 1)

$$\sum_k^{1,n} \frac{\partial^2 U(X_n)}{\partial x_k^2} = \int_0^\infty \sum_k^{1,n} \left[\frac{\partial^2 W_k(x_k, t)}{\partial x_k^2} \prod_{l \neq k}^{1,n} W_l(x_l, t) \right] dt$$

$$= \int_0^\infty \sum_k^{1,n} \left[\frac{\partial W_k(x_k, t)}{\partial t} \prod_{l \neq k}^{1,n} W_l(x_l, t) \right] dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[\prod_k^{1,n} W_k(x_k, t) \right] dt,$$

$$\sum_k^{1,n} \frac{\partial^2 U(X_n)}{\partial x_k^2} = \lim_{t \to \infty} \prod_k^{1,n} W_k(x_k, t) - \lim_{t \to 0} \prod_k^{1,n} W_k(x_k, t), \tag{1.5}$$

[1]) Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 315–328.

wenn die beiden rechts stehenden Grenzwerte vorhanden sind. Stimmen sie zudem überein,

$$\lim_{t\to\infty}\prod_{k}^{1,n} W_k(x_k,t) = \lim_{t\to 0}\prod_{k}^{1,n} W_k(x_k,t), \tag{1.6}$$

so verschwindet die rechte Seite von (1. 5), und es bleibt

$$\sum_{k}^{1,n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = 0. \tag{1.7}$$

Setzt man also n Temperaturen W_k zu dem Integral (1. 4) *zusammen, so löst dieses* unter den angegebenen Annahmen *die Potentialgleichung* (1. 7) *im n-stufigen Quader* (1. 2) – kurz, U ist dort ein Potential.

Wenn man statt (1. 1) die Gleichungen zugrunde legt

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x_k^2} = \varepsilon_k\frac{\partial W_k}{\partial t}, \qquad \varepsilon_k = \pm 1,$$

so leitet man aus ihnen mit dem Ansatz (1. 4) ganz ähnlich die Beziehung her

$$\sum_{k}^{1,n}\varepsilon_k\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = 0.$$

Zu (1. 1), (1. 4) ein *Beispiel*, das dem von Doetsch a. a. O.[1]), S. 324 für $n = 2$ verwendeten in n Veränderlichen entspricht! Es sei

$$W_k(x_k,t) = \psi(x_k,t) = \frac{x_k}{2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}\exp\Big(-\frac{x_k^2}{4t}\Big); \quad a_k = 0,\ b_k = \infty \tag{1.8}$$

in (1. 2). Das Produkt der n Funktionen $\psi(x_k,t)$ erfüllt die Beziehung (1. 6); der gemeinsame Wert ihrer beiden Seiten ist hier 0. Nach (1. 5) wird in dem 2^n-ten Teile $\mathfrak{R}$ des Raumes der x_k, in dem alle $x_k > 0$ sind,

$$U(X_n) = \frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}\prod_{k}^{1,n} x_k\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}n}\exp\Big(-\frac{1}{4t}\sum_{j}^{1,n}x_j^2\Big)\,dt.$$

Eine Teilintegration liefert

$$U(X_n) = \frac{1}{2^{n-2}\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\prod_{k}^{1,n} x_k}{\sum_{k}^{1,n} x_k^2}\Big[t^{-\frac{3}{2}n+2}\exp\Big(-\frac{1}{4t}\sum_{j}^{1,n}x_j^2\Big)\Big|_0^\infty +$$

$$+\Big(\frac{3}{2}n-2\Big)\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}n+1}\exp\Big(-\frac{1}{4t}\sum_{j}^{1,n}x_j^2\Big)\,dt\Big];$$

der aus dem Integralzeichen herausgetretene Ausdruck verschwindet. Setzt man die Teilintegration fort und unterscheidet gerade und ungerade n, so findet man für $n = 2\lambda$ nach $3\lambda - 2$ Schritten

$$U(x_1, \ldots, x_{2\lambda}) = \frac{2^{4\lambda-4}(3\lambda-2)!}{\pi^{\lambda}} \frac{\prod_k^{1,2\lambda} x_k}{\left(\sum_k^{1,2\lambda} x_k^2\right)^{3\lambda-2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\sum_j^{1,2\lambda} x_j^2\right) dt$$

und daraus schließlich mit Hilfe einer von DOETSCH[1]) angegebenen Formel [S. 324, (3. 4)]

$$(1.9) \qquad U(x_1, \ldots, x_{2\lambda}) = \frac{2^{4\lambda-2}(3\lambda-2)!}{\pi^{\lambda}} \frac{\prod_k^{1,2\lambda} x_k}{\left(\sum_k^{1,2\lambda} x_k^2\right)^{3\lambda-1}}.$$

Ist $n = 2\lambda + 1$, so ergibt sich nach 3λ Teilintegrationen

$$U(x_1, \ldots, x_{2\lambda+1}) = \frac{2^{4\lambda-1}\Gamma(3\lambda+\frac{1}{2})}{\pi^{\lambda+\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\prod_k^{1,2\lambda+1} x_k}{\left(\sum_k^{1,2\lambda+1} x_k^2\right)^{3\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\sum_j^{1,2\lambda+1} x_j^2\right) dt.$$

Der Integrand ist nach (1. 8) bis auf den fehlenden Faktor $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\sum_j^{1,2\lambda+1} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ die Größe $\psi\left[\left(\sum_j^{1,2\lambda+1} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, t\right]$; dank dem Werte des LAPLACEschen Bildes dieser Funktion[2]) erhält man mithin

$$(1.10) \qquad U(x_1, \ldots, x_{2\lambda+1}) = \frac{2^{4\lambda}\Gamma(3\lambda+\frac{1}{2})}{\pi^{\lambda}\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\prod_k^{1,2\lambda+1} x_k}{\left(\sum_k^{1,2\lambda+1} x_k^2\right)^{3\lambda+\frac{1}{2}}}.$$

Von λ zu n zurückkehrend, kann man den beiden Ausdrücken (1. 9), (1. 10) die gemeinsame Gestalt geben

$$(1.11) \qquad U(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2^{2n-2}\Gamma(\frac{3}{2}n-1)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\prod_k^{1,n} x_k}{\left(\sum_k^{1,n} x_k^2\right)^{\frac{3}{2}n-1}}.$$

---

[1]) G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation (1937), S. 25.

Diese — mit einem unwesentlichen Zahlenfaktor behaftete — Funktion ist eine Lösung der Potentialgleichung (1. 7) in $\mathfrak{R}$, und zwar eine singuläre im Sinne von Doetsch [1), S. 325; 2), S. 363]: sie strebt mit $x_k \to 0$ bei festen $x_l > 0$ $(l \neq k)$ gegen 0.

§ 2.

Zusammensetzung mehrerer mehrstufiger Temperaturen.

Wir verallgemeinern den Ansatz von Doetsch zweitens in der Richtung, daß wir statt der linearen Wärmeleitung diesen Vorgang in mehreren Ausdehnungen betrachten. Es sei also $\mathfrak{X}_k$ ein Gebiet von $N_k - N_{k-1}$ Stufen $(k = 1, \ldots, n;\ N_0 = 0)$; ein Punkt von $\mathfrak{X}_k$ habe die Bestimmungszahlen $x_{N_{k-1}+1}, \ldots, x_{N_k}$, deren Gesamtheit mit X_k bezeichnet sei. In jedem der Gebiete $\mathfrak{X}_k$ und in (1. 3) gelte die Gleichung

$$\sum_{h}^{N_{k-1}+1, N_k} \frac{\partial^2 W_k(X_k, t)}{\partial x_h^2} = \frac{\partial W_k(X_k, t)}{\partial t}. \tag{2. 1}$$

Man bilde aus den Temperaturen W_k das von allen x_K $(K = 1, \ldots, N_n)$ abhängige Integral

$$U(x_1, \ldots, x_{N_n}) = \int_0^\infty \prod_k^{1, n} W_k(X_k, t)\, dt \tag{2. 2}$$

und setze die Grenzwerte von $\prod_k^{1, n} W_k(X_k, t)$ für $t \to \infty$ und $t \to 0$ als vorhanden und übereinstimmend voraus. Dann findet man mit Rücksicht auf (2. 1)

$$\sum_K^{1, N_n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_K^2} = \int_0^\infty \sum_k^{1, n} \Big[\sum_h^{N_{k-1}+1, N_k} \frac{\partial^2 W_k(X_k, t)}{\partial x_h^2} \prod_{l \neq k}^{1, n} W_l(X_l, t) \Big] dt$$

$$= \int_0^\infty \sum_k^{1, n} \Big[\frac{\partial W_k(X_k, t)}{\partial t} \prod_{l \neq k}^{1, n} W_l(X_l, t) \Big] dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \Big[\prod_k^{1, n} W_k(X_k, t) \Big] dt$$

$$= \lim_{t \to \infty} \prod_k^{1, n} W_k(X_k, t) - \lim_{t \to 0} \prod_k^{1, n} W_k(X_k, t) = 0.$$

Setzt man also n Temperaturen von $N_k - N_{k-1}$ Stufen zu dem Integral (2. 2) *zusammen, so genügt dieses* bei den gemachten Annahmen *im N_n-stufigen Durchschnitt der Gebiete $\mathfrak{X}_k$ der Potentialgleichung*

$$\sum_K^{1, N_n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_K^2} = 0.$$

§ 3.

Zusammensetzung einer mehrstufigen Temperatur und eines mehrstufigen Potentials.

Wir betrachten *zwei* partielle Differentialgleichungen. W sei eine n-stufige Temperatur, abhängig von den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, t$, für positive t erklärt im n-stufigen Durchschnitt $\mathfrak{X}_n$[3]) des Gebietes $\mathfrak{X}_m$ der $m < n$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ und des Gebietes $\mathfrak{X}_{n-m}$ der $n - m$ Veränderlichen $x_{m+1}, \ldots, x_n$; wir bezeichnen sie mit $W(X_n, t)$. Sie befriedigt in $\mathfrak{X}_n$ für $t > 0$ die Differentialgleichung

$$(3.1)\quad \sum_h^{1,n} \frac{\partial^2 W(X_n,t)}{\partial x_h^2} = \sum_h^{1,m} \frac{\partial^2 W(X_n,t)}{\partial x_h^2} + \sum_h^{m+1,n} \frac{\partial^2 W(X_n,t)}{\partial x_h^2} = \frac{\partial W(X_n,t)}{\partial t}.$$

Es sei $N > n$. Die Funktion $U(X_{N-m})$, abhängig von den Veränderlichen $x_{m+1}, \ldots, x_N$ im Durchschnitt $\mathfrak{X}_{N-m}$ des Gebietes $\mathfrak{X}_{n-m}$ und des Gebietes $\mathfrak{X}_{N-n}$ der Veränderlichen $x_{n+1}, \ldots, x_N$, sei ein $(N-m)$-stufiges Potential; sie erfüllt also in $\mathfrak{X}_{N-m}$ die Gleichung

$$(3.2)\quad \sum_h^{m+1,N} \frac{\partial^2 U(X_{N-m})}{\partial x_h^2} = \sum_h^{m+1,n} \frac{\partial^2 U(X_{N-m})}{\partial x_h^2} + \sum_h^{n+1,N} \frac{\partial^2 U(X_{N-m})}{\partial x_h^2} = 0.$$

Wir vermerken den einfachen Fall, in dem alle Gebiete von der Art (1. 2) sind, so daß $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_{n-m}$, $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{N-n}$, $\mathfrak{X}_{N-m}$ durch (1. 2) mit $k = 1, \ldots, m$; $k = m+1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$; $k = n+1, \ldots, N$; $k = m+1, \ldots, N$ geschildert werden. Der von Doetsch a. a. O.[1]), S. 321 [§ 2, d)] behandelte Fall kommt zustande, wenn dabei im besonderen $n = 1$, $m = 0$, $N = 2$ gesetzt wird.

Zu allgemeineren Gebieten zurückkehrend, bilden wir das $(n-m)$-fache über $\mathfrak{X}_{n-m}$ erstreckte Integral[4])

$$(3.3)\quad \mathfrak{W}(x_1, \ldots, x_m, x_{n+1}, \ldots, x_N, t) = \int^{(n-m)} W(X_n, t)\, U(X_{N-m})\, d\tau,$$

in dem $d\tau = dx_{m+1} \ldots dx_n$, und berechnen

$$(3.4)\quad \sum_h^{1,m} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} = \int^{(n-m)} \sum_h^{1,m} \frac{\partial^2 W(X_n,t)}{\partial x_h^2}\, U(X_{N-m})\, d\tau,$$

$$(3.5)\quad \sum_h^{n+1,N} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} = \int^{(n-m)} W(X_n,t) \sum_h^{n+1,N} \frac{\partial^2 U(X_{N-m})}{\partial x_h^2} d\tau.$$

---

[3]) Die Bezeichnungen weichen von den vorhergehenden ab.

[4]) $\mathfrak{X}_{n-m}$ ist auch das Gebiet aller weiteren $(n-m)$-fachen Integrationen.

Zieht man (3.5) von (3.4) ab, so erhält man wegen (3.1), (3.2)

$$\sum_{h}^{1,m} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} - \sum_{h}^{m+1,N} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} = \int^{(n-m)} \frac{\partial W(X_n,t)}{\partial t} U(X_{N-m})\, d\tau -$$

$$- \int^{(n-m)} \Big[U(X_{N-m}) \sum_{h}^{m+1,n} \frac{\partial^2 W(X_n,t)}{\partial x_h^2} - W(X_n,t) \sum_{h}^{m+1,n} \frac{\partial^2 U(X_{N-m})}{\partial x_h^2} \Big] d\tau,$$

also, wenn man die beiden unter dem letzten Integral stehenden Summen mit dem üblichen Zeichen des — auf $\mathfrak{X}_{n-m}$ bezogenen — Laplace schen Differentialausdrucks schreibt:

$$(3.6) \quad \sum_{h}^{1,m} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} - \sum_{h}^{m+1,N} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} = \int^{(n-m)} \frac{\partial W}{\partial t} U\, d\tau - \int^{(n-m)} (U \Delta W - W \Delta U)\, d\tau.$$

Das erste Integral rechts hat nach (3.3) den Wert $\partial \mathfrak{W}/\partial t$. Das zweite läßt sich nach der Verallgemeinerung einer Greenschen Formel auf Räume von beliebiger Stufenzahl[5]) in ein Integral über den $(n-m-1)$-stufigen Rand $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{X}_{n-m}$ umformen: es ist

$$\int^{(n-m)} (U \Delta W - W \Delta U)\, d\tau = \int_{\mathfrak{S}}^{(n-m-1)} \Big(U \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial U}{\partial \nu} \Big) d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Überflächenelement von $\mathfrak{S}$, ν die äußere Normale in einem Punkte von $\mathfrak{S}$ bedeutet. Es sei nun

$$(3.7) \quad \int_{\mathfrak{S}}^{(n-m-1)} \Big(U \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial U}{\partial \nu} \Big) d\sigma = 0;$$

dann vereinfacht sich (3.6) zu

$$(3.8) \quad \sum_{h}^{1,m} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} - \sum_{h}^{m+1,N} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x_h^2} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}.$$

Setzt man also eine mehrstufige Temperatur und ein mehrstufiges Potential zu dem Integral (3.3) *zusammen, so befriedigt dieses die Gleichung* (3.8) — falls die eingeführten Voraussetzungen gelten, hauptsächlich (3.7). Übrigens kommt (3.7) in dem oben genannten von Doetsch behandelten Falle auf die dort angegebene Annahme [1], S. 318, (2.5)] zurück.

---

[5]) Siehe P. Appell-J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite (1926), S. 192. Dort auch die Bedingungen der folgenden Umformung.

Ist W im besonderen von t unabhängig, so nach (3. 3) auch $\mathfrak{B}$; die rechte Seite von (3. 8) verschwindet, und das Ergebnis lautet (mit wenig veränderten Zeichen): $U_1(X_n)$, $U_2(X_{N-m})$ seien zwei mehrstufige Potentiale, die den Gleichungen

$$\sum_{h}^{1,n} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_h^2} = 0, \qquad \sum_{h}^{m+1,N} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_h^2} = 0$$

genügen; man setze sie zu dem Integral

$$\mathfrak{U}(x_1, \ldots, x_m, x_{n+1}, \ldots, x_N) = \int^{(n-m)} U_1(X_n)\, U_2(X_{N-m})\, d\tau$$

zusammen. Dieses erfüllt, wenn

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(n-m-1)} \left(U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \nu} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0$$

ist, die Gleichung

$$\sum_{h}^{1,m} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x_h^2} - \sum_{h}^{m+1,N} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x_h^2} = 0.$$

(Eingegangen am 5. September 1940.)

Zum Interpolationsproblem im Einheitskreise meromorpher Funktionen. I.

Von

Ernst Lammel in Prag.

Ist $f(z)$ eine ganze Funktion und bleibt die Folge $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ beschränkt, so konvergiert bekanntlich die $f(z)$ eindeutig zugeordnete Reihe

$$C_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} (z - a_\mu)$$

auf jeder abgeschlossenen beschränkten Punktmenge gleichmäßig gegen $f(z)$. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich das Interpolationsproblem für ganze Funktionen unter der Voraussetzung lösen, daß die Folge der Interpolationsstellen beschränkt ist.

Für im Einheitskreise reguläre Funktionen haben S. Takenaka, F. Malmquist und J. L. Walsh[1]) insbesondere folgenden Satz bewiesen: Ist $f(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion und besitzt die Folge $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ auf $|z| = 1$ keinen Häufungspunkt, so konvergiert die $f(z)$ eindeutig zugeordnete Reihe

$$\frac{C_0}{1 - a_1 z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{1 - a_{\nu+1} z} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z}$$

auf jeder abgeschlossenen in $|z| < 1$ enthaltenen Punktmenge gleichmäßig gegen $f(z)$. Verfasser[2]) hat gezeigt, daß dieser Satz auch dann richtig bleibt, wenn man Reihen von der Form

$$C_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z}$$

verwendet. Jeder dieser beiden Sätze kann zur Lösung des Interpolationsproblems für in $|z| < 1$ reguläre Funktionen dienen, wenn kein Häufungspunkt der Folge der Interpolationsstellen aus $|z| < 1$ auf $|z| = 1$ liegt.

Walsh[3]) hat zu den vorangehenden Sätzen ein Analogon für die in der endlichen Ebene meromorphen Funktionen angegeben. Die beschränkte

---

[1]) J. L. Walsh, Interpolation and functions analytic interior to the unit circle. Transact. Amer. Math. Soc. **34**, S. 523–556.

[2]) Vgl. etwa E. Lammel, Über Interpolationsreihen. Math. Annalen **116** (1939), S. 524–533.

[3]) J. L. Walsh, An expansion of meromorphic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. **18**, S. 165–171.

Folge $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ und die Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ mit $\lim_{\mu \to \infty} |b_\mu| = \infty$ seien punktfremd. Ist $f(z)$ eine in der endlichen Ebene meromorphe Funktion, deren Polstellen in der Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ auftreten, so konvergiert die $f(z)$ eindeutig zugeordnete Reihe

$$C_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{z - b_\mu}$$

auf jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge, welche keinen Punkt der Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ enthält, gleichmäßig gegen $f(z)$. Diesen Satz kann man zur Lösung des Interpolationsproblems für die in der endlichen Ebene meromorphen Funktionen benutzen, wenn die Folge der Interpolationsstellen beschränkt bleibt.

Im folgenden soll nun ein Spezialfall des Interpolationsproblems für die im Einheitskreise meromorphen Funktionen behandelt werden.

Die Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ besitze ihre sämtlichen Häufungspunkte auf $|z| = 1$. Wir bezeichnen mit $H\{b\}$ die Klasse der in $|z| < 1$ meromorphen Funktionen $f(z)$, die die Eigenschaft haben, daß ihre sämtlichen Polstellen in der Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ auftreten. Jeder Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ läßt sich eindeutig eine Folge von rationalen Funktionen

$$s_n(z) = \begin{cases} C_0 \text{ für } n = 0, \\ C_0 + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \dfrac{z^\nu}{\prod_{\mu=1}^{\nu} \dfrac{z - b_\mu}{1 - \bar{b}_\mu z}}; \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

dadurch zuordnen, daß man von $s_n(z)$ und $f(z)$ an der Stelle $z = 0$ Übereinstimmung im Funktionswerte und den Ableitungen bis zur n-ten Ordnung verlangt. $\{s_n(z)\}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist die Folge der Partialsummen der Reihe

$$C_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z}{\dfrac{z - b_\mu}{1 - \bar{b}_\mu z}}. \tag{1}$$

Zu jeder Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ gehört also eine und nur eine Reihe (1).

Zur Abkürzung setzen wir im folgenden $\dfrac{z - a}{1 - \bar{a} z} = \varphi(z; a)$.

Wir werden zeigen, daß eine Reihe (1) dann und nur dann eine Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ darstellt, wenn

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} \leqq 1 \tag{2}$$

ist und umgekehrt, daß jede Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ in eine Reihe (1) entwickelt werden kann, deren Koeffizienten $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ der Be-

dingung (2) genügen. Hierin ist eine Lösung des folgenden Interpolationsproblems enthalten: $\{Z^{(\nu)}\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und die Punktfolge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ mit $\lim_{\mu \to \infty} |b_\mu| = 1$ seien vorgeschrieben. Gefragt ist nach sowohl notwendigen als auch hinreichenden Bedingungen, unter welchen es eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion $f(z)$ gibt, deren Polstellen in der Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ auftreten und die an der Stelle $z = 0$ den Wert $Z^{(0)}$ hat und deren Ableitungen dort die Werte $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ haben. Es kann höchstens eine Funktion mit den verlangten Eigenschaften geben, und wenn eine existiert, so läßt sie sich mit Hilfe einer Reihe (1) darstellen.

§ 1.

Reihensätze.

Unter $E\{b\}$ sei diejenige Punktmenge verstanden, welche aus $|z| < 1$ durch Herausnahme der Punktfolge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ entsteht.

Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Gilt für die in* $|z| < 1$ *liegende Punktfolge* $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{\mu \to \infty} |b_\mu| = 1, \tag{3}$$

so konvergiert eine Reihe von der Form (1) *dann und nur dann für alle* z *aus* $E\{b\}$, *wenn* (2) *erfüllt ist.*

Wegen (3) gilt für jede Stelle z aus $E\{b\}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^{n} \varphi(z; b_\mu)} \right| = 1$$

und es ist also für solche z-Werte

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left| C_n \prod_{\mu=1}^{n} \frac{z}{\varphi(z; b_\mu)} \right|} = |z| \, \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|C_n|}.$$

Die Bedingung (2) ist mithin hinreichend dafür, daß eine Reihe von der Form (1) für alle z aus $E\{b\}$ konvergiert.

Soll die Reihe (1) für alle z aus $E\{b\}$ konvergieren, so muß für einen festen Wert z' aus $E\{b\}$ für $n \geqq N(z')$

$$\left| C_n \prod_{\mu=1}^{n} \frac{z'}{\varphi(z'; b_\mu)} \right| < 1 \quad \text{oder} \quad |C_n| < \prod_{\mu=1}^{n} \left| \frac{1}{z'} \varphi(z'; b_\mu) \right|$$

sein. Da für $|z'| < 1$

$$|\varphi(z'; b_\mu)| \leqq \frac{|z'| + |b_\mu|}{1 + |b_\mu||z'|}$$

ist und wegen (3) $\lim_{\mu \to \infty} \frac{|z'| + |b_\mu|}{1 + |b_\mu||z'|} = 1$ gilt, so ergibt sich

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|C_n|} \leqq \frac{1}{|z'|},$$

und da wir $|z'| < 1$ beliebig nahe an Eins wählen können, so erhalten wir schließlich (2).

Die Bedingung (2) ist also auch notwendig, wenn eine Reihe (1) für jeden Wert von z aus $E\{b\}$ konvergieren soll.

Über Reihen von der Form (1), welche für jeden Wert von z aus $E\{b\}$ konvergieren, gilt folgender

Satz 2. *Konvergiert eine Reihe von der Form* (1) *mit* $\lim_{\mu \to \infty} |b_\mu| = 1$ *für jeden Wert von* z *aus* $E\{b\}$, *so ist sie auf jeder abgeschlossenen Punktmenge, welche nur aus Punkten von* $E\{b\}$ *besteht, gleichmäßig konvergent und stellt also eine in* $|z| < 1$ *meromorphe Funktion der Klasse* $H\{b\}$ *dar.*

Ist $\mathfrak{G}$ eine abgeschlossene Punktmenge, welche nur aus Punkten von $E\{b\}$ besteht, so läßt sie sich in einen Kreis $|z| < r < 1$ einschließen. Wegen (3) gibt es ein m, so daß für $\mu > m$ $|b_\mu| > r$ wird. Die Reihe (1) läßt sich in der Gestalt

$$C_0 + \sum_{\nu=1}^{m-1} C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z}{\varphi(z; b_\mu)} + \prod_{\mu=1}^{m} \frac{z}{\varphi(z; b_\mu)} \left(C_m + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} C_\nu \prod_{\mu=m+1}^{\nu} \frac{z}{\varphi(z; b_\mu)} \right)$$

schreiben. Die in der runden Klammer befindliche Reihe ist auf $|z| \leqq r < 1$ gleichmäßig konvergent, da für $|z| \leqq r < 1$ und $\mu > m$

$$|\varphi(z; b_\mu)| \geqq \frac{|b_\mu| - |z|}{1 - |b_\mu||z|} \geqq \frac{|b_\mu| - r}{1 - |b_\mu| r}$$

gilt und

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |C_\nu| \prod_{\mu=m+1}^{\nu} \frac{\frac{r_1}{|b_\mu| - r_1}}{\frac{1}{1 - |b_\mu| r_1}}$$

in $0 \leqq r_1 < |b_{m+1}|$ konvergiert.

§ 2.

Entwicklungssatz.

Wir wollen nun beweisen, daß sich jede im Einheitskreise $|z| < 1$ meromorphe Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ in eine Reihe von der Form (1) entwickeln läßt. Zu diesem Zwecke gehen wir von der folgenden Identität

$$\frac{1}{\zeta - z} = C_0(\zeta) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(\zeta) \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z}{\varphi(z; b_\mu)} + r_n(z; \zeta)$$

aus, worin

$$C_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \quad C_1(\zeta) = -\frac{b_1}{\zeta^2}$$

und

$$C_{\nu+1}(\zeta) = -\frac{b_{\nu+1}}{(2\pi i)^\nu} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \cdots \oint_{l_\nu} \frac{\varphi(\eta_\nu; b_\nu)}{\eta_\nu^3 \zeta(\zeta - \eta_1)} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{\varphi(\eta_\mu; b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})} d\eta_1 d\eta_2 \ldots d\eta_\nu;$$

$$\nu = 2, 3, \ldots, n-1$$

ist und $r_n(z;\zeta)$ durch

$$r_n(z;\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \cdots \oint_{l_n} \frac{z^3}{\eta_n(\eta_n - z)\zeta(\zeta - \eta_1)} \frac{\varphi(\eta_n; b_n)}{\varphi(z; b_n)}$$

$$\prod_{\mu=1}^{n-1} \frac{\varphi(\eta_\mu; b_\mu) z}{\varphi(z; b_\mu)\eta_\mu(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})} d\eta_1 d\eta_2 \ldots d\eta_n$$

gegeben wird. Die Integration nach η_α ist über die in $|z| < 1$ verlaufende rektifizierbare Jordankurve l_α zu erstrecken. l_α soll $l_{\alpha+1}$ für $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ umschließen und l_n in seinem Innern den Nullpunkt und die Stelle z enthalten. Multiplizieren wir obige Identität mit $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ und integrieren dann längs einer in $|z| < 1$ verlaufenden Jordankurve l, welche l_1 umschließt und in derem Äußern die Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ liegt, so erhalten wir für die Entwicklungskoeffizienten $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ der $f(z)$ eindeutig zugeordneten Reihe (1) die folgenden Integraldarstellungen:

(4a) $$C_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad C_1 = -\frac{b_1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$$

und

(4b) $$C_{\nu+1} = -\frac{b_{\nu+1}}{(2\pi i)^{\nu+1}} \oint_l \oint_{l_1} \cdots \oint_{l_\nu} \frac{f(\zeta)\varphi(\eta_\nu; b_\nu)}{\zeta(\zeta - \eta_1)\eta_\nu^3}$$

$$\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{\varphi(\eta_\mu; b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})} d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_\nu; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Führen wir in (4b) die Integration nach ζ durch, so ergibt sich

(5) $$C_{\nu+1} = (-b_{\nu+1}) \sum_{m=0}^{\nu} c_{m+1} \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \cdots \oint_{l_\nu} \frac{\eta_1^m \varphi(\eta_\nu; b_\nu)}{\eta_\nu^3}$$

$$\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{\varphi(\eta_\mu; b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})} d\eta_1 d\eta_2 \ldots d\eta_\nu,$$

wenn $\{c_m\}$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ die Folge der Koeffizienten der zu $f(z)$ gehörigen Potenzreihe bedeutet, weil bei $m = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$

$$\oint_{l_1}\oint_{l_2}\cdots\oint_{l_\nu}\frac{\eta_1^m\,\varphi(\eta_\nu; b_\nu)}{\eta_\nu^2}\prod_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{\varphi(\eta_\mu; b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})}\,d\eta_1\,d\eta_2\ldots d\eta_\nu = 0$$

ist.

Um für den Betrag des Integrals

$$(6)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^\nu}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\cdots\oint_{l_\nu}\frac{\varphi(\eta_\nu; b_\nu)}{\eta_\nu^2}\prod_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{\varphi(\eta_\mu; b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})}\,d\eta_1\,d\eta_2\ldots d\eta_\nu$$

eine Abschätzung zu erhalten, beachte man, daß

$$\frac{1}{(2\pi i)^\nu}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\cdots\oint_{l_\nu}\frac{\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\cdots\eta_\nu^{\alpha_\nu}}{\eta_\nu^2\prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\eta_\mu - \eta_{\mu+1})}\,d\eta_1\,d\eta_2\ldots d\eta_\nu$$

nur dann einen von Null verschiedenen Wert, und zwar Eins hat, wenn die ν-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ von lauter ganzen Zahlen einschließlich Null den Bedingungen $\alpha_1 \geqq 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geqq 2$, $\ldots$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\nu-1} \geqq \nu - 1$ und $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \nu$ genügen.

$\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi(\eta_\mu; b_\mu)$ besitzt als Majorante $\prod_{\mu=1}^{\nu}\frac{\eta_\mu + |b_\mu|}{1 + |b_\mu|\eta_\mu}$. Hiervon ist aber $\prod_{\mu=1}^{\nu}\left(1 + \frac{1 - |b_\mu|^2}{1 - \eta_\mu}\right)$ wieder eine Majorante. Weil die Stelle $z = 0$ unter den Punkten der Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ nicht auftritt und $\lim_{\mu\to\infty}|b_\mu| = 1$ ist, so liegt diese Folge im Kreisringe $0 < \varrho \leqq |z| < 1$. Wir erhalten so schließlich

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\left(1 + \frac{1 - \varrho^2}{1 - \eta_\mu}\right)$$

als Majorante von $\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi(\eta_\mu; b_\mu)$.

Offenbar bekommen wir eine obere Schranke für den absoluten Betrag des Integrals (6), wenn wir in

$$(7)\qquad \prod_{\mu=1}^{\nu}\left(1 + \frac{1 - \varrho^2}{1 - \eta}\right) = \left(1 + \frac{1 - \varrho^2}{1 - \eta}\right)^\nu$$

den Koeffizienten a_ν von η^ν aufsuchen. Man findet

$$\begin{aligned} a_\nu &= \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{\nu + k - 1}{k - 1}(1 - \varrho^2)^k \\ &< \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{2\nu - 1}{k - 1}(1 - \varrho^2)^k \\ &< \sqrt{1 - \varrho^2}\,(1 + \sqrt{1 - \varrho^2})^\nu\,(1 + \sqrt{1 - \varrho^2})^{2\nu - 1}, \end{aligned}$$

also

$$a_\nu < (1+\sqrt{1-\varrho^2})^{3\nu}. \tag{8}$$

Für das Integral

$$\frac{1}{(2\pi i)^\nu}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\cdots\oint_{l_\nu}\frac{\eta_1^m\varphi(\eta_\nu;b_\nu)}{\eta_\nu^3}\prod_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{\varphi(\eta_\mu;b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu-\eta_{\mu+1})}\,d\eta_1\,d\eta_2\ldots d\eta_\nu; \tag{9}$$

$$m=1,2,\ldots,\nu-2$$

erhalten wir, wenn die Integrationen nach $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ durchgeführt werden,

$$\frac{1}{(2\pi i)^{\nu-m}}\oint_{l_{m+1}}\cdots\oint_{l_\nu}\frac{\varphi(\eta_\nu;b_\nu)}{\eta_\nu^3}\prod_{\mu=1}^{m}\varphi(\eta_{m+};b_\mu)\prod_{\mu=m+1}^{\nu-1}\frac{\varphi(\eta_\mu;b_\mu)}{\eta_\mu(\eta_\mu-\eta_{\mu+1})}\,d\eta_{m+1}\ldots d\eta_\nu,$$

für $m=\nu-1$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{l_\nu}\frac{\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi(\eta_\mu;b_\mu)}{\eta_\nu^3}\,d\eta_\nu$$

und für $m=\nu$

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}(-b_\mu).$$

Um eine obere Schranke des absoluten Betrages von (9) zu bestimmen, verfahren wir genau so wie mit (6). Wir brauchen uns nur in (7) den Koeffizienten $a_{\nu-m}$ von $\eta^{\nu-m}$ auszurechnen.

Man findet

$$\begin{aligned}a_{\nu-m}&=\sum_{k=1}\binom{\nu}{k}(1-\varrho^2)^k\binom{\nu-m+k-1}{k-1}\\&<\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\varrho^2)^k\binom{2\nu-m-1}{k-1}\\&<\sqrt{1-\varrho^2}\,(1+\sqrt{1-\varrho^2})^\nu\,(1+\sqrt{1-\varrho})^{2\nu-m-1},\end{aligned}$$

also

$$a_{\nu-m}<(1+\sqrt{1-\varrho^2})^{3\nu-m};\qquad m=1,2,\ldots,\nu. \tag{10}$$

Mit Rücksicht auf (8) und (10) ergibt sich aus (5)

$$\begin{aligned}|C_{\nu+1}|&\leqq\sum_{m=0}^{\nu}|c_{m+1}|(1+\sqrt{1-\varrho^2})^{3\nu-m}\\&=(1+\sqrt{1-\varrho^2})^{3\nu+1}\sum_{m=0}^{\nu}\frac{|c_{m+1}|}{(1+\sqrt{1-\varrho^2})^{m+1}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Neben $f(z)$ betrachten wir die Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei

$$f_n(z) = \left\{ f(z) - \sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z}{\varphi(z; b_\mu)} \right\} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{\varphi(z; b_\mu)}{z}$$

ist. Die $f_n(z)$ zugeordnete Reihe (2) hat die Gestalt

$$C_0^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu^{(n)} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z}{\varphi(z; b_{\mu+n})}$$

und es ist $C_\nu^{(n)} = C_{n+\nu}$. Die Folge $\{b_\mu\}$, $(\mu = n+1, n+2, \ldots)$ liegt im Kreisringe $\varrho_n \leqq |z| < 1$ und die zu $f_n(z)$ gehörige Potenzreihenentwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)} z^\nu$ ist mithin in $|z| < \varrho_n$ konvergent.

Nach (11) gilt

$$|C_{\nu+1}^{(n)}| \leqq (1 + \sqrt{1-\varrho_n^2})^{3\nu+1} \sum_{m=0}^{\nu} \frac{|c_{m+1}|}{(1+\sqrt{1-\varrho_n^2})^{m+1}}.$$

Wegen $\lim_{n \to \infty} \varrho_n = 1$ wird für $n > N$

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\varrho_n^2}} < \varrho_n$$

und deshalb

$$\overline{\lim_{\nu+1 \to \infty}} \sqrt[\nu+1]{|C_{\nu+1}^{(n)}|} \leqq (1+\sqrt{1-\varrho_n^2})^3,$$

also auch

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} \leqq (1+\sqrt{1-\varrho_n^2})^3.$$

Da (12) gilt, erhalten wir schließlich

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} \leqq 1.$$

Die der Funktion $f(z)$ aus $H\{b\}$ zugeordnete Reihe (1) stellt also nach Satz 2 auch eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion der Klasse $H\{b\}$ dar, welche mit $f(z)$ an der Stelle $z = 0$ im Funktionswerte und den Ableitungen übereinstimmt. Beide Funktionen müssen also identisch sein.

Wir haben somit den folgenden Entwicklungssatz bewiesen:

Jede Funktion der Klasse $H\{b\}$ läßt sich in eine Reihe (1) *entwickeln. Für die Koeffizienten $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gelten die Integraldarstellungen* (4a, b) *und es ist* $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} \leqq 1$.

§ 3.

Das Interpolationsproblem.

Wir denken uns die Punktfolge $\{b_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ mit $\lim_{\mu \to \infty} |b_\mu| = 1$ und die Folge $\{Z^{(\nu)}\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ vorgegeben. Wir fragen nach sowohl notwendigen als auch hinreichenden Bedingungen, unter welchen es eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ gibt, welche an der Stelle $z = 0$ als Funktionswert $Z^{(0)}$ und als Ableitungen $\{Z^{(\nu)}\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ besitzt.

Die Koeffizienten $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ einer Reihe (1) werden dadurch bestimmt, daß man an der Stelle $z = 0$ als Funktionswert $Z^{(0)}$ und für die Ableitungen $\{Z^{(\nu)}\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ vorschreibt. Wie sich die Koeffizienten $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ durch $\{Z^{(\nu)}\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ ausdrücken, zeigen die Gleichungen (4a) und (5).

Aus § 1 folgt, daß es dann eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion $f(z)$ der Klasse $H\{b\}$ gibt, welche an der Stelle $z = 0$ als Funktionswert $Z^{(0)}$ und als Ableitungen $\{Z^{(\nu)}\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ besitzt, wenn die zugehörigen $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ der Bedingung (2) genügen.

Die Notwendigkeit der Bedingung (2) ergibt sich aus dem Entwicklungssatz.

Wir erhalten so das folgende Ergebnis:

Es gibt dann und nur dann eine Funktion der Klasse $H\{b\}$, welche an der Stelle $z = 0$ als Funktionswert $Z^{(0)}$ und als Ableitungen die Werte $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ besitzt, wenn die zugehörigen $\{C_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ der Bedingung (2) genügen.

(Eingegangen am 13. September 1940.)

Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. III.

Von

Vojislav G. Avakumović in Beograd.

Im folgenden beweise ich einen Umkehrsatz funktionentheoretischer Art, der einerseits den Satz aus meiner Note „Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. II.“[1]) verallgemeinert (indem ein Parameter der dort den Wert 2 annimmt, hier $= 2n$, ist), anderseits aber als Spezialfall in dem allgemeinen Umkehrsatz funktionentheoretischer Art meiner Note „Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten“[2]) (in welchem der genannte Parameter jeden endlichen Wert zwischen 1 (exklusive) und $+\infty$ annehmen kann) enthalten ist. Da der bisher unveröffentlichte Beweis des allgemeinen Satzes ziemlich lang, des hier zu beweisenden aber verhältnismäßig kurz ist und überdies der Beweis des allgemeinen Satzes in manchen Punkten auf dem hier entwickelten Beweisgedanken beruht, so ist es von Interesse, den Beweis des Satzes I zu geben.

Die hier benutzte Beweismethode stellt eine nichttriviale Übertragung und Weiterführung derjenigen Beweisgedanken dar, die ich in der Note „Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes“[3]) entwickelt habe. In dieser Note habe ich mich des „Kernes“ $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$ bzw. $\lambda\left(\frac{\sin \lambda x}{\lambda x}\right)^2$ bedient; hier wird aber, entsprechend dem asymptotischen Verhalten der Funktion $A(u)$, mit einem „Kern“ von der Größenordnung $\exp[-x^a]$ $(a > 1)$, gearbeitet.

Der zu beweisende Satz[4]) lautet:

Satz I. *Sei n eine ganze Zahl* $\geqq 1$,

(I) *$A(u)$ nicht abnehmend,*

$$\int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} \text{ konvergent für } R(s) > 0$$

[1]) Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 67–69.

[2]) 2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr. 1/2 (1938), S. 101–106.

[3]) Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 650–664.

[4]) Dieser Satz läßt sich erheblich verallgemeinern: $J(s)$ kann durch $\int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} - \int_0^\infty e^{-su}\, d\{\varphi(u)\}$ ersetzt werden, wobei $\varphi(u)$ irgendeine Funktion

und

$$\text{(II)} \qquad J(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} - A \exp\left[s^{\frac{1}{2n-1}}\right], \quad A \neq 0$$

gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Bereich, dessen Begrenzung im Punkte $s = 0$ eine Berührung der Ordnung $2n-1$ mit der imaginären Achse hat. Dann ist

$$A(u) \sim (2n-1)^{\frac{1-2n}{4n}} \frac{A}{2\sqrt{n(2n-1)\pi}}\, u^{\frac{1-2n}{4n}} \times \exp\left[2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}}\, u^{\frac{2n-1}{2n}}\right], \quad u \to \infty.$$

Dieser Satz wird aus folgendem Hauptsatz hergeleitet:

Satz II. *Sei n eine ganze Zahl $\geqq 1$,*

$$\text{(I)} \qquad A(u) \textit{ nicht abnehmend,}^{5})$$

$$\int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} \textit{ konvergent für } R(s) > 0$$

und

$$\text{(II)} \qquad J(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\{A(u)\} - A \exp\left[s^{\frac{1}{2n-1}}\right], \quad A \neq 0$$

---

von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall ist, die der Bedingung

$$\lim_{u=\infty} \sup \left| \frac{\varphi\left(u + \varepsilon u^{\frac{1}{2n}}\right)}{\varphi(u)} - 1 \right| \to 0 \quad \text{bei} \quad \varepsilon \to 0$$

genügt; außerdem soll

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yt}{t} J(\varepsilon + t^{2n} + it)\, dt$$

existieren und $O(\varphi(y))$, $y \to \infty$ sein. Die „Konvergenzbedingung" (I) kann durch die allgemeinere

$$\lim_{u=\infty} \inf \operatorname*{Min}_{u \leqq u' \leqq u + \varepsilon u^{\frac{1}{2n}}} \frac{A(u') - A(u)}{\varphi(u)} = w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

ersetzt werden, wo $A(u)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall sein soll; dann ist Satz I auch im Falle $A = 0$ nicht trivial.

[5]) Beim Beweis von (III) wird nicht (I), sondern

$$-Cu^{\frac{1-2n}{4n}} < \exp\left[-2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}}\, u^{\frac{2n-1}{2n}}\right] A(u) < C$$

benutzt. Ich formuliere aber den Satz mit der Bedingung (I), um den Zusammenhang ersichtlicher zu machen.

gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Bereich, dessen Begrenzung im Punkte $s = 0$ eine Berührung der Ordnung $2n - 1$ mit der imaginären Achse hat. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$

$$\text{(III)}\quad \varlimsup_{y=\infty} (2n-1)^{\frac{2n-1}{4n}} \frac{2\sqrt{n(2n-1)\pi}}{A} y^{\frac{1}{2}} \exp\left[-2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}} y\right]$$
$$\times \delta \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A\left((y+\zeta)^{\frac{2n}{2n-1}}\right) \exp\left[-(\delta\zeta)^{\frac{2n+2}{2n+1}}\right] d\zeta$$
$$\leqq \delta \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}} \zeta - (\delta\zeta)^{\frac{2n+2}{2n+1}}\right] d\zeta \pm W(\delta),$$

wobei $W(\delta) \to 0$, wenn $\delta \to \infty$ [6]).

2. Bekanntlich gibt es ein $\lambda = \lambda(l) > 0$ und eine Funktion $c(x)$, wobei

$$|c(x)| < c_0, \tag{1}$$

und deren Ableitung

$$|c'(x)| < c_1 \tag{2}$$

ist, so daß für jedes gerade l und reelles x

$$y_l(x) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-t^l + ixt]\, dt = c(x) \exp\left[-\lambda |x|^{\frac{l}{l-1}}\right] \tag{3}$$

gilt. Ferner gibt es ein $c_2 > 0$ und ein $c_3 > 0$, so daß

$$G_l(x) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\vartheta t^{l+2} + t^l + ixt]\, dt$$
$$= c_4(\vartheta) \exp\left[-c_2 \vartheta^{-\frac{1}{l+1}} |x|^{\frac{l+2}{l+1}} + c_3 \vartheta^{-\frac{l}{l+1}} |x|^{\frac{l}{l+1}}\right] \tag{4}$$

---

[6]) Der Übergang von Satz II zu Satz I ist ganz leicht: wegen (I) und (II) ist nämlich, wenn $\varepsilon = \delta^{-\frac{1}{2}}$ gewählt wird,

$$\varlimsup_{y=\infty} (2n-1)^{\frac{2n-1}{4n}} \frac{2\sqrt{n(2n-1)\pi}}{A} \left(y \mp \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}} \left(y \mp \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)\right]$$
$$\times A\left(\left(y \mp \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{\frac{2n-1}{2n}}\right)$$
$$\leqq \exp\left[\frac{\pm 2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}}}{\sqrt{\delta}}\right] \frac{\int_{-\sqrt{\delta}}^{+\sqrt{\delta}} \exp\left[2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}} \zeta \big/ \delta - \zeta^{\frac{2n+2}{2n+1}}\right] d\zeta \pm W(\delta)}{\int_{-\sqrt{\delta}}^{+\sqrt{\delta}} \exp\left[-\zeta^{\frac{2n+2}{2n+1}}\right] d\zeta}.$$

ist[7]). Dies vorausbemerkt gehe ich zum Beweis des Satzes II über. Zur Abkürzung setze ich noch

$$k = 2n$$

und

$$K = 2n(2n-1)^{\frac{1-2n}{2n}}.$$

Es bezeichnet b eine reelle Zahl $-\frac{1}{2} \leqq b \leqq 0$ und die c positive Weltkonstanten bzw. positive Weltfunktionen der hinter c genannten Variablen.

Hilfssatz I. *Sei*

$$\alpha_0 = \frac{k-1}{k},$$

$$B(u) = O(u^b e^{Ku}), \quad u \to \infty \tag{5}$$

und

$$\varphi(y,\zeta) = B(y+\zeta)\int_0^\infty e^{-\eta^k}\left\{\cos\zeta\eta - \cos\left[\alpha_0\left(y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right)(y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right]\right\} d\eta.$$

Dann ist

$$\int_{-y}^{\infty} \varphi(y,\zeta)\, d\zeta = O(y^{b-1}e^{Ky}), \quad y \to \infty.$$

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Ich beweise: Wird

$$\int_{-y}^{\infty}(y,\zeta)\, d\zeta = \int_{-y}^{-\varepsilon\sqrt{y}} + \int_{-\varepsilon\sqrt{y}}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon\sqrt{y}} + \int_{\varepsilon\sqrt{y}}^{\infty} = \sum_{\nu=1}^{5} H_\nu(y)$$

gesetzt, so ist

$$H_\nu(y) = O(y^{b-1}e^{Ky}), \quad y \to \infty, \ \nu = 1,2,3,4,5.$$

Es bezeichne $\Omega(x)$ die Funktion x^b.

a) Wegen (3) und (4) ist, wenn noch zur Abkürzung

$$\Theta_\nu(\zeta) = \frac{\alpha_0\left\{y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right\}}{(y+\zeta)^{\frac{1}{k-1}}}$$

---

[7]) (1), (2), (3) und (4) läßt sich mittels der von N. G. BAKHOOM [Asymptotic expansions of the funktion $F_k(x) = \int_0^\infty e^{-u^k + xu}\, du$, Proc. of the London Math. Soc. **35** (1933), S. 83–100] zur asymptotischen Entwicklung von $g_k(ix)$ für $0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} + \frac{(k-1)\pi}{8k^2}$ benutzten Sattelpunktmethode beweisen.

und

$$\Theta_\nu = \Theta_\nu(-\zeta)$$

gesetzt wird,

$$|H_1(y)| < c_5\, y^b\, e^{K\nu} \int_{\varepsilon\sqrt{y}}^{y} \Omega(1-\zeta/y)\, e^{K\zeta}\{|g_k(\zeta)| - |g_k(\Theta_\nu)|\}\, d\zeta.$$

Nach (1) und (3) ist also

$$|H_1(y)| < c_0 c_5\, y^b\, e^{K\nu} \int_{\varepsilon\sqrt{y}}^{y} \Omega(1-\zeta/y)\exp\left[K\zeta - \lambda\,\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right] \left\{1+\exp\left[\lambda\left(\zeta^{\frac{k}{k-1}} - |\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right]\right\} d\zeta.$$

O. B. d. A. sei $\varepsilon\sqrt{y} > \frac{K\alpha_\vartheta}{\lambda - 2\vartheta}$ mit $0 < 2\vartheta < 1$, so daß $K\zeta - \lambda\zeta^{\frac{k}{k-1}} \geqq 2\vartheta\zeta^{\frac{k}{k-1}}$ für $0 \leqq \zeta \leqq y$ ist. Für $0 \leqq t \leqq 1$ ist $\Theta_1 > t$ also $|\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}} - \zeta^{\frac{k}{k-1}} \geqq 0$ für $0 \leqq \zeta \leqq y$; folglich $1 + \exp\left[\lambda\left(\zeta^{\frac{k}{k-1}} - |\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right] \leqq 2$. Daraus ergibt sich

$$|H_1(y)| < 2c_0c_5\, y^b\, e^{K\nu} \int_{\varepsilon\sqrt{y}}^{y} \Omega(1-\zeta/y)\exp\left[-2\vartheta\,\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right] d\zeta <$$

$$< 2c_0c_5\, y^b \exp\left[K\,y - \vartheta\,(\varepsilon\,y)^{\frac{k}{k-1}}\right] \int_{\varepsilon\sqrt{y}}^{y} \Omega(1-\zeta/y)\exp\left[-\vartheta\,\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right] d\zeta$$

$$< O(y^{b-1}e^{K\nu}),\quad y \to \infty.$$

b) Wegen $c(u) - c(v) = (u-v)\,c'(\zeta)$ und (2) ist (man beachte $c(-\zeta) = c(\zeta)$)

$$|H_2(y)| < c_5\, y^b\, e^{K\nu} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon\sqrt{y}} \Omega(1-\zeta/y)\exp\left[K\zeta - \lambda\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right]$$

$$\times \left|c(\zeta) - \{c(\zeta) - (\Theta_\nu - \zeta)\,c'(\zeta')\}\exp\left[\lambda\left(\zeta^{\frac{k}{k-1}} - |\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right]\right| d\zeta$$

$$< c_6\, y^b\, e^{K\nu} \int_{y}^{\varepsilon\sqrt{y}} \Omega(1-\zeta/y)\exp\left[K\zeta - \lambda\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right]$$

$$\times \left|1 - \exp\left[\lambda\left(\zeta^{\frac{k}{k-1}} - |\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right]\right| d\zeta$$

$$+ c_7\, y^b\, e^{K\nu} \int_{y}^{\varepsilon\sqrt{y}} \Omega(1-\zeta/y)\exp\left[K\zeta - \lambda\,\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right]$$

$$\times |\Theta_\nu - \zeta| \exp\left[\lambda\left(\zeta^{\frac{k}{k-1}} - |\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right] d\zeta$$

$$< c_6\, I_1(y) + c_7\, I_2(y).$$

Wegen

$$\frac{\Theta_\nu(-\zeta)}{\zeta} = \frac{\Theta_1(-\zeta/y)}{\zeta/y} \to 1 \quad \text{bei} \quad \zeta \to 0$$

gilt für jedes $|\zeta| < y$ die Entwicklung

$$\Theta_\nu/\zeta = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu (\zeta/y)^\nu. \tag{6}$$

Also ist

$$\left||\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}} - \zeta^{\frac{k}{k-1}}\right| < c_8 \frac{\zeta^{\frac{2k-1}{k-1}}}{y},$$

woraus sich wegen der für $0 < \zeta \leqq \varepsilon\sqrt{y}$ gültigen Ungleichung $|\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}} - \zeta^{\frac{k}{k-1}} \geqq 0$

$$0 \leqq 1 - \exp\left[\lambda\left(\zeta^{\frac{k}{k-1}} - |\Theta_\nu|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right] \leqq c_8 \frac{\zeta^{\frac{2k-1}{k-1}}}{y}$$

ergibt. Also ist

$$I_1(y) < c_8\, y^{b-1} e^{K\nu} \int_0^{\varepsilon\sqrt{y}} \Omega(1-\zeta/y)\, \zeta^{\frac{2k-1}{k-1}} \exp\left[K\zeta - \lambda\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right] d\zeta$$
$$< O(y^{b-1} e^{K\nu}), \quad y \to \infty.$$

Wegen (6) ist $\Theta_\nu - \zeta = O(\zeta^2/y)$ also

$$I_2(y) < c_9\, y^{b-1} e^{K\nu} \int_0^{\varepsilon\sqrt{y}} \Omega(1-\zeta/y)\, \zeta^2 \exp\left[K\zeta - \lambda\zeta^{\frac{k}{k-1}}\right] d\zeta$$
$$< O(y^{b-1} e^{K\nu}) \cdot y \to \infty.$$

Die Abschätzungen für $I_1(y)$ und $I_2(y)$ ergeben

$$H_2(y) = O(y^{b-1}\, e^{K\nu}), \quad y \to \infty.$$

c) Es ist

$$|H_3(y)| < c_5\, y^b e^{K\nu} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Omega(1-\zeta/y)\, e^{K\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta^k}$$
$$\left|\cos\zeta\eta - \cos\left[\alpha_0\left(y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right)(y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right]\right| d\zeta$$
$$< 2c_5\, y^b e^{K\nu} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Omega(1-\zeta/y)\, e^{K\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta^k} \left|\sin\frac{\zeta+\Theta_\nu(\zeta)}{2}\eta \sin\frac{\zeta-\Theta_\nu(\zeta)}{2}\eta\right| d\zeta.$$

Für $|\zeta| \leqq \varepsilon < 1$ ist $|\zeta - \Theta_\nu(\zeta)| < c_{10}/y$, also wegen $|\sin x| \leqq |x|$,

$$|H_3(y)| < 2c_5 c_{10}\, y^{b-1} e^{K\nu} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Omega(1-\zeta/y)\, e^{K\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta^k} d\zeta$$
$$< O(y^{b-1} e^{K\nu}), \quad y \to \infty.$$

d) Wie beim Beweis zu b) schließt man, daß

$$H_4(y) = O\,(y^{b-1}\,e^{K\nu}), \quad y \to \infty$$

und

e) wie beim Beweis zu a), daß

$$H_5(y) = O\,(y^{b-1}\,e^{K\nu}), \quad y \to \infty.$$

Hilfssatz II. *Aus*

$$\Psi(y) = \int_0^\infty B(u)\,du \int_0^\infty e^{-t^k}\cos(u-y)\,t\,dt = O(y^{b-1}\,e^{K\nu}), \quad y \to \infty$$

und

$$B(u) = O\,(u^b\,e^{K\nu}), \quad u \to \infty \tag{5}$$

folgt

$$\int_{-y}^\infty B(y+\zeta)\,K_\Lambda(\delta.\zeta)\,d\zeta = O(y^{b-1}\,e^{K\nu}), \quad y \to \infty$$

für jedes $\delta > 0$ *und* $\Lambda > 0$, *wo*

$$K_\Lambda(\delta, x) = \delta\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(\delta\,|x-t|)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] g_{k+2}(\Lambda t)\,dt$$

ist.

Beweis. Wegen (1), (3) und (4) gelten für $g_k(x)$ und $G_k(\vartheta, x)$ die üblichen Transformations- und Faltungsregeln für Fourierssche Integrale. Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} g_k(t)\,dt = \pi\,e^{-a^k},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} G_k(\vartheta, t)\,dt = \pi \exp\left[a^k - \vartheta\,a^{k+2}\right]$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\zeta)\,G_k(\vartheta, x-\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax}\,da \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} g_k(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} G_k(\vartheta, t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[iax - \vartheta a^{k+2}\right] da = \pi\Lambda g_{k+2}(\Lambda x),$$

wenn $\vartheta = \Lambda^{-k-2}$ gesetzt wird.

Wegen (4) existiert das Doppelintegral

$$\Psi_2(x) = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(\delta\,|x-\zeta|)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \Psi(t)\,G_k(\Lambda^{-k-2}, \zeta - t)\,dt$$

und es ist

$$|\Psi_2(x)| < c_{11}(\Lambda)\,x^{b-1}\,e^{Kx},$$

wobei $c_{11}(\Lambda) \to \infty$ bei $\Lambda \to \infty$. Wird jetzt Λ so groß gewählt, daß $\left(\frac{\delta}{\Lambda}\right)^{\frac{k+2}{k+1}} < \lambda$ ist und $\lambda = \lambda_1 + \left(\frac{\delta}{\Lambda}\right)^{\frac{k+2}{k+1}}$ gesetzt, so ist

$$|K_\Lambda(\delta, x)| < 2 c_0 \delta \Lambda x \exp\left[-\frac{(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}}{\frac{1}{2^{\frac{1}{k+1}}}}\right] \int_0^\infty \exp\left[-\lambda_1 (\Lambda t x)^{\frac{k+2}{k+1}} - x^{\frac{k+2}{k+1}} \varphi(t)\right] dt$$

mit

$$\varphi(t) = (\delta t)^{\frac{k+2}{k+1}} - \frac{\delta^{\frac{k+2}{k+1}}}{\frac{1}{2^{\frac{1}{k+1}}}} + (\delta(1-t))^{\frac{k+2}{k+1}},$$

woraus wegen $\varphi'(\frac{1}{2}) = 0$ und $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

$$K(\delta, x) = O\left(\exp\left[-\frac{(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}}{\frac{1}{2^{\frac{1}{k+1}}}}\right]\right) \tag{7}$$

folgt. Wegen (1), (3), (4), (5) und (7) kann man im Doppelintegral die Folge der Integration vertauschen und man erhält

$$\frac{1}{\pi} \Psi_2(x) = \int_{-x}^{\infty} B(x+\zeta) K(\delta, \zeta) d\zeta.$$

Beweis des Satzes II.

a) Ich beweise zunächst, daß $K_\Lambda(\delta, x)$ folgende Eigenschaften hat:

1. Für jedes $\varepsilon > 0, \epsilon > 0$ und $\delta > 0$ gibt es ein $\Lambda_0 = \Lambda_0(\varepsilon, \epsilon, \delta)$ derart, daß für $\Lambda > \Lambda_0$ und $|x| \leqq \varepsilon$,

$$(\pi\delta - \epsilon) \exp\left[-(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \leqq K_\Lambda(\delta, x) \leqq (\pi\delta + \epsilon) \exp\left[-(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \tag{8}$$

ist.

2. Es existiert ein δ und ein Λ derart, daß stets

$$K_\Lambda(\delta, x) > c_{12} \exp\left[-(c_{13} x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \tag{9}$$

ist.

(8) folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned} K_\Lambda(\delta, x) = {} & \delta\Lambda \exp\left[-(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} g_{k+2}(\Lambda t)\, dt \\ & + \delta x \exp\left[-(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\exp\left[(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}}\left(1 - (1 - t/\Lambda)^{\frac{k+2}{k+1}}\right)\right] - 1\right\} \\ & \times g_{k+2}(t x)\, dt, \end{aligned} \tag{10}$$

wenn man beachtet, daß

$$\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g_{k+2}(\Lambda t)\,dt = \pi$$

ist. Zugleich ist aus (10) ersichtlich, daß (9) für alle $|x| \leqq \varepsilon$ mit beliebigen $\varepsilon > 0$ und $\Lambda > 0$ richtig ist, falls nur δ genügend klein gewählt wird. Daß dies auch für $|x| > \varepsilon$ gilt, sieht man folgendermaßen. Es ist

$$K_\Lambda(\delta, x) = \delta \Lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(\delta x |1-t|)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] g_{k+2}(\Lambda t x)\,dt = \int_{-\frac{m}{x}}^{+\frac{m}{x}} + \int_{-\infty}^{-\frac{m}{x}} + \int_{\frac{m}{x}}^{\infty}$$

$$= Y_1 + Y_2 + Y_3,$$

wobei m so gewählt wurde, daß $g(\Lambda t x) > 0$ für $|t| \leqq \frac{m}{x}$ ist, was wegen $g(0) = 0$ und der Stetigkeit von $g(t)$ offenbar möglich ist.

Also ist, wenn $p = \delta(1 + m/x)$ gesetzt wird,

$$(11)\quad \begin{cases} Y_1 = \delta \Lambda x \exp\left[-(px)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \int_{-\frac{m}{x}}^{\frac{m}{x}} g_{k+2}(\Lambda t x)\,dt \\ \qquad + \delta \Lambda x \exp\left[-(px)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \int_{\frac{m}{x}}^{\frac{m}{x}} \left\{\exp\left[-x^{\frac{k+2}{k+1}}\left(p^{\frac{k+2}{k+1}} - \delta^{\frac{k+2}{k+1}}(1-t)^{\frac{k+2}{k+1}}\right)\right] - 1\right\} \\ \qquad\qquad \times g_{k+2}(\Lambda t x)\,dt \\ \qquad > \delta \Lambda x \exp\left[-(px)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \int_{-\frac{m}{x}}^{\frac{m}{x}} g_{k+2}(\Lambda t x)\,dt = c_{14}\,\delta \exp\left[-(px)^{\frac{k+2}{k+1}}\right]. \end{cases}$$

Y_1 und Y_2 sind dem Betrage nach kleiner als

$$c_0 \delta \Lambda x \int_{\frac{m}{x}}^{\infty} \exp\left[-(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}} |1-t|^{\frac{k+2}{k+1}} - \lambda_1 (\Lambda t x)^{\frac{k+2}{k+1}} - \lambda_2 (\Lambda t x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] dt$$

wobei $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ gesetzt ist. Wird jetzt δ als Funktion von Λ derart gewählt, daß $\left(\frac{\Lambda}{\delta}\right)^{k+2} \lambda_1^{k+1} = C = \text{Konst}$, so ist, falls δ genügend klein angenommen wird,

$$\min_{\frac{m}{x} \leqq t < \infty} \left\{(\delta|1-t|)^{\frac{k+2}{k+1}} + \lambda_1 (\Lambda t)^{\frac{k+2}{k+1}}\right\} = \delta^{\frac{k+2}{k+1}} \left\{\frac{C^{\frac{k+2}{k+1}} + C^{\frac{1}{k+1}} \delta^{-\frac{k+2}{k+1}}}{(1+C)^{\frac{k+2}{k+1}}}\right\} > p^{\frac{k+2}{k+1}} + \delta^{\frac{k+2}{k+1}},$$

also

$$|Y_1| \text{ bzw. } |Y_2| < c_0 \delta \Lambda x \exp\left[-(px)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] \int_{\frac{m}{x}}^{\infty} \exp\left[-\lambda_2 (\Lambda t x)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] dt$$

$$< \frac{c_0}{\lambda_2^{\frac{k+2}{k+1}}} \Gamma\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\left(\frac{k+1}{k+2}\right) \delta \exp\left[-(\delta x)^{\frac{k+2}{k+1}} - (px)^{\frac{k+2}{k+1}}\right],$$

woraus zusammen mit (11) die Behauptung für $|x| > \varepsilon$ folgt, falls nur ε genügend groß vorausgesetzt wird.

O. B. d. A. sei $A(0) = 0$, also

$$\int_0^{\infty} e^{-su} d\{A(u)\} = s \int_0^{\infty} e^{-su} A(u)\, du.$$

Dann ist wegen (I) und (II), wenn $s = (k-1)^{\frac{1}{k}} T^{-\frac{1}{k}}$ gesetzt wird,

$$(12) \quad \left| A(T) \exp\left[-k(k-1)^{\frac{1-k}{k}} T^{\frac{k-1}{k}}\right] = A(T) e^{-s^{1-k}} s \int_T^{\infty} e^{-st} dt \leqq e^{-s^{1-k}} s \int_T^{\infty} A(t) e^{-st} dt \right.$$

$$= O(1), \quad T \to \infty.$$

Nun folgt der Beweis des Satzes. Ich setze

$$Q(u) = A \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^{(k-1)\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma((k-1)\nu+1)}$$

und

$$C(u) = A(u) - Q(u),$$

so daß

$$J(s) = s \int_0^{\infty} e^{-su} C(u)\, du$$

ist. Der Voraussetzung nach kann ich annehmen, daß

(13) $\quad J(\varepsilon + t^k + i\alpha_0 t)$ für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig beschränkt,

also die Funktion

$$\frac{\sin \alpha_0 x t}{t} \frac{t}{\varepsilon + t^k + i\alpha_0 t} J(\varepsilon + t^k + i\alpha_0 t)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ absolut integrierbar über das Intervall $(-\infty, +\infty)$ ist. Folglich ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha_0 x t}{t} \frac{it}{\varepsilon + t^k + i\alpha_0 t} J(\varepsilon + t^k + i\alpha_0 t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu} C(u) \frac{du}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^k u} \left\{e^{i\alpha_0 t(x-u)} - e^{-i\alpha_0 t(x+u)}\right\} dt.$$

Wegen (13) ist der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ links und wegen (1), (3) und (12) auch rechts durchführbar. Also

$$(14)\quad \int_0^\infty C(u)\frac{du}{2} e^{-t^k u}\left\{e^{i\alpha_0 t(x-u)} - e^{-i\alpha_0 t(x+u)}\right\} dt = O(1),\ x \to \infty.$$

Wegen (1), (3), (12) und

$$(15)\quad Q(u) \sim (k-1)^{\frac{1-k}{2k}} \frac{A}{\sqrt{2k(k-1)\pi}} u^{\frac{1-k}{2k}} \exp\left[k(k-1)^{\frac{1-k}{k}} u^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

ist

$$\int_0^\infty C(u)\,du \int_0^\infty e^{-t^k u}\cos\alpha_0(x-u)t\,dt = O(1),\ x \to \infty.$$

Wird jetzt noch

$$x = y^{\frac{k}{k-1}},$$

$$t = \frac{\eta}{u^{\frac{1}{k}}},$$

$$u = (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}},$$

und

$$C\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) = B(u)$$

gesetzt, so folgt aus (14)

$$\int_{-y}^\infty B(y+\zeta)\,d\zeta \int_0^\infty e^{-\eta^k}\cos\left[\alpha_0\left(y^{\frac{k}{k-1}} - (y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right)(y+\zeta)^{\frac{1}{1-k}}\eta\right] d\eta = O(1),\ y \to \infty.$$

Wegen (12) und (14) ergibt sich daraus auf Grund des Hilfssatzes I (mit $b = 0$)

$$\int_{-y}^\infty B(y+\zeta)\,g_k(\zeta)\,d\zeta = O\left(\frac{e^{Ky}}{y}\right),\ y \to \infty$$

und auf Grund des Hilfssatzes II (mit $b = 0$)

$$\int_{-y}^\infty B(y+\zeta)\,K(\delta,\zeta)\,d\zeta = O\left(\frac{e^{Ky}}{y}\right),\ y \to \infty,$$

d. h. wegen (7) und (15),

$$\int_0^\infty A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) K_\Delta(\delta, y-u)\,du = O\left(\frac{e^{Ky}}{y}\right) + O\left(\frac{e^{Ky}}{y^{\frac{1}{2}}}\right),\ y \to \infty.$$

Nun wähle ich δ und Λ derart, daß (9) erfüllt. Dann ist

$$c_{12}\, y^{\frac{1}{2}} e^{-Ky} A\left(y^{\frac{k}{k-1}}\right) \int_0^\infty \exp\left[-(c_{13}\, t)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] dt$$

$$< c_{12}\, y^{\frac{1}{2}}\, e^{-Ky} \int_y^\infty A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) \exp\left[-c_{13}\,|u-y|^{\frac{k+2}{k+1}}\right] d\,u$$

$$< y^{\frac{1}{2}}\, e^{-Ky} \int_0^\infty A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) K_\Lambda(\delta, u-y)\, d\,u$$

$$< O(1),\ y \to \infty,$$

d. h.

$$A\left(u^{\frac{k}{k-1}}\right) = O\left(\frac{e^{Ku}}{u^{\frac{1}{2}}}\right),\ u \to \infty. \tag{16}$$

Die Hilfssätze I und II (mit $b = -\frac{1}{3}$) ergeben jetzt

$$\int_0^\infty B(\zeta)\, K\ (\delta, y-\zeta)\, \delta\, \zeta = O\left(\frac{e^{Ky}}{y^{\frac{3}{2}}}\right),\ y \to \infty,$$

d. h. wegen (15)

$$y^{\frac{1}{2}} e^{-Ky} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A\left((y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right) K_\Lambda(\delta, \zeta)\, d\,\zeta \tag{17}$$

$$= (1 + o(1))\,(k-1)^{\frac{1-k}{2k}}\, \frac{A}{\sqrt{2k(k-1)\pi}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{K\zeta} K_\Lambda(\delta, \zeta)\, d\,\zeta - \Phi_y(\Lambda, \delta, \varepsilon),$$

wo

$$\Phi_y(\Lambda, \delta, \varepsilon) = y^{\frac{1}{2}} e^{-Ky} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} B(y+\zeta)\, K\ (\delta, \zeta)\, d\,\zeta \right\}$$

gesetzt ist. Wegen (7) und (16) existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $P(\delta)$ derart, daß

$$\lim_{y=\infty} |\Phi_y(\Lambda, \delta, \varepsilon)| < P(\delta) \to 0,\ \delta \to \infty$$

ist. Aus (8), (15) und (17) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{y=\infty}}\, y^{\frac{1}{2}} e^{-Ky}\, \delta \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A\left((y+\zeta)^{\frac{k}{k-1}}\right) \exp\left[-(\delta\,\zeta)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] d\,\zeta$$

$$\leqq \left(\frac{1 \pm \epsilon}{1 \mp \epsilon}\right)(k-1)^{\frac{1-k}{2k}}\, \frac{A\,\delta}{\sqrt{2k(k-1)\pi}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[K\zeta - (\delta\,\zeta)^{\frac{k+2}{k+1}}\right] d\,\zeta \pm P(\delta),$$

falls nur Λ genügend groß gewählt wird. Damit ist aber die Behauptung schon bewiesen, da Λ beliebig groß angenommen werden kann und ϵ gegen 0 strebt, wenn $\Lambda \to \infty$.

(Eingegangen am 31. August 1940.)

Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$.

Von

Franz Rellich in Dresden.

Auf die elliptischen Funktionen ist man beim Studium einer einfachen Differentialgleichung erster Ordnung gestoßen, nämlich der Gleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = P(y)$, in der $P(y)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades bedeutet. Die außerordentliche Rolle, welche die elliptischen Funktionen seit ihrer Entdeckung bei Anwendungen der Analysis spielen, beruht auf dem häufigen Auftreten dieser Differentialgleichung bei derartigen Untersuchungen.

Die Grundaussage, die bei jedem Aufbau einer Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen werden muß, ist der Satz von Abel: *In einer Umgebung von $x = x_0$ der komplexen Veränderlichen x sei $y(x)$ eine reguläre analytische Lösung der Differentialgleichung $y'^2 = P_3(y)$, in der $P_3(y)$ ein Polynom dritten*[1] *Grades mit lauter verschiedenen Wurzeln bedeutet. Dann gilt: 1. $y(x)$ läßt sich über seinen um x_0 gezogenen Konvergenzkreis hinaus zu einer in der ganzen Ebene erklärten meromorphen Funktion fortsetzen. 2. Diese meromorphe Funktion ist doppeltperiodisch, d. h. es gibt zwei von Null verschiedene Zahlen ω_1 und ω_2 mit nichtreellem Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ derart, daß $y(x + \omega_1) = y(x)$ und $y(x + \omega_2) = y(x)$ ist. 3 Sind $y(x)$ und $u(x)$ zwei (meromorphe) nichtkonstante Lösungen, dann ist $u(x) = y(x + c)$ mit geeigneter Konstanten c.*

Zum Beweis dieses Satzes sind in der Hauptsache zwei Wege beschritten worden. Einmal kann man ausgehen von der Bemerkung, daß sich die Umkehrfunktion zu $y(x)$ durch eine Quadratur bestimmen läßt als das elliptische Integral $x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{P_3(y)}} + x_0$. Auf diesem Wege gewinnt man zugleich mit dem Abelschen Satz die Einsicht in die geometrischen Tatsachen, die diesem Satze zugrunde liegen. Die einzelnen Beweisschritte werden geleistet durch Sätze über geometrische Figuren, man denke an den Beweis dafür, daß $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nicht reell ist. Man ist bei diesem Beweisgang gezwungen, eine Reihe von geometrischen Begriffen wie Riemannsche Fläche, Integrationsweg usw. scharf zu fassen und man hat es von vornherein mit mehrdeutigen Funktionen zu tun.

[1]) Wie üblich, beschränken wir uns auf Polynome *dritten* Grades.

Demgegenüber bleibt man beim zweiten, von WEIERSTRASS angegebenen Weg im Bereich der eindeutigen Funktionen. Man geht nicht von der Differentialgleichung aus, sondern von der Definition der elliptischen Funktion und zeigt umgekehrt das Bestehen der Differentialgleichung für elliptische Funktionen. Daß jede Lösung doppeltperiodisch ist, folgt erst durch Heranziehung der Modulfunktionen. Die Klarheit und leichte Übersehbarkeit der Schlüsse in diesem Aufbau beruht vor allem auf der Vermeidung mehrdeutiger Funktionen.

Hat man in erster Linie die Theorie der Differentialgleichungen im Auge und faßt man den ABELschen Satz nur als ein Beispiel zur allgemeinen Theorie auf, dann erscheinen beide Wege unbefriedigend, denn dann ist die Erwartung berechtigt, man müßte den ABELschen Satz direkt aus den bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen gewinnen können, und zwar ohne sich auf den Begriff der mehrdeutigen Funktion zu stützen, aber auch ohne den Umweg von WEIERSTRASS zu gehen. Die erste Aussage des ABELschen Satzes, nämlich die Behauptung, daß $y(x)$ meromorph ist, wurde auf diese Weise von PICARD gezeigt, und es schien mir von Interesse, auch die doppelte Periodizität von diesem Standpunkt aus zu beweisen. Das ist in der Tat sehr einfach möglich und wird im ersten Teil dieser Arbeit durchgeführt.

In einem zweiten Teil (§ 3) benutze ich die entwickelten Schlußweisen zum Beweis des Satzes, daß jede ganze Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung $u'' = f(u)$ eine Konstante ist, wenn $f(u)$ eine ganze, nichtlineare Funktion bedeutet, also eines Satzes, der zu dem Fragenkreis gehört, den ich vor einiger Zeit in einer Arbeit[2]) angeschnitten habe. Ähnlich wie in der genannten Arbeit benötige ich auch hier das Theorem von PICARD über die Ausnahmewerte einer ganzen Funktion. Außerdem ziehe ich ein Lemma heran, das ich für den Beweis des ABELschen Satzes aufgestellt habe und das mir nach einigen Fallunterscheidungen erlaubt, $u(x)$ als doppeltperiodisch und damit, da es ganz ist, als konstant zu erkennen.

§ 1.

Hilfsmittel aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

In der Differentialgleichung $y'' = f(y)$ sei $f(y)$ eine ganze Funktion von y. Dann gibt es zu drei komplexen Zahlen x_0, y_0, y_0' eine und nur eine in einer Umgebung von $x = x_0$ reguläre analytische Lösung $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Sind A und B irgendwelche positiven Zahlen, so gibt es für die

[2]) Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Math. Annalen 117 (1940), S. 587.

Gesamtheit aller Lösungen $y(x)$ mit $|y(x_0)| \leqq A$, $|y'(x_0)| \leqq B$ einen gemeinsamen Kreis $|x - x_0| < r$, in dem sie regulär analytisch sind; r hängt nicht von x_0 ab.

Diesen Satz benutzen wir ohne Beweis. Der bekannte Majorantenbeweis liefert zugleich die Existenz des positiven Radius r.

§ 2.

Beweis des Satzes von Abel.

In diesem Paragraphen bedeutet $y(x)$ eine feste, in einer Umgebung von $x = x_0$ reguläre analytische, aber nicht konstante Lösung der Differentialgleichung

$$y'^2 = P_3(y), \tag{1}$$

in der $P_3(y)$ ein Polynom dritten Grades mit lauter verschiedenen Wurzeln ist. Offenbar genügt $y(x)$ auch der Gleichung

$$y'' = p(y) \quad \text{mit} \quad p(y) = \frac{1}{2}\frac{dP_3}{dy}. \tag{1a}$$

I. *$y(x)$ läßt sich zu einer meromorphen Funktion fortsetzen.* Zunächst eine Bemerkung von Picard: Es gibt eine positive Zahl ϱ, so daß für jede in einer Umgebung eines beliebigen x_0 reguläre Lösung $u(x)$ von (1) gilt: entweder $u(x)$ oder $\frac{1}{u(x)}$ ist regulär in $|x - x_0| < \varrho$. Wir geben den Beweis von Picard[3]) für diese Tatsache mit einer kleinen Abwandlung wieder. Es sei x_0 beliebig. Die Gesamtheit aller nichtkonstanten, in einer Umgebung von x_0 regulären Lösungen $u(x)$ von (1), also auch von (1a), teilen wir in zwei Klassen, je nachdem ob $|u(x_0)| \leqq 1$ oder $|u(x_0)| > 1$ gilt. Für alle $u(x)$ der ersten Klasse ist wegen $u'^2 = P_3(u)$ offenbar $|u'(x_0)| \leqq B$ mit geeigneter Konstanten B. Nach § 1 sind daher alle Lösungen der ersten Klasse regulär in einem festen Kreis $|x - x_0| < r$, wobei r nicht von x_0 abhängt. Gehört $u(x)$ zur zweiten Klasse, so setze man $v(x) = \frac{1}{u(x)}$. War $P_3(u) = a(u - \varkappa_1)(u - \varkappa_2)(u - \varkappa_3)$, so wird $v'^2 = av(1 - \varkappa_1 v)(1 - \varkappa_2 v)(1 - \varkappa_3 v)$ und $v'' = q(v)$, wo $q(v)$ ein Polynom in v ist. Für alle $v(x)$ ist $|v(x_0)| \leqq 1$ und daher $|v'(x_0)| \leqq B'$ mit geeigneter Schranke B'. Also sind (§ 1) alle $v(x)$ regulär in einem festen Kreis $|x - x_0| < r'$, wobei r' nicht von x_0 abhängt, und man hat mit $\varrho = \text{Min}(r, r')$ die Behauptung von Picard.

Hat nun $y(x)$ um x_0 einen endlichen Konvergenzkreis, dann sei ξ ein singulärer Randpunkt und x_1 ein Punkt aus dem Innern des Konvergenz-

[3]) E. Picard, Traité d'analyse t. II., p. 379. Paris 1905.

kreises, der von ξ die Entfernung $\frac{\varrho}{2}$ hat. Nach dem eben Bewiesenen ist entweder $y(x)$ oder $\frac{1}{y(x)}$ regulär in $|x - x_1| < \varrho$, also auch in ξ, d. h. $y(x)$ hat in ξ einen Pol; natürlich gibt es nur endlich viele Pole auf dem Rande des Konvergenzkreises. Würde sich $y(x)$ nicht über seinen Konvergenzkreis hinaus zu einer meromorphen Funktion fortsetzen lassen, dann gäbe es einen Kreis um x_0, in dessen Innern $y(x)$ bis auf abzählbar unendlich viele Pole regulär wäre, die sich in einem Randpunkt ξ' häufen würden. Ist x' ein Punkt aus dem Innern des Kreises in der Entfernung $\varrho/2$ von ξ' und ist $y(x)$ in x' regulär, dann ist $y(x)$ oder $\frac{1}{y(x)}$ regulär in $|x - x'| < \varrho$, also auch in ξ'; $y(x)$ ist in ξ' regulär oder es hat in ξ' einen Pol im Widerspruch zu der Annahme, ξ' sei Häufungspunkt von Polen.

II. *Jede nichtkonstante (meromorphe) Lösung von* (1) *ist von der Form* $y(x + c)$ *mit geeigneter Konstanten* c.

Sei $u(x)$ eine nichtkonstante meromorphe Lösung von (1). Dann muß es ein ξ und ein η geben mit $u(\xi) = y(\eta) \neq \infty$. [Denn $u(x)$ ist nicht konstant, nimmt also jeden Punkt einer geeigneten Kreisscheibe an und $y(x)$ kann nicht alle Punkte dieser Kreisscheibe auslassen, weil sonst $|y(x) - \varrho| \geqq r$ wäre, wenn ϱ der Mittelpunkt und r der Radius der Kreischeibe ist; aus $\left|\frac{1}{y(x) - \varrho}\right| \leqq \frac{1}{r}$ würde aber folgen $y(x) = \text{const.}$]. Daraus mit $Y(x) = y(x + \eta - \xi)$ sowohl $u(\xi) = Y(\xi)$ als auch $u'(\xi) = \pm Y'(\xi)$. Ist $u'(\xi) = Y'(\xi)$, dann ist $u(x) = Y(x)$, weil $u(x)$ und $Y(x)$ beide Lösungen von (1a) sind. Ist $u'(\xi) = -Y'(\xi)$, so ist $u(x) = Y(2\xi - x)$. Denn auch $v(x) = Y(2\xi - x)$ ist Lösung von (1a) und $v'(\xi) = -Y'(\xi) = u'(\xi)$, $v(\xi) = u(\xi)$. Es ist also $u(x)$ entweder gleich $y(x + \eta - \xi)$ oder gleich $y(\eta + \xi - x)$ mit geeigneten ξ, η. — Nun soll gezeigt werden, daß es eine Stelle α gibt mit $y'(\alpha) = 0$. Dazu sei $\varphi(x)$ diejenige Lösung von (1a), für welche $\varphi(0) = \varkappa$, $\varphi'(0) = 0$ ist, wobei $\varkappa$ irgendeine der drei Nullstellen von $P_3(y)$ ist. [Ein solches $\varphi(x)$ gibt es nach dem Existenzsatz § 1.] Es ist $\varphi(x)$ eine meromorphe Funktion. Sie ist nicht konstant, weil $\varkappa$ eine einfache Nullstelle von $P_3(y)$, also $p(\varkappa) \neq 0$ ist. Nach dem eben Bewiesenen muß entweder $\varphi(x) = y(x + \eta - \xi)$ oder $\varphi(x) = y(\eta + \xi - x)$ sein mit geeigneten ξ, η; in beiden Fällen ist gezeigt, daß y' an einer Stelle α verschwindet. Dann ist aber $y(\eta + \xi - x) = y(2\alpha - \eta - \xi + x)$ für beliebiges ξ, η. Denn die beiden Funktionen stimmen für $x = \eta + \xi - \alpha$ samt erster Ableitung nach x überein und genügen beide derselben Differentialgleichung (1a). Wir können also jetzt nicht nur behaupten: entweder $u(x) = y(x + \eta - \xi)$ oder $u(x) = y(\eta + \xi - x)$, sondern auch: entweder $u(x) = y(x + \eta - \xi)$ oder $u(x) = y(2\alpha - \eta - \xi + x)$. Also jedenfalls $u(x) = y(x + c)$ mit geeignetem c.

Gleichzeitig hat sich ergeben, daß $y(x)$ jede der drei Nullstellen von $P_3(y)$ annimmt: $y(\alpha_1) = \varkappa_1$, $y(\alpha_2) = \varkappa_2$, $y(\alpha_3) = \varkappa_3$. Daß $y(x)$ doppeltperiodisch ist, folgt nun offenbar unmittelbar aus dem folgenden

Lemma. *Die meromorphe Funktion $u(x)$ sei Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(u)$, in der $f(u)$ eine ganze Funktion von u ist. An drei Stellen α_1, α_2, α_3, an denen $u(x)$ verschiedene Werte annimmt, verschwinde die Ableitung $u'(x)$. Dann ist $u(x)$ doppeltperiodisch.*

Beweis. Zunächst folgt aus $u'(\alpha) = 0$ sofort $u(\alpha + x) = u(\alpha - x)$. Denn setzt man $\varphi(x) = u(\alpha + x)$, $\psi(x) = u(\alpha - x)$, so hat man zwei Lösungen von $u'' = f(u)$, für die $\varphi(0) = \psi(0)$ und $\varphi'(0) = \psi'(0)$ ist. Also $\varphi(x) = \psi(x)$, wie behauptet. Wendet man das auf $\alpha = \alpha_2$ und auf $\alpha = \alpha_1$ an, so ergibt sich $u(x + 2\alpha_2 - 2\alpha_1) = u(\alpha_2 + x + \alpha_2 - 2\alpha_1) = u(\alpha_2 - x - \alpha_2 + 2\alpha_1) = u(\alpha_1 + \alpha_1 - x) = u(\alpha_1 - \alpha_1 + x) = u(x)$, d. h. $u(x)$ hat die Periode $\omega_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_1)$. Ersetzt man α_2 durch α_3, so zeigt sich, daß $u(x)$ auch die Periode $\omega_2 = 2(\alpha_3 - \alpha_1)$ hat. Beide Perioden sind von Null verschieden, weil $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ verschieden sein müssen. Wäre $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reell, so würden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auf einer Geraden liegen. Man darf annehmen, α_2 läge zwischen α_1 und α_3. Auf der Strecke α_1, α_3 kann es noch mehr Punktetripel geben, in denen $u(x)$ verschiedene Werte annimmt und $u'(x)$ verschwindet, aber gewiß nur endlich viele. Man greife eines heraus, das auf kürzester Strecke liegt; es heiße $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und β_2 liege zwischen β_1 und β_3. Es kann nicht β_2 in der Mitte von β_1 und β_3 liegen. Denn wegen $u'(\beta_2) = 0$ ist $u(\beta_1) = u(\beta_2 + \beta_1 - \beta_2) = u(\beta_2 - \beta_1 + \beta_2) = u(2\beta_2 - \beta_1)$, also wäre wegen $2\beta_2 - \beta_1 = \beta_3$ auch $u(\beta_1) = u(\beta_3)$, während $u(x)$ in β_1 und β_3 verschiedene Werte annehmen sollte. Man darf also annehmen, β_2 läge näher an β_1 als an β_3. Spiegelt man β_1 auf der Geraden am Punkt β_2, so erhält man den Punkt $\beta_1' = 2\beta_2 - \beta_1$ und es ist wegen $u(\beta_2 + x) = u(\beta_2 - x)$ sowohl $u(\beta_1) = u(\beta_2 + \beta_2 - \beta_1) = u(\beta_2 - \beta_2 + \beta_1) = u(\beta_1)$ als auch $u'(\beta_1') = u'(\beta_2 + \beta_2 - \beta_1) = -u'(\beta_2 - \beta_2 + \beta_1) = -u'(\beta_1) = 0$. In den drei Punkten $\beta_2, \beta_1', \beta_3$ verschwindet $u'(x)$ und es nimmt $u(x)$ verschiedene Werte an. Sie liegen aber auf kürzerer Strecke als $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Damit hat man den Widerspruch zur Annahme $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ sei reell und das Lemma ist bewiesen; zugleich der Satz von Abel.

§ 3.

Die ganzen Lösungen von $u'' = f(u)$.

Es sei $u(x)$ eine ganze Funktion der komplexen Veränderlichen x und Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(u)$, in der $f(u)$ eine ganze aber nichtlineare Funktion von u bedeutet. Dann ist $u(x)$ eine Konstante.

Zum Beweis dieses Satzes bemerke man zunächst, daß jede ganze Lösung $u(x)$ auch einer Differentialgleichung der Form

$$u'^2 = F(u) \tag{2}$$

genügt, wobei $F(u)$ eine ganze Funktion von u ist, die kein Polynom zweiten (oder kleineren) Grades in u sein kann; es ist $\frac{dF}{du} = 2f(u)$. Es genügt zu zeigen, daß jede ganze Lösung von (2) konstant sein muß. Im folgenden Beweis bedeutet $u(x)$ eine feste ganze Lösung von (2).

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $F(u)$ besitzt mindestens zwei verschiedene mehrfache Wurzeln,
2. $F(u)$ besitzt genau eine mehrfache Wurzel,
3. $F(u)$ besitzt keine mehrfache Wurzel.

Erster Fall. Wäre die ganze Lösung $u(x)$ nicht konstant, dann müßte sie nach Picard eine der mehrfachen Wurzeln, wir nennen sie $\varkappa$, annehmen: $u(\xi) = \varkappa$. Außerdem wäre dann neben $u'^2 = F(u)$ auch $u'' = f(u)$. Nun ist $u(\xi) = \varkappa, u'(\xi) = 0$ und es ist die Funktion $v(x) = \varkappa$ eine Lösung von $v'' = f(v)$ für die gleichfalls $v(\xi) = \varkappa$, $v'(\xi) = 0$ gilt. Also $u(x) = v(x) = \varkappa$ und man ist fertig.

Zweiter Fall. Würde $u(x)$ die (einzige) mehrfache Wurzel $\varkappa$ annehmen, dann wäre $u(x) = \varkappa$ wie eben gezeigt. Andernfalls ist $u(x) = \varkappa + e^{v(x)}$ mit ganzem $v(x)$. Aus $u'^2 = (u - \varkappa)^h \overline{F}(u)$ folgt $v'^2 = e^{(h-2)v} \overline{F}(\varkappa + e^v) = G(v)$. Hier hat $G(v)$ keine mehrfache Wurzel, weil $\overline{F}(u)$ keine hat. Außerdem kann $G(v)$ kein Polynom zweiten oder kleineren Grades sein. Denn da es die Periode $2\pi i$ besitzt, könnte es nur eine Konstante C sein. Aus $C = e^{(h-2)v} \overline{F}(\varkappa + e^v)$ folgt im Falle $h > 2$ aber $C = 0$, indem man v auf der negativen reellen Achse gegen ∞ laufen läßt und es wäre $\overline{F}(u) = 0$ und damit $F(u) = 0$, was unmöglich ist. Wenn aber $h = 2$, dann $\overline{F}(u) = C$, also $F(u)$ quadratisch in u, was auch ausgeschlossen war. Damit hat man den zweiten Fall auf den dritten geführt. Es bleibt also nur noch zu zeigen

Dritter Fall. Jede ganze Lösung von $u'^2 = F(u)$ ist eine Konstante, wenn die ganze Funktion $F(u)$ kein Polynom zweiten oder kleineren Grades ist und wenn $F(u)$ lauter einfache Nullstellen hat. Wir unterscheiden zum Beweis zwei Fälle. I. $F(u)$ hat höchstens zwei Nullstellen. II. $F(u)$ hat mindestens drei Nullstellen.

I. Wir schreiben $F(u) = P_2(u) G^2(u)$, wobei $P_2(u)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist, das alle Nullstellen von $F(u)$ enthält. Dann ist $G(u)$ ganz transzendent. [Wäre G konstant, dann wäre $F(u)$ quadratisch; wäre G ein nichtkonstantes Polynom, dann enthielte $P_2(u)$ nicht alle Nullstellen von $F(u)$.] Nun sei $w(x)$ eine ganze, nicht konstante Lösung der Differentialgleichung $w'^2 = P_2(w)$. [Wenn $P_2(w) = -k^2(w - \varkappa_1)(w - \varkappa_2)$ und $k \neq 0$,

dann $w(x) = \frac{\varkappa_3 + \varkappa_1}{2} + \frac{\varkappa_3 - \varkappa_1}{2} \sin(kx)$; wenn $P_2(w) = k(w - \varkappa)$, dann $w(x) = \varkappa + \frac{k}{4} x^2$; wenn $P_2(w) = k^2$, dann $w(x) = kx$.] Dann gibt es eine zunächst in einem geeigneten Kreis reguläre Funktion $z(x)$, für die dort $u(x) = w(z(x))$ ist. Aus $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = P_2(w) \cdot G^2(w)$ folgt $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = G^2(w)$, also $\frac{dz}{dx} = \pm G(w(z(x))) = \pm G(u(x))$. Daraus ergibt sich, daß $z(x)$ sogar eine ganze Funktion von x ist. Außerdem genügt $z(x)$ der Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = H(z)$ mit $H(z) = \pm G(w(z))$. Es ist $H(z)$ eine ganze Funktion von z. Da $G(w)$ keine Nullstelle hat, kann $H(z)$ keine lineare Funktion sein. Daraus folgt[2]), daß $z(x)$ konstant ist, also auch $u(x)$.

II. $u'^2 = F(u)$, wobei $F(u)$ drei einfache Nullstellen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ hat. Wir wollen zeigen, daß $u(x)$ jede dieser drei Nullstellen annimmt. Sei also $\varkappa$ eine einfache Nullstelle von $F(u)$ und sei $v(x)$ diejenige, in einer Umgebung von $x = 0$ reguläre Lösung von $v'' = f(v)\left(= \frac{1}{2}\frac{dF}{dv}\right)$, für die $v(0) = \varkappa$ und $v'(0) = 0$ ist. Wegen $f(\varkappa) \neq 0$ kann $v(x)$ nicht konstant sein. Also nimmt es eine volle Kreisscheibe um den Wert $\varkappa$ an. Da $u(x)$, falls es nicht konstant ist, nicht alle Punkte der Kreisscheibe ausläßt, gibt es ein ξ aus der Umgebung von $x = 0$, in der $v(x)$ regulär ist, und ein η derart, daß $v(\xi) = u(\eta)$ wird, d. h. daß $v(x)$ und $U(x) = u(x + \eta - \xi)$ im Punkt $x = \xi$ übereinstimmen: $v(\xi) = U(\xi)$. Wegen $F(\varkappa) = 0$ ist $v'^2 = F(v)$, also $v'(\xi) = \pm U'(\xi)$. Ist $v'(\xi) = U'(\xi)$, so ist $v(x) = U(x)$ und $U(0) = u(\eta - \xi) = \varkappa$. Ist $v'(\xi) = -U'(\xi)$, so ist $v(x) = U(2\xi - x)$, weil beide Funktionen samt erster Ableitung in $x = \xi$ übereinstimmen und der Differentialgleichung $u'' = f(u)$ genügen. In diesem Falle ist $U(2\xi) = u(\xi + \eta) = \varkappa$. In beiden Fällen nimmt also $u(x)$ den Wert $\varkappa$ an. Es gibt also drei Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit $u(\alpha_1) = \varkappa_1$, $u(\alpha_2) = \varkappa_2$, $u(\alpha_3) = \varkappa_3$. Also verschwindet die Ableitung $u'(x)$ an drei Stellen, an denen $u(x)$ verschiedene Werte annimmt. Nach dem Lemma vom Ende des § 2 ist $u(x)$ doppeltperiodisch. Da es zugleich ganz ist, muß es konstant sein. Damit ist der behauptete Satz vollständig bewiesen.

Man gewinnt keine wesentlichen neuen Erkenntnisse, wenn man an Stelle ganzer Lösungen $u(x)$ meromorphe Lösungen zuläßt. Denn wenn in der Differentialgleichung $u'' = f(u)$ die rechte Seite eine ganze Funktion von u aber kein Polynom dritten oder kleineren Grades ist, dann kann es überhaupt keine Lösung mit einem Pol geben. Wäre nämlich $u(x)$ regulär in $0 < |x - x_0| < \varrho$ und wäre dort

$$u(x) = \frac{a_{-k}}{(x - x_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \cdots, \quad a_k \neq 0, \quad k \geqq 1,$$

so hätte man

$$\frac{k(k+1)}{(x-x_0)^{k+2}}a_{-k} + \frac{(k-1)k}{(x-x_0)^{k+1}}a_{-k+1} + \cdots = f(u(x)).$$

Da $f(u(x))$ also in $x = x_0$ einen Pol hat, kann $f(u)$ in u nur ein Polynom sein. Ist der Grad des Polynoms n, dann hat $f(u(x))$ in x_0 einen Pol der Ordnung nk, also $nk = k + 2$. Wegen $k \geqq 1$ muß $n = 3$ oder $n = 2$ sein.

Der zu Beginn des Paragraphen formulierte Satz kann also auch in der Form ausgesprochen werden: *Es sei $u(x)$ eine meromorphe Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(u)$, in der $f(u)$ eine ganze Funktion bedeutet, die kein Polynom dritten oder niedrigeren Grades ist. Dann ist $u(x)$ eine Konstante.*

(Eingegangen am 9. Oktober 1940.)

Zwei Beispiele ganzer Funktionen mit algebraischem Höchstindex einer Stellensorte.

Von

Gunnar af Hällström in Abo.

1. Wir betrachten im folgenden die Produkte

$$(1) \qquad c(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \cos\frac{z}{\nu}, \qquad s(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{z}{\nu}}{\frac{z}{\nu}}.$$

Sie sind ganze Funktionen von

$$z = x + iy = re^{i\varphi},$$

denn die Produkte (1) sind in jedem im Endlichen liegenden Bereich gleichmäßig konvergent. Für $|z| \leqq R$ ist nämlich

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\infty} \left|1 - \cos\frac{z}{\nu}\right| = \frac{|z^2|}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left|1 - \frac{z^2}{12\,\nu^2} + \cdots\right|,$$

wo $\left|1 - \frac{z^2}{12\,\nu^2} + \cdots\right|$ für alle ν unterhalb einer festen Schranke A_R liegt, so daß die Summe (2) kleiner als $\frac{1}{2} R^2 A_R \zeta(2)$ ist. Ebenso ist

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty} \left|1 - \frac{\sin\frac{z}{\nu}}{\frac{z}{\nu}}\right| = \frac{|z^2|}{6} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left|1 - \frac{z^2}{20\,\nu^2} + \cdots\right| < \frac{R^2}{6} B_R \zeta(2).$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihen (2) und (3) zieht diejenige der Produkte (1) nach sich.

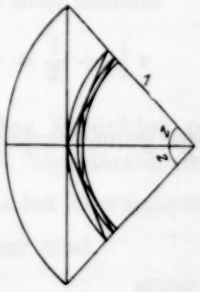

Fig. 1.

Anlaß zur Betrachtung der Funktion $c(z)$ gab ein geometrisches Problem. In einen Kreissektor mit dem Winkel $2z$ werde ein regulärer polygonaler Sektor mit n Sehnen eingeschrieben, in diesen wieder ein Kreissektor, in diesen ein regulärer polygonaler Sektor mit $n+1$ Sehnen usw. Fängt man mit einem Einheitskreissektor an und läßt n, von 1 ausgehend, alle ganzen Zahlen durchlaufen (Fig. 1), so nähern sich die ineinander geschachtelten Sektoren einem Grenzsektor, dessen Radius $c(z)$ ist.

Als Funktion einer komplexen Veränderlichen aufgefaßt zeigen $c(z)$ und die verwandte Funktion $s(z)$ Beziehungen zu zahlentheoretischen Funk-

tionen und Wertverteilungseigenschaften, welche ihnen ein gewisses Interesse verleihen.

2. Bevor wir zu einer Untersuchung der Eigenschaften der Funktionen (1) übergehen, haben wir zwei zahlentheoretische Funktionen zu betrachten.

Ist ν eine ganze Zahl, so bezeichne $v(\nu)$ die Anzahl *aller* ganzen Zahlen, welche Teiler in ν sind, und $u(\nu)$ sei die Anzahl der *ungeraden* Zahlen, welche Teiler in ν sind [1]).

Weil zu jedem Teiler $\mu > \sqrt{\nu}$ ein ergänzender Teiler $\frac{\mu}{\nu} < \sqrt{\nu}$ gehört, muß $v(\nu)$ (und um so mehr $u(\nu)$) $< 2\sqrt{\nu}$ sein.

Wir betrachten weiter die Summen

$$V(\nu) = \sum_{\mu=1}^{\nu} v(\mu), \qquad U(\nu) = \sum_{\mu=1}^{\nu} u(\mu).$$

Sie können in folgender Weise abgeschätzt werden [2]).

Die Zahl 1 ist in jeder der Zahlen $1, 2, \ldots, \nu$ als Faktor enthalten, und gibt zu der Summe $\Sigma v(\mu)$ den Beitrag ν. Die Zahl 2 ist Teiler in $2, 4, 6, \ldots$, also in $\left[\frac{\nu}{2}\right]$ Zahlen $\leqq \nu$. Allgemein ist μ $(\leqq \nu)$ in $\left[\frac{\nu}{\mu}\right]$ der Zahlen $\leqq \nu$ Teiler und liefert also zu den Gliedern $v(\mu)$ den Gesamtbeitrag $\left[\frac{\nu}{\mu}\right]$. So findet man

$$V(\nu) = \nu + \left[\frac{\nu}{2}\right] + \left[\frac{\nu}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{\nu}{\mu}\right] + \cdots + \left[\frac{\nu}{\nu-1}\right] + 1,$$

und in derselben Weise

$$U(\nu) = \nu + \left[\frac{\nu}{3}\right] + \left[\frac{\nu}{5}\right] + \cdots + \left[\frac{\nu}{2m+1}\right] + \cdots + \left[\frac{\nu}{\nu'}\right],$$

wo $\nu' = \nu$ oder $\nu' = \nu - 1$ je nachdem ν ungerade oder gerade ist.

Hieraus geht die für unsere Zwecke genügende Abschätzung hervor

$$\nu\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right\} - (\nu - 1) \leqq V(\nu) \leqq \nu\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right\}.$$

Eine geometrische Deutung der Summe $\sum_{1}^{\nu} \frac{1}{\mu}$ und des Integrals $\int_{1}^{\nu} \frac{dx}{x}$ zeigt, daß

$$\ln(\nu + 1) < \sum_{1}^{\nu} \frac{1}{\mu} \leqq 1 + \ln \nu,$$

woraus

$$\nu(\ln \nu - 1) < V(\nu) \leqq \nu(\ln \nu + 1).$$

---

[1]) Hier werden nur positive Zahlen ν und positive Teiler betrachtet.

[2]) Vgl. P. Bachmann, Die Analytische Zahlentheorie, S. 312. Leipzig 1894.

Ebenso bekommt man

$$\nu\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu'}\right\}-\left[\frac{\nu}{2}\right]\leqq U(\nu)\leqq\nu\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu'}\right\},$$

$$\frac{1}{2}\nu(\ln\nu-1)<U(\nu)\leqq\frac{1}{2}\nu(\ln\nu+2).$$

Wenn also $\varepsilon(\nu)$ jede zugleich mit $\frac{1}{\nu}$ verschwindende Größe vertritt, ist

$$V(\nu)=\nu\ln\nu(1+\varepsilon(\nu)),\quad U(\nu)=\tfrac{1}{2}\nu\ln\nu(1+\varepsilon(\nu)). \tag{4}$$

3. Aus den Ausdrücken

$$\frac{\sin\zeta}{\zeta}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta^2}{\pi^2\nu^2}\right),\qquad\cos\zeta=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{4\zeta^2}{\pi^2(2\nu-1)^2}\right) \tag{5}$$

können durch Produktbildung Darstellungen für $s(z)$ und $c(z)$ gewonnen werden, indem man ζ die Reihe $z, \frac{z}{2}, \frac{z}{3}, \ldots$ durchlaufen läßt. Das so für $s(z)$ entstandene Produkt enthält wieder Faktoren von der Form $\left(1-\frac{z^2}{\pi^2\nu^2}\right)$, und zwar sind so viele solche Faktoren vorhanden, wie es Teiler in ν gibt, also $v(\nu)$. Demnach gilt

$$s(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2\nu^2}\right)^{v(\nu)}, \tag{6}$$

und $s(z)$ hat in $z=+\pi\nu$ und $z=-\pi\nu$ je eine Nullstelle der Ordnung $v(\nu)$, was auch aus der ursprünglichen Darstellung (1) zu ersehen ist. In gleicher Weise sieht man ein, daß $c(z)$ für $z=+\frac{\pi\nu}{2}$ und $z=-\frac{\pi\nu}{2}$ je eine Nullstelle der Ordnung $u(\nu)$ besitzt, und findet

$$c(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2\nu^2}\right)^{u(\nu)}. \tag{7}$$

Wir haben oben unendliche Produkte von unendlichen Produkten gebildet und die Faktoren umgeordnet. Daß dies zulässig ist, folgt daraus, daß $\sum\frac{v(\nu)z^2}{\pi^2\nu^2}$ und $\sum\frac{u(\nu)z^2}{\pi^2\nu^2}$ wegen $u(\nu)\leqq v(\nu)<2\sqrt{\nu}$ absolut konvergieren, so daß (6) und (7) willkürlich in Doppelprodukte zerlegbar sind.

Mittels der Relation

$$\frac{\sin\frac{z}{\nu}}{\frac{z}{\nu}}=\frac{\sin\frac{z}{2\nu}}{\frac{z}{2\nu}}\cdot\cos\frac{z}{2\nu}$$

leitet man aus (1) die Funktionalgleichung

$$s(z) = c\left(\frac{z}{2}\right) s\left(\frac{z}{2}\right)$$

ab. Ersetzt man hier z durch $\frac{1}{2}z, \frac{1}{4}z, \ldots, 2^{-k+1}z$, erhält man

$$(8) \qquad s(z) = c\left(\frac{z}{2}\right) c\left(\frac{z}{4}\right) c\left(\frac{z}{8}\right) \cdots c\left(\frac{z}{2^k}\right) s\left(\frac{z}{2^k}\right),$$

und wegen $\lim_{k \to \infty} s(2^{-k}z) = 1$

$$s(z) = \prod_{k=1}^{\infty} c\left(\frac{z}{2^k}\right).$$

4. Wir wollen die Verteilung der mehrfachen Stellen der Funktionen $c(z)$ und $s(z)$ untersuchen. Da die beiden Funktionen gerade sind, genügt es, die Halbebene $x \geqq 0$ zu betrachten.

Es ist $v(1) = 1$, sonst $v(\nu) \geqq 2$. Weiter ist $u(1) = u(2) = u(4) = \cdots = u(2^k) = \cdots = 1$, sonst $u(\nu) \geqq 2$. Hieraus erhellt, daß *jede Nullstelle* $z = \pm \pi\nu$ *von* $s(z)$ *einem algebraischen Windungspunkt* $(v(\nu) - 1)$*-ter Ordnung entspricht*, sofern $\nu \geqq 2$ ist, während wieder *das* $c(z)$*-Bild von* $z = \pm \frac{\pi\nu}{2}$ *ein* $(u(\nu) - 1)$*-facher Windungspunkt ist*, vorausgesetzt, daß ν nicht von der Form 2^k ist. Alle diese Windungspunkte der Riemannschen Flächen von $s(z)$ und $c(z)$ liegen über dem Grundpunkt $z = 0$.

Wir wollen untersuchen, ob die Flächen noch weitere algebraische Windungspunkte besitzen. Wir behaupten, daß *sowohl* $s(z)$ *als* $c(z)$ *für* $y \neq 0$ *keine mehrfachen Stellen haben*, aber daß *auf der reellen Achse zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der betreffenden Funktion genau eine einfache Nullstelle ihrer Ableitung vorhanden ist.*

Durch logarithmisches Differentiieren bekommt man aus (6) und (7)

$$(9) \qquad \frac{s'(z)}{s(z)} = 2z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v(\nu)}{z^2 - \pi^2 \nu^2}, \qquad \frac{c'(z)}{c(z)} = 8z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u(\nu)}{4z^2 - \pi^2 \nu^2}.$$

Ist $y \neq 0$, liegt der Punkt z^2 außerhalb der positiven reellen Halbachse. Liegt z^2 in der oberen Halbebene, hat jedes Glied in der Summe einen Argumentwert zwischen π und 2π (mod 2π). Liegt wieder z^2 in der unteren Halbebene, ist die Argumentvariation der Glieder auf das Innere des Intervalls $(0, \pi)$ beschränkt. Für negatives z^2 schließlich ist jedes Glied negativ. In jedem dieser Fälle kann der Vektorzug, der die betreffende Summe geometrisch darstellt, sich nicht schließen, und man hat $s'(z) \neq 0$, $c'(z) \neq 0$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $s(z)$ bzw. $c(z)$ eine Nullstelle von $s'(z)$ bzw. $c'(z)$ liegt, folgt unmittelbar aus dem Satze von Rolle. Durch nochmalige Differentiation bekommt man aus (9)

$$D^{(2)} \ln s(z) = -2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v(\nu)(z^2 + \pi^2 \nu^2)}{(z^2 - \pi^2 \nu^2)^2},$$

$$D^{(2)} \ln c(z) = -8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u(\nu)(4z^2 + \pi^2 \nu^2)}{(4z^2 - \pi^2 \nu^2)^2}.$$

Da diese Ausdrücke zwischen den Nullstellen von $s(z)$ bzw. $c(z)$ negativ sind, kann $s' : s$ bzw. $c' : c$ (und somit s' bzw. c') daselbst nicht mehr als eine einfache Nullstelle haben. Hiermit ist die zweite Behauptung dargetan.

Der Punkt $z = 0$ ist Nullstelle von sowohl $s'(z)$ als $c'(z)$, und es ist $s(0) = c(0) = 1$. Die übrigen zwischen den Nullstellen von $s(z)$ fallenden Doppelpunkte dieser Funktion nennen wir $\pm \alpha_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß $\pi\nu < \alpha_\nu < \pi(\nu + 1)$. Ebenso bezeichnen wir mit $\pm \beta_\nu$ die Doppelpunkte von $c(z)$, wobei $\frac{\pi\nu}{2} < \beta_\nu < \frac{\pi(\nu+1)}{2}$. Die Zahlen $s(\alpha_\nu)$ und $c(\beta_\nu)$ liegen sämtlich im Innern der Intervalle $(-1, 0)$ und $(0, 1)$, denn, wie man sofort durch Betrachtung der Ausdrücke (6) und (7) feststellt, es gilt auf der reellen Achse

$$-1 < s(x) \leqq 1, \quad -1 < c(x) \leqq 1$$

mit Gleichheit nur für $x = 0$. Weiter ist

$$\lim_{\nu \to \infty} s(\pm \alpha_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} c(\pm \beta_\nu) = 0,$$

so daß die Spurpunkte der zu $\pm \alpha_\nu$ und $\pm \beta_\nu$ gehörigen Windungspunkte sich gegen den Punkt 0 häufen. In der Tat gilt nämlich

$$\lim_{x \to \pm\infty} s(x) = \lim_{x \to \pm\infty} c(x) = 0 \tag{10}$$

auf der reellen Achse. Das ersieht man in bezug auf $s(x)$ aus (1), wo schon der erste Faktor $\frac{\sin x}{x}$ gegen 0 strebt, während alle übrigen dem Betrage nach 1 bleiben. In bezug auf $c(x)$ zeigt man die Richtigkeit von (10) in folgender Weise. Sei $\varepsilon\ (> 0)$ beliebig klein. Man findet dann ein δ_ε, so daß $|\cos t| < \varepsilon$ für $\left|t - \frac{\pi}{2}\right| < \delta_\varepsilon$. Ist nun $x > \frac{\pi^2}{8\delta_\varepsilon}$, so ist

$$\frac{x}{\frac{\pi}{2} - \delta_\varepsilon} - \frac{x}{\frac{\pi}{2} + \delta_\varepsilon} > 1,$$

d. h. es gibt eine ganze Zahl ν, so daß $\frac{x}{\nu}$ ins Intervall $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_\varepsilon, \frac{\pi}{2} + \delta_\varepsilon\right)$ gelangt und $\left|\cos \frac{x}{\nu}\right| < \varepsilon$ ist. Weil die übrigen Faktoren in (1) dem Betrage nach < 1 sind, ist $|c(x)| < \varepsilon$. Dasselbe gilt für $x < -\frac{\pi^2}{8\delta_\varepsilon}$.

Auf der reellen Achse ändern $s(z)$ und $c(z)$ das Vorzeichen nur in den Punkten $\pm \pi \nu$ bzw. $\pm \frac{\pi \nu}{2}$, für welche $v(\nu)$ bzw. $u(\nu)$ eine ungerade Zahl ist. Weil zu jedem Teiler μ in ν ein ergänzender $\frac{\nu}{\mu}$ gehört, wofern nicht $\mu = \sqrt{\nu}$ ist, so ist $v(\nu)$ nur dann eine ungerade Zahl, wenn ν eine Quadratzahl ist. Beachtet man, daß $s(0) = 1$ ist, folgt dann

$$s(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad (2k)^2 < |x| < (2k+1)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$s(x) \leqq 0 \quad \text{für} \quad (2k-1)^2 < |x| < (2k)^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Zahl $u(\nu)$ ist dann und nur dann ungerade, wenn ν das 2^k-fache einer Quadratzahl d^2 ist, und $c(x)$ wechselt somit ihr Zeichen für $z = 2^k d^2 \frac{\pi}{2}$.

Wir haben gefunden, daß $s(z)$ und $c(z)$ den Zielwert 0 haben. Die beiden Zielwege, die positive und die negative reelle Achse, sind voneinander getrennt, denn, wie man leicht einsieht, hat man jedenfalls dann

$$\lim s(z) = \lim c(z) = \infty,$$

wenn z innerhalb der Winkel $\frac{\pi}{4} < |\arg z| < \frac{3\pi}{4}$ ins Unendliche rückt. Dann ist nämlich $\left|\arg\left(-\frac{z^2}{\pi^2 \nu^2}\right)\right| < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ und jeder Faktor in (6) und (7) dem Betrage nach > 1. Weil der erste Faktor unbeschränkt wächst, gilt dasselbe für $s(z)$ und $c(z)$. Somit haben s und c zwei getrennte Zielwege mit ∞ als Zielwert.

Weitere getrennte Zielwege können nicht vorkommen. Gesetzt wir hätten noch einen Zielweg von $s(z)$ mit endlichem Zielwert. Es kann angenommen werden, daß auf diesem Zielweg L_1 durchweg $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ gilt. Nach einem Satze von Iversen [3]) muß eine ganze Funktion zwischen zwei getrennten Zielwegen mit endlichen Zielwerten immer einen Zielweg L' mit dem Zielwert ∞ zeigen. Der Weg L' liegt hier zwischen der x-Achse und L_1. Dann muß es notwendig zwei Punkte, $z_1 = x_0 + iy_1$ auf L_1 und $z' = x_0 + iy'$ auf L', mit $y' < y_1$ und $|s(z')| > |s(z_1)|$ geben. Jedoch sieht man geometrisch ein, daß sowohl $|z - \pi\nu|$ als $|z + \pi\nu|$ wächst, wenn sich der Punkt z senkrecht von der x-Achse entfernt. Also wird der Betrag eines jeden Faktors $\frac{\pi^2 \nu^2 - z^2}{\pi^2 \nu^2}$ in (6) größer, wenn $y\,(> 0)$ wächst, indem $x = x_0$ bleibt. Es folgt $|s(z')| < |s(z_1)|$. Der Widerspruch zeigt die Richtigkeit [4]) unserer Behauptung in bezug auf $s(z)$. Für $c(z)$ zeigt man sie in gleicher Weise.

---

[3]) F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors 1914, S. 1—67.

[4]) Ganz wie oben wird die Existenz eines durch den Irrweg L_1 getrennten Zielweges L' mit $\lim s = \infty$ als unmöglich bewiesen.

5. Wir sind nun imstande, uns eine Auffassung von den Riemannschen Flächen zu bilden, welche über die w-Kugel durch Vermittlung der Gleichungen $w = s(z)$ und $w = c(z)$ ausgebreitet werden. In großen Zügen ist die Struktur beider Flächen mit denselben Worten charakterisierbar, warum eine Sonderbehandlung unnötig ist.

Die algebraischen Windungspunkte liegen teils über dem Punkte $w = 0$. Teils liegen sie über den zwei Strecken

$$-1 < w < 0, \quad 0 < w \leqq 1, \tag{11}$$

und zwar häufen sie sich gegen $w = 0$. In jedem Blatt liegt aber höchstens ein Windungspunkt eines jeden dieser Intervalle. Bezeichnen wir durch ϑ eine veränderliche Zahl aus dem Intervall

$$0 < \vartheta \leqq 1,$$

so können wir sagen, die Fläche sei über den Grundpunkten $-\vartheta$, 0, ϑ algebraisch verzweigt. Betrachten wir ϑ als fest, so bekommen wir eine mit der gegebenen topologisch äquivalente Fläche, welche durch einen Streckenkomplex darstellbar ist. Der Umstand, daß die Punkte $-\vartheta$ und ϑ sich in Wirklichkeit gegen 0 häufen, ruft zwei über $w = 0$ gelegene nach der Terminologie von Iversen (l. c.) indirekt kritische Singularitäten (mittelbare Randstellen) hervor. Sie entsprechen den zwei Zielwegen der reellen Achse. Außerdem tritt noch der Punkt $w = \infty$ als Singularität der Umkehrfunktion auf, indem über diesem Punkte zwei logarithmische Windungspunkte liegen, den zwei Zielweggebieten der oberen und der unteren Halbebene entsprechend.

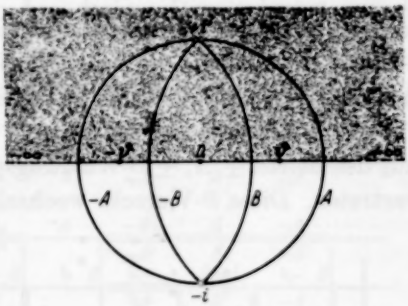

Fig. 2.

Fig. 2 stellt die w-Ebene mit den Windungspunkten ∞, $-\vartheta$, 0, ϑ dar. Als Repräsentant der oberen Halbebene sei der Punkt $w = i$, als Vertreter der unteren wieder $w = -i$ gewählt. Diese Knotenpunkte verbinden wir durch Wege $-A$, $-B$, B, A, die die reelle Achse in den Intervallen $(-\infty, -\vartheta)$, $(-\vartheta, 0)$, $(0, \vartheta)$ bzw. (ϑ, ∞) schneiden, und welche die Glieder des Streckenkomplexes vertreten sollen.

Fig. 3 zeigt den Graph von $c(z)$. Das Bild gibt die Art an, in welcher sich in der z-Ebene die Gebiete aneinanderreihen, in welchen $c(z)$ Werte aus der oberen (schattiert) bzw. aus der unteren Halbebene annimmt. Die Form- und Größenverhältnisse sind nur in bezug auf die Lage der Nullstellen sowie auf die Winkel in den Kreuzungspunkten richtig. Die Funktionswerte sind

an den Nullstellen und $\pm\vartheta$-Stellen eingetragen. Ebenso gibt $+$ und $-$ in der Figur die Zielwerte $\pm\infty$ längs der Bildkurven der positiven und negativen reellen w-Achse an. Die $\pm i$-Stellen werden durch Kreuze und kleine Kreise angegeben. Koordinaten der z-Ebene befinden sich in Klammern.

Aus Fig. 3 (und deren Fortsetzung) gelangt man leicht zu dem in Fig. 4 dargestellten Streckenkomplex, indem man die Lage der Knotenpunkte

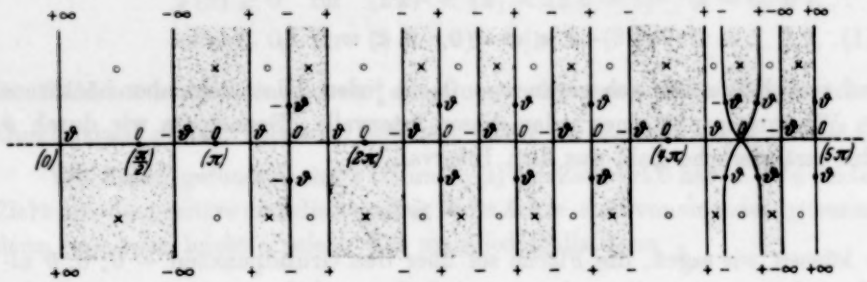

Fig. 3.

(d. h. $\pm i$-Stellen) fast ungeändert bleiben läßt und sie mittels der schematischen z-Bilder der Glieder $-A$, $-B$, B, A vereinigt. Die Lage der imaginären Achse ist links grob gezeichnet. Die 2λ-Ecke mit Seiten B, $-B$ entsprechen Windungspunkten der Ordnung $\lambda - 1$ über $w = 0$, während die Vierecke mit den Seiten $\pm A$, $\pm B$ Windungspunkte über $w = \pm\vartheta$ von der Ordnung 1 vertreten. Diese ϑ-Vierecke wechseln in der Streckenkomplexleiter beständig

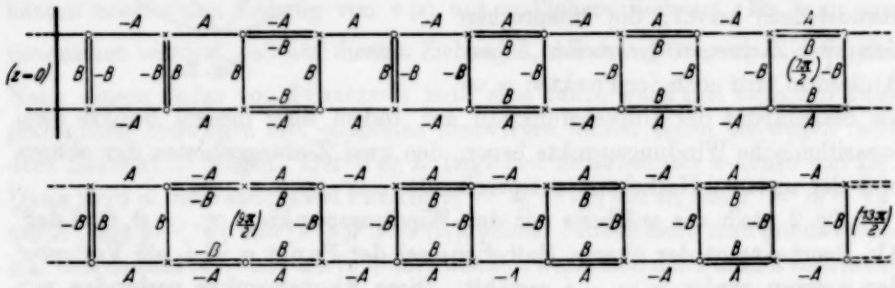

Fig. 4.

mit zum Punkte $w = 0$ gehörigen $2u$ ($|\nu|$)-Ecken ab (die für $\nu = \pm 2^k$ schlichte Blätter repräsentierende Zweiecke sind). An den Leiterseiten, welche die zu $w = \infty$ gehörigen logarithmischen Elementargebiete begrenzen, befinden sich auch unendlich viele $\pm\vartheta$-Zweiecke, welche schlichte Blätter über $\pm\vartheta$ vertreten.

Fig. 5 und 6 zeigen den Graph und den Streckenkomplex von $s(z)$. Die Abbildungen unterscheiden sich von den vorhergehenden u. a. darin,

daß für $w = 0$ nur zwei Zweiecke (ein ist ersichtlich) vorkommen (weil $v(|\nu|) = 1$, nur wenn $\nu = \pm 1$).

Der Komplex von $c(z)$ oder $s(z)$ kann als eine Abänderung des Sinuskomplexes angesehen werden. In der Sinusleiter (Fig. 7) sind alle 0-Elemente

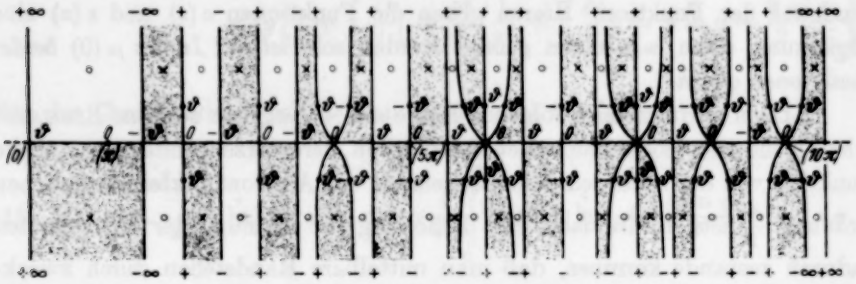

Fig. 5.

Zweiecke. Die Fig. 4 und 6 entstehen daraus, indem man einen Teil der Transversalen $-B$, B nach den Seiten hin dreht. Das bedeutet auf der

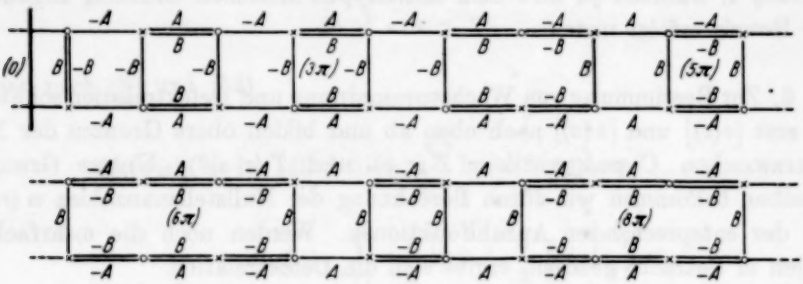

Fig. 6.

Riemannschen Fläche, daß Verzweigungspunkte über ϑ und $-\vartheta$ nach 0 hin verschoben werden, wobei, in dem Falle, wo es aufeinanderfolgende Win-

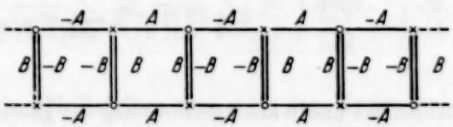

Fig. 7.

dungspunkte des Komplexes betrifft, dort Windungspunkte höherer Ordnung entstehen. Auf der Fläche findet dazu noch die Veränderung statt, daß die übriggebliebenen $\pm\vartheta$-Windungspunkte sich über die Intervalle (11) verbreiten.

Eine im Grunde gleichartige Verschiebung von Windungspunkten hat ULLRICH — von der Fläche des $\cos\sqrt{z}$ ausgehend — vorgenommen, um einen Streckenkomplex hervorzubringen, dessen erzeugende Funktion für einen w-Wert den Höchstwert 1 des Verzweigungsindexes $\mu(w)$ aufweist[5]). Bei diesem ersten Beispiel einer Funktion mit Höchstindex fehlt der analytische Ausdruck der Funktion. Hierzu geben die Funktionen $c(z)$ und $s(z)$ eine Ergänzung, denn, wie unten gezeigt werden soll, *ist der Index* $\mu(0)$ *beider Funktionen gleich* 1.

ULLRICH wirft zugleich folgende Frage auf[6]). Gegeben sei eine RIEMANNsche Fläche mit n logarithmischen Randstellen, deren erzeugende meromorphe Funktion von der nach dem Randstellensatz von AHLFORS[7]) kleinstmöglichen Ordnung $\frac{n}{2}$ ist. Kann dann eine Erhöhung der Ordnung der Erzeugenden dadurch zustande kommen, daß man mittelbare Randstellen durch zweckmäßige Verschiebung der algebraischen Windungspunkte hervorruft? Das war in dann bekannten Beispielen nicht der Fall. Auch bei Übergang von der Sinusfläche zu denjenigen von $c(z)$ und $s(z)$ wird die Ordnung nicht erhöht, wohl aber der Typus. Es sind nämlich $c(z)$ *und* $s(z)$ *vom Maximaltypus der Ordnung* 1, während ja $\sin z$ dem Mitteltypus derselben Ordnung angehört. Der Beweis erfolgt unten.

6. Zur Bestimmung von Wachstumsordnung und Defektrelation schätzen wir erst $|c(z)|$ und $|s(z)|$ nach oben ab und bilden obere Grenzen der NEVANLINNAschen Charakteristiken $T(r, c)$ und $T(r, s)$[8]). Untere Grenzen derselben bekommen wir durch Berechnung der Nullstellenanzahlen $n(r, 0)$ und der entsprechenden Anzahlfunktionen. Werden noch die mehrfachen Stellen in Betracht gezogen, ergibt sich die Defektrelation.

Mit Hilfe der Ungleichungen

$$|\cos(x+iy)| \leqq \cosh y,$$

$$\cosh t \leqq e^t, \qquad \cosh t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{2\nu}}{2^\nu \nu!} = e^{\frac{t^2}{2}} \qquad (t \geqq 0)$$

---

[5]) E. ULLRICH, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. **46** (1936), S. 232–274, insbes. S. 270–271.

[6]) ULLRICH, l. c., S. 267.

[7]) Erweiterung der DENJOYschen Vermutung. L. AHLFORS, Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. **6** (1932), S. 1–8.

[8]) Vgl. z. B. R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin, Julius Springer, 1936.

ergibt sich aus (1) für $y \geqq 0$

$$(12) \qquad \ln|c(x+iy)| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \ln\cosh\frac{y}{\nu} \leqq \sum_{\nu \leqq y} \frac{y}{\nu} + \sum_{\nu > y} \frac{y^3}{2\nu^3} <$$

$$< y\Big(1 + \int_1^y \frac{d^+t}{t}\Big) + \frac{y^3}{2}\Big(\frac{1}{y^3} + \int_y^{\infty} \frac{dt}{t^3}\Big) = y\overset{+}{\ln} y + \frac{3y}{2} + \frac{1}{2}.$$

Für die Charakteristik erhält man, da $c(-z) = c(z)$ ist,

$$(13) \quad T(r,c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln}|c(re^{i\varphi})|\,d\varphi < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(r\sin\varphi\overset{+}{\ln} r + \frac{3r\sin\varphi}{2} + \frac{1}{2}\Big)d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(r\overset{+}{\ln} r + \frac{3r}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Bezeichnet man mit A den Höchstwert von $\ln|s(z)|$ im Kreise $|z| \leqq 1$, und wählt man, falls $r > 1$, die ganze Zahl $k\,(>0)$ so, daß

$$2^{k-1} < r \leqq 2^k,$$

so ist nach (8) und (12)

$$\ln|s(z)| = \ln|s(2^{-k}z)| + \sum_{\nu=1}^{k} \ln|c(2^{-\nu}z)| <$$

$$< A + \sum_{\nu=1}^{k} \Big(\frac{y}{2^\nu}\overset{+}{\ln} y + \frac{3}{2}\,\frac{y}{2^\nu}\Big) + \frac{k}{2} <$$

$$< A + y\overset{+}{\ln} y + \frac{3y}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\overset{+}{\ln} r}{\ln 4}.$$

Aus der Ungleichung, die offenbar auch für $r \leqq 1$ gilt, bekommt man durch Integration

$$(14) \qquad T(r,s) < \frac{2}{\pi}\Big(r\overset{+}{\ln} r + \frac{3r}{2}\Big) + \frac{\overset{+}{\ln} r}{\ln 4} + \frac{1}{2} + A.$$

Die Anzahl der Nullstellen von $c(z)$ im Kreise $|z| \leqq \frac{\pi\nu}{2}$ ist

$$n\Big(\frac{\pi\nu}{2}, 0, c\Big) = 2U(\nu) = \nu\ln\nu\,(1+\varepsilon(\nu)),$$

(vgl. (4)), während für $s(z)$

$$n(\pi\nu, 0, s) = 2V(\nu) = 2\nu\ln\nu\,(1+\varepsilon(\nu))$$

gilt. In beiden Fällen ergibt sich

$$n(r,0) = \frac{2}{\pi} r \ln r (1 + \varepsilon(r)), \tag{15}$$

und für die Anzahlfunktion bekommt man den Ausdruck

$$N(r,0) = \int_0^r n(t,0)\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi} r \ln r (1 + \varepsilon(r)).$$

Indessen ist $N(r, 0)$ + const eine Minorante der Charakteristik, und da andererseits die Abschätzungen (13) und (14) gelten, ergibt sich für sowohl $c(z)$ als $s(z)$

$$T(r) = \frac{2}{\pi} r \ln r (1 + \varepsilon(r)),$$

und die beiden Funktionen sind somit vom Maximaltypus der Ordnung 1.

Die λ-fachen Nullstellen von c und s treten $(\lambda - 1)$-fach bei der Abzählung der Anzahl $n_1(r)$ der vielfachen Stellen für $|z| \leqq r$ auf. An Stelle dessen gibt es immer zwischen zwei Nullstellen genau eine zweifache Stelle, die einfach in $n_1(r)$ mitgezählt werden soll. Die Zahl $n_1(r)$ unterscheidet sich darum höchstens um Eins von $n(r, 0)$, weshalb auch die entsprechende Anzahlfunktion

$$N_1(r) = \frac{2}{\pi} r \ln r (1 + \varepsilon(r))$$

wird. Hieraus ergibt sich, daß *der totale Verzweigungsindex beider Funktionen*

$$\mu = \lim_{r \to \infty} N_1(r) : T(r) = 1$$

ist. Das letzte gilt aber auch dem Verzweigungsindex des Wertes 0. Denn die Anzahl der λ-fachen Nullstellen, $(\lambda - 1)$-fach gezählt, ist im Kreise $|z| \leqq \frac{\pi\nu}{2}$ für $c(z)$ gleich $n\left(\frac{\pi\nu}{2}, 0, c\right) - 2\nu$, und im Kreise $|z| \leqq \pi\nu$ für $s(z)$ gleich $n(\pi\nu, 0, s) - 2\nu$. Also bekommt man auch für $n_1(r, 0)$ den Ausdruck rechts in (15), für $N_1(r, 0)$ denselben Ausdruck, und der Verzweigungsindex $\mu(0) = 1$.

Weil eine ganze Funktion niemals ∞ wird, ist der Defekt $\delta(\infty) = 1$, und die Defekt- und Indexsumme ist für $c(z)$ und $s(z)$ die höchstmögliche

$$\delta(\infty) + \mu(0) = 2.$$

7. Wir wollen noch die Maclaurinschen Potenzreihen der für $z = 0$ verschwindenden Zweige der Funktionen $\ln s(z)$ und $\ln c(z)$ herleiten. Sie sind für $|z| \leqq \pi$ bzw. $|z| \leqq \frac{\pi}{2}$ gültig.

Von den für $\Re s > 1$ gültigen Relationen

$$\zeta(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^s}, \tag{16}$$

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+1}}{\mu^s}, \tag{17}$$

erhalten wir durch Quadrieren der ersten Reihe bzw. durch Multiplizieren der beiden miteinander

$$[\zeta(s)]^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v(\nu)}{\nu^s}, \tag{18}$$

$$(1 - 2^{1-s})\,[\zeta(s)]^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u(\nu) - (v(\nu) - u(\nu))}{\nu^s}. \tag{19}$$

Im ersten Falle kommt nämlich der Nenner ν^s bei einer Produktbildung so oft vor, wie es Teiler μ in ν gibt, also $v(\nu)$-mal. Im zweiten Falle liefern die ungeraden Teiler μ in ν aus (17) Teilprodukte der Form $+\nu^{-s}$, und die geraden μ Teilprodukte der Form $-\nu^{-s}$, und es gibt $u(\nu)$ Teiler der ersten Art, $v(\nu) - u(\nu)$ der zweiten. Wird $\Sigma v(\nu)\,\nu^{-s}$ gemäß (18) in (19) eingetragen, ergibt sich

$$(1 - 2^{-s})\,[\zeta(s)]^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u(\nu)}{\nu^s}. \tag{20}$$

Hiernach gibt uns (6) und (7)

$$\ln s(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} v(\nu) \ln\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 \nu^2}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(\nu)}{n\,\nu^{2n}} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n},$$

$$\ln c(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u(\nu) \ln\left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2 \nu^2}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(\nu)}{n\,\nu^{2n}} \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{2n}.$$

Durch Umkehrung der Summationsreihenfolge folgt gemäß (18) und (20)

$$\ln s(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\zeta(2n)]^2}{n} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n}, \tag{21}$$

$$\ln c(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2^{-2n}) \frac{[\zeta(2n)]^2}{n} \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{2n} \tag{22}$$

Diese Reihen sind den entsprechenden für $\ln \frac{\sin z}{z}$ und $\ln \cos z$ sehr ähnlich, indem in diesen die erste Potenz von $\zeta(2n)$ an Stelle der zweiten auftritt.

Geht man nämlich von den Produktentwicklungen (5) aus, gelangt man wie oben durch Doppelreihen und vermittels (16) und (17) zu den Reihen

$$(23)\quad \ln\frac{\sin z}{z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{n}\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n},\quad \ln\cos z = -\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^{-2n})\frac{\zeta(2n)}{n}\left(\frac{2z}{\pi}\right)^{2n}.$$

Es sei bemerkt, daß die Reihen (21) und (22) auch mit Hilfe von (1) und den bekannten Reihen von $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$ und $\operatorname{tg} x$ (die ja auch zur Aufstellung der Reihen (23) dienen) durch Integration hervorgehen, wenn man die Relation

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2(2n)!}$$

zwischen den Bernoullischen Zahlen und der ζ-Funktion beachtet.

(Eingegangen am 17. August 1940.)

Über beschränkte Funktionen, welche gegebene Paare von Randbogen ineinander überführen.

Von

V. Paatero in Helsinki.

1.

Problemstellung.

1. Das sog. Löwnersche Lemma [1]) bestimmt den Wertevorrat einer für $|x| < 1$ regulären, beschränkten analytischen Funktion $y(x)$ ($|y| \leqq 1$), die auf einem Randbogen α regulär ist und hier Werte annimmt, welche auf einen Randbogen β des Kreises $|y| = 1$ fallen. Der Punkt $y = y(x)$ fällt in oder auf den Rand eines Zweiecks, das vom Bogen β und demjenigen Kreisbogen K_β begrenzt wird, der als Bild des von x nach den Endpunkten von α gezogenen Kreisbogens K_α erscheint, falls $|x| \leqq 1$ auf $|y| \leqq 1$ linear so abgebildet wird, daß α in β übergeht. Hierbei fällt der Punkt $y = y(x)$ auf den Bogen K_β dann und nur dann, wenn $y(x)$ jene lineare Transformation ist. Ist insbesondere $y(0) = 0$, so ist $\beta \geqq \alpha$.

2. Das Löwnersche Lemma gibt zu der allgemeineren Frage Veranlassung, wie die Variabilität von $y(x)$ eingeschränkt wird, wenn statt des Bogenpaares α, β *mehrere* Paare von zugeordneten Randbogen gegeben sind. Dieses Problem habe ich in zwei früheren Arbeiten [2]) für den Fall von *zwei* Bogenpaaren gelöst und folgendes Resultat erhalten:

Es seien auf den Peripherien Γ_x und Γ_y von zwei Kreisen K_x und K_y je vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 bzw. y_1, y_2, y_3, y_4 gegeben, welche in der angegebenen Reihenfolge aufeinander folgen, wenn man Γ_x bzw. Γ_y im positiven Sinn beschreibt.

Damit eine analytische Funktion $y = y(x)$ existiert, welche 1. *in K_x regulär ist und Werte annimmt, die in oder auf den Rand von K_y fallen,* 2. *auf den offenen Randbogen (x_1, x_2) und (x_3, x_4) stetig ist und Werte annimmt, die auf*

---

[1]) K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I.* Math. Annalen 89 (1923), S. 112.

[2]) V. Paatero, *Zur Theorie der beschränkten Funktionen.* Ann. Acad. Sci. Fenn. A, XLVI (1936), Nr. 5; *Über beschränkte Funktionen, welche zwei Paare von Randbogen ineinander überführen,* ebenda XLVIII (1937), Nr. 10. Die Notwendigkeit der Bedingung (1) wurde schon früher von B. de Kerékjártó bewiesen: *Sur l'indice des transformations analytiques.* Acta litt. ac sci. reg. univ. Hung. Franc.-Jos. T. VII, fasc. III (1935).

die Randbogen (y_1, y_2) und (y_3, y_4) fallen, ist notwendig und hinreichend, daß die Doppelverhältnisse der gegebenen Gruppen von vier Punkten der Bedingung

$$(1) \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \leqq (y_1, y_2, y_3, y_4)\ ^{3})$$

genügen.

Im Falle $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ist die einzige Lösung des Problems diejenige lineare Funktion, welche den Kreis K_x in K_y derart konform abbildet, daß die Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 in y_1, y_2, y_3, y_4 übergehen.

Für $(x_1, x_2, x_3, x_4) < (y_1, y_2, y_3, y_4)$ hat das Problem unendlich viele Lösungen, unter diesen unendlich viele rationale Funktionen ersten und zweiten Grades[4]*). Die Gesamtheit derjenigen Werte, welche $y(x)$ in diesem Fall in einem innerhalb des Kreises K_x gelegenen Punkte x_0 annimmt, ist ein gewisses, durch den Punkt x_0 und die Randpunkte x_ν, y_ν $(\nu = 1, \ldots, 4)$ wohlbestimmtes Kreisbogenviereck.*

3. In der vorliegenden Arbeit soll das Problem für den weiteren Fall untersucht werden, daß *drei* Paare von Randbogen gegeben sind. Wir stellen uns folgende Aufgabe:

Auf den Peripherien Γ_x und Γ_y von zwei Kreisen K_x und K_y seien je drei punktfremde Bogen $(x_\nu, x_{\nu+1})$ bzw. $(y_\nu, y_{\nu+1})$ $(\nu = 1, 3, 5)$ gegeben. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine analytische Funktion $y = y(x)$ existiert, welche folgenden Bedingungen genügt:

1⁰ *Im Kreise K_x ist $y(x)$ regulär und nimmt Werte an, die in oder auf den Rand von K_y fallen.*

2⁰ *Auf den offenen Bogen $(x_\nu, x_{\nu+1})$ $(\nu = 1, 3, 5)$ ist $y(x)$ stetig und nimmt Werte an, die bzw. auf die Bogen $(y_\nu, y_{\nu+1})$ fallen.*

2.

Vorbereitende Transformationen. Ein Grenzfall.

4. Wir bilden vorerst die Kreise K_x und K_y durch lineare Transformationen auf die Halbebenen $\Im z > 0$ bzw. $\Im w > 0$ derart ab, daß die Punkte x_1, x_2, x_3 bzw. y_1, y_2, y_3 in $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ bzw. $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$,

---

[3]) (a, b, c, d) gibt das Doppelverhältnis $\dfrac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ an.

[4]) In meiner ersten Arbeit [Fußnote [2])] wurde nur die Existenz der rationalen Funktionen zweiten Grades bewiesen, da es dort verlangt wurde, daß die Bogen (x_1, x_2) und (x_3, x_4) auf die *ganzen* Bogen (y_1, y_2) bzw. (y_3, y_4) abgebildet werden. Da nun die Bilder der Bogen (x_1, x_2) und (x_3, x_4) hier auch Teilbogen von (y_1, y_2) bzw. (y_3, y_4) sein können, so ist es einleuchtend, daß es auch unendlich viele lineare Funktionen der geforderten Art gibt.

$w_3 = 1$ übergeführt werden. Die Punkte x_4, x_5, x_6 bzw. y_4, y_5, y_6 gehen hierbei in die Punkte

$$(2)\qquad \begin{cases} z_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4), & w_4 = (y_1, y_2, y_3, y_4), \\ z_5 = (x_1, x_2, x_3, x_5), & w_5 = (y_1, y_2, y_3, y_5), \\ z_6 = (x_1, x_2, x_3, x_6), & w_6 = (y_1, y_2, y_3, y_6) \end{cases}$$

über. Die Funktionen $y(x)$ von den Eigenschaften 1^0 und 2^0 werden in Funktionen $w(z)$ transformiert, die folgenden Bedingungen genügen:

1^0 *In der Halbebene* $\Im z > 0$ *ist* $w(z)$ *regulär und* $\Im w \geqq 0$.

2^0 *Auf den offenen Segmenten* $(z_\nu, z_{\nu+1})$ $(\nu = 1, 3, 5)$ *der reellen Achse ist* $w(z)$ *stetig und nimmt Werte an, welche bzw. auf die Segmente* $(w_\nu, w_{\nu+1})$ *der reellen Achse der w-Ebene fallen.*

Es gilt somit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, damit eine Funktion $w = w(z)$ existiert, welche diesen Bedingungen 1^0 und 2^0 genügt.

5. Wir bemerken zunächst, daß wenn eine Funktion $w = w(z)$ von den Eigenschaften 1^0 und 2^0 existiert, folgendes gilt: Wenn z das Segment $(z_\nu, z_{\nu+1})$ $(\nu = 1, 3, 5)$ im positiven Sinn durchläuft, so bewegt sich auch $w = w(z)$ im positiven Sinn auf den Segmenten $(w_\nu, w_{\nu+1})$. Die Strecke $(z_\nu, z_{\nu+1})$ wird somit eineindeutig auf eine Teilstrecke von $(w_\nu, w_{\nu+1})$ abgebildet.

Damit nun eine Funktion $w = w(z)$ existiert, welche den Bedingungen 1^0 und 2^0 genügt, ist nach Nr. 2 *notwendig*, daß

$$(3)\qquad (z_1, z_2, z_3, z_4) \leqq (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

ist. Gilt hier die Gleichheit, so ist die einzige Funktion von der Eigenschaft 1^0, welche auf den Strecken (z_1, z_2) und (z_3, z_4) Werte aus den Strecken (w_1, w_2) bzw. (w_3, w_4) annimmt, die durch

$$(4)\qquad (w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$$

definierte lineare Funktion $w(z)$. Diese Funktion bildet das Segment (z_5, z_6) auf dasjenige Segment ab, dessen Endpunkte w_5' und w_6' durch die Relationen

$$(w_1, w_2, w_3, w_5') = (z_1, z_2, z_3, z_5), \quad (w_1, w_2, w_3, w_6') = (z_1, z_2, z_3, z_6)$$

bestimmt sind. Damit diese Strecke im Segmente (w_5, w_6) enthalten sei, ist notwendig und hinreichend, daß $w_5' \geqq w_5$ und $w_6' \leqq w_6$, d. h.

$$(5)\qquad \begin{aligned} (w_1, w_2, w_3, w_5) &\leqq (z_1, z_2, z_3, z_5), \\ (w_1, w_2, w_3, w_6) &\geqq (z_1, z_2, z_3, z_6), \end{aligned}$$

da ja (w_1, w_2, w_3, w) mit w wächst.

Die obige Schlußfolgerung läßt sich unverändert durchführen, wenn die Punkte z_ν, w_ν überall untereinander zyklisch permutiert werden, so daß stets ν durch $\nu + 2$ ersetzt wird und $z_{\nu+6} = z_\nu$, $w_{\nu+6} = w_\nu$ gesetzt wird.

Gilt also das Gleichheitszeichen in (3) [oder in einer aus (3) durch zyklische Permutation entstehenden Relation], so ist für die Existenz einer Funktion $w(z)$ von den Eigenschaften 1^0 und 2^0 notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen (5) (bzw. die aus diesen durch zyklische Permutation erhaltenen Bedingungen) erfüllt sind. Die einzige Funktion $w(z)$ der geforderten Art ist die durch (4) [bzw. eine aus (4) durch zyklische Permutation entstehende Gleichung] definierte lineare Funktion.

6. Im folgenden setzen wir voraus, daß in (3) und den entsprechenden Relationen das Ungleichheitszeichen gilt, d. h. (vgl. Beginn von Nr. 4)

$$(6)\qquad \begin{cases} (\infty,\ 0,\ 1,\ z_4) < (\infty,\ 0,\ 1,\ w_4), \\ (\infty,\ 0,\ z_5,\ z_6) < (\infty,\ 0,\ w_5,\ w_6), \\ (1,\ z_4,\ z_5,\ z_6) < (1,\ w_4,\ w_5,\ w_6). \end{cases}$$

Vorausgesetzt, daß eine Funktion $w = w(z)$ existiert, welche den Bedingungen 1^0 und 2^0 (S. 177) genügt, so ist zunächst $\Im w > 0$ für $\Im z > 0$; denn wäre $\Im w = 0$ in einem Innenpunkt der Halbebene $\Im z > 0$, so wäre $\Im w$ nach dem Prinzip des Minimums identisch gleich Null und w somit gleich einer reellen Konstante, was wegen 2^0 unmöglich ist.

Daher ist die Funktion

$$(7)\qquad u(z) = \frac{w(z)}{z}$$

in der Halbebene $\Im z > 0$ regulär und $\arg u = \arg w - \arg z$ eine eindeutige, regulär harmonische Funktion. Für $\arg w$ und $\arg z$ wählen wir den Zweig $0 \leqq \arg w \leqq \pi$, $0 \leqq \arg z \leqq \pi$.

Auf der negativen reellen Achse ist $\arg u = 0$. In jedem Punkte der positiven reellen Achse ist

$$0 \leqq \underline{\lim}\ \arg u \leqq \overline{\lim}\ \arg u \leqq \pi.$$

In den Punkten 0 und ∞ ist $\arg u$ beschränkt:

$$-\pi \leqq \underline{\lim}\ \arg u \leqq \overline{\lim}\ \arg u \leqq \pi.$$

Nach dem Prinzip des Maximums und Minimums ist daher $0 \leqq \arg u \leqq \pi$, und also $\Im u \geqq 0$ in der ganzen Halbebene $\Im z > 0$.

Auf der negativen reellen Achse ist $u(z)$ nach (7) und 2^0 (S. 177) positiv. Das Segment $1 < z < z_4$ wird durch $u = u(z)$ auf ein Segment der positiven

reellen Achse abgebildet, dessen Anfangspunkt $= \frac{w(1)}{1} \geqq 1$ und Endpunkt $= \frac{w(z_4)}{z_4} \leqq \frac{w_4}{z_4}$ ist [5]). Ebenso fällt das Bild von $z_5 < z < z_6$ auf das Segment $\frac{w_5}{z_5} \leqq u \leqq \frac{w_6}{z_6}$. Wir bezeichnen

$$u_4 = \frac{w_4}{z_4}, \quad u_5 = \frac{w_5}{z_5}, \quad u_6 = \frac{w_6}{z_6}. \tag{8}$$

Nach Voraussetzung (6) ist $u_4 > 1$ und $u_5 < u_6$.

Die durch (7) definierte Funktion $u(z)$ genügt demnach folgenden Bedingungen:

1° *Für* $\Im z > 0$ *ist* $u(z)$ *regulär und* $\Im u \geqq 0$.

2° $u(z)$ *ist auf der negativen reellen Achse analytisch und positiv. Auf den Segmenten* $1 < z < z_4$ *und* $z_5 < z < z_6$ *der reellen Achse ist* $u(z)$ *analytisch und nimmt Werte an, die bzw. auf die Segmente* $1 \leqq u \leqq u_4$ *und* $u_5 \leqq u \leqq u_6$ *der positiven reellen Achse fallen.*

7. Sei umgekehrt $u(z)$ eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt. Wir behaupten, daß

$$w(z) = z\,u(z) \tag{9}$$

den Bedingungen 1° und 2° (S. 177) genügt.

Da $u(z)$ wegen 1° und 2° $\neq 0$ für $\Im z > 0$ ist (vgl. Beginn von Nr. 6), so ist wieder $\arg u$ ($0 \leqq \arg u \leqq \pi$) für $\Im z > 0$ harmonisch regulär. Dasselbe gilt für die Funktion

$$\arg w = \arg z + \arg u.$$

Da nach Voraussetzung

$$0 \leqq \underline{\lim}\, \arg w \leqq \overline{\lim}\, \arg w \leqq \pi$$

in jedem Punkt der positiven und negativen reellen Achse ist, und da $\arg w$ auch in 0 und ∞ beschränkt ist, so ist nach dem Prinzip des Maximums und Minimums $0 \leqq \arg w \leqq \pi$ und also $\Im w \geqq 0$ in der ganzen Halbebene $\Im z > 0$.

Auf der negativen reellen Achse ist w nach (9) und 2° negativ. Das Segment $1 < z < z_4$ wird auf ein Segment der positiven reellen Achse abgebildet, dessen Endpunkte

$$w(1) = u(1) \geqq 1 \quad \text{und} \quad w(z_4) = z_4\,u(z_4) \leqq z_4\,u_4 = z_4\frac{w_4}{z_4} = w_4$$

sind. Das Segment $z_5 < z < z_6$ wird auf ein ebensolches Segment mit den Endpunkten

$$w(z_5) = z_5\,u(z_5) \geqq z_5\,u_5 = w_5, \quad w(z_6) = z_6\,u(z_6) \leqq z_6\,u_6 = w_6$$

[5]) Wir bezeichnen hier $w(1) = \lim_{z \to 1} w(z)$, $w(z_4) = \lim_{z \to z_4} w(z)$, wo z gegen 1 bzw. z_4 längs dem Segment $(1, z_4)$ strebt. Eine analoge Bezeichnungsweise wird auch später gebraucht.

abgebildet. Die Funktion $w(z)$ erfüllt demnach sämtliche Bedingungen 1^0 und 2^0 von S. 177.

Die Frage nach der Existenz der Funktionen $w(z)$ ist hiermit auf die Untersuchung der Existenzbedingungen der Funktionen $u(z)$ zurückgeführt, welche die Eigenschaften 1^0 und 2^0 von S. 179 besitzen.

3.

Lösung des Problems.

8. Hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Segmente $(1, u_4)$ und (u_5, u_6) sind folgende drei Fälle möglich:

a) $u_5 \leqq u_4$ und $u_6 \geqq 1$ oder anders ausgedrückt $-\infty \leqq (1, u_4, u_5, u_6) < 1$;

b) $u_6 < 1$;

c) $u_5 > u_4$.

9. Im Falle a) haben die abgeschlossenen Segmente $(1, u_4)$ und (u_5, u_6) wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Es gibt dann unendlich viele lineare Funktionen von den Eigenschaften 1^0 und 2^0, S. 179. Wenn nämlich $(1, u_4)$ und (u_5, u_6) einen gemeinsamen Teil (α, β) haben, so genügt unseren Bedingungen z. B. jede lineare Funktion, welche die Halbebene $\Im z > 0$ auf die Halbebene $\Im u > 0$ so abbildet, daß die Punkte $z = \infty$ und $z = z_6$ auf die Strecke (α, β) fallen, $z = \infty$ links von $z = z_6$. Wenn $(1, u_4)$ und (u_5, u_6) nur einen Endpunkt gemeinsam haben, z. B. $u_4 = u_5$, so genügt unseren Bedingungen u. a. jede lineare Funktion, welche $\Im z > 0$ auf $\Im u > 0$ so abbildet, daß der Punkt $z = z_4$ in $u = u_4$ übergeht und $z = \infty$ bzw. $z = z_6$ auf die Strecke $(1, u_4)$ bzw. (u_4, u_6) fällt. Der Fall $u_6 = 1$ wird in gleicher Weise erledigt.

10. Im Falle b) ist es für die Existenz einer Funktion $u(z)$, welche den Bedingungen 1^0 und 2^0 von S. 179 genügt, nach Nr. 2 *notwendig*, daß

$$(1, u_4, u_5, u_6) \geqq (1, z_4, z_5, z_6).$$

Diese Bedingung ist auch *hinreichend*. Sei in der Tat erstens $(1, u_4, u_5, u_6) = (1, z_4, z_5, z_6)$. Dann gibt es eine und nur eine Funktion $u(z)$ mit $\Im u \geqq 0$, welche auf den Segmenten $(1, z_4)$ und (z_5, z_6) Werte annimmt, die auf die Strecken $(1, u_4)$ und (u_5, u_6) fallen (Nr. 2), nämlich diejenige lineare Funktion, welche die Halbebene $\Im z > 0$ auf die Halbebene $\Im u > 0$ so abbildet, daß die Punkte $1, z_4, z_5, z_6$ in die Punkte $1, u_4, u_5, u_6$ übergehen. Die negative reelle Achse wird auf ein Teil der Strecke $(u_6, 1)$ abgebildet. Diese Funktion genügt also den Bedingungen 1^0 und 2^0 von S. 179.

Sei zweitens $(1, u_4, u_5, u_6) > (1, z_4, z_5, z_6)$. Dann gibt es unendlich viele lineare Funktionen $u(z)$, welche die Halbebene $\Im z > 0$ auf die Halbebene $\Im u > 0$ so abbilden, daß die Bilder der Segmente $(1, z_4)$ und (z_5, z_6) Teilstrecken von $(1, u_4)$ bzw. (u_5, u_6) sind. Eine derartige Funktion ist diejenige, welche die Punkte $1, z_4, z_5$ in die Punkte $1, u_4, u_5$ überführt. Variiert man die Bilder von $1, z_4, z_5$ hinreichend wenig, so fallen die Bilder von $(1, z_4)$ und (z_5, z_6) fortwährend bzw. auf die Segmente $(1, u_4)$ und (u_5, u_6). Da das Bild der negativen reellen Achse hierbei zwischen die Bilder von z_6 und 1, also jedenfalls auf die positive reelle Achse fällt, so erhält man in dieser Weise unendlich viele lineare Funktionen der geforderten Art.

11. Im Falle c), S. 180, ist es wieder für die Existenz einer Funktion $u(z)$ der geforderten Art *notwendig* (Nr. 2), daß

$$(1, u_4, u_5, u_6) \geqq (1, z_4, z_5, z_6). \tag{10}$$

Auch diese Bedingung erweist sich als *hinreichend*.

Um dies einzusehen, bilden wir vorerst die Halbebenen $\Im z > 0$ und $\Im u > 0$ durch lineare Transformationen

$$\sigma = \sigma(z), \quad s = s(u) \tag{11}$$

auf die Halbebenen $\Im \sigma > 0$ und $\Im s > 0$ derart ab, daß die Punkte $1, z_4, z_5$ bzw. $1, u_4, u_5$ in die Punkte $\infty, 0, 1$ der σ- bzw. s-Ebene übergehen. Die Bilder der Punkte $z = \infty$, $z = 0$, $z = z_6$ bzw. $u = 0$, $u = \infty$, $u = u_6$ seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$ bzw. s_1, s_2, s_6. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Punkten ist hierbei

$$\begin{cases} \sigma_1 = (1, z_4, z_5, \infty), & s_1 = (1, u_4, u_5, 0), \\ \sigma_2 = (1, z_4, z_5, 0), & s_2 = (1, u_4, u_5, \infty), \\ \sigma_6 = (1, z_4, z_5, z_6), & s_6 = (1, u_4, u_5, u_6) \end{cases} \tag{12}$$

und

$$(1, \sigma_6, \sigma_1, \sigma_2) = (\infty, 0, z_5, z_6) = \frac{z_6}{z_5}. \tag{13}$$

Es ist $1 < \sigma_6 < \sigma_1 < \sigma_2$ und $1 < s_6 < s_2 < s_1$. Nach (10) ist ferner $s_6 \geqq \sigma_6$.

Die Funktionen $u(z)$ von den Eigenschaften 1^0 und 2^0, S. 179, gehen vermöge der Transformationen (11) in Funktionen $s(\sigma)$ über, welche folgenden Bedingungen genügen:

1^0 *Für* $\Im \sigma > 0$ *ist* $s(\sigma)$ *regulär und* $\Im s \geqq 0$.

2^0 *Auf den Segmenten* $(\infty, 0)$, $(1, \sigma_6)$, (σ_1, σ_2) *der reellen Achse ist* $s(\sigma)$ *analytisch und nimmt Werte an, die bzw. auf die Segmente* $(\infty, 0)$, $(1, s_6)$, (s_1, s_2)[6] *fallen.*

---

[6]) Unter einem Segment (a, b) (a und b reell) einer s-Ebene verstehen wir das Segment $a < s < b$, falls $a < b$ ist, und die Segmente $s > a$ und $s < b$, falls $a > b$ ist

12. Unter der Annahme, daß zunächst in (10) das Ungleichheitszeichen gilt, nehmen wir nochmals die in Nr. 6 (S. 178) angewandte Transformation vor.

Vorausgesetzt, daß $s = s(\sigma)$ eine beliebige Funktion von den Eigenschaften 1^0 und 2^0 (Nr. 11) ist, schließen wir wie in Nr. 6, daß die in der Halbebene $\Im\sigma > 0$ reguläre Funktion

$$= \frac{s(\sigma)}{\sigma}$$

einen nichtnegativen imaginären Teil besitzt.

Auf der negativen reellen Achse ist $t(\sigma)$ positiv.

Die Strecke (σ_1, σ_2) wird durch die Transformation $t = t(\sigma)$ auf ein Segment der reellen Achse der t-Ebene abgebildet. Wir behaupten, daß dieses Segment im Segment (t_1, t_2) enthalten ist, wo

$$t_1 = \frac{s_1}{\sigma_1}, \quad t_2 = \frac{s_2}{\sigma_2}. \tag{14}$$

Wenn $s(\sigma)$ auf dem Segment (σ_1, σ_2) endlich ist, so ist hier entweder $s \geqq s_1$ oder $s \leqq s_2$. Im ersteren Fall ist auf diesem Segment (vgl. Beginn von Nr. 5)

$$t(\sigma) \geqq t(\sigma_1) = \frac{s(\sigma_1)}{\sigma_1} \geqq \frac{s_1}{\sigma_1} = t_1 \tag{15}$$

und im zweiten Fall

$$t(\sigma) \leqq t(\sigma_2) = \frac{s(\sigma_2)}{\sigma_2} \leqq \frac{s_2}{\sigma_2} = t_2. \tag{16}$$

$t(\sigma)$ liegt somit jedenfalls auf dem Segment (t_1, t_2).

Falls dagegen auf dem Segment (σ_1, σ_2) ein Punkt σ_0 liegt, wo $s(\sigma_0) = \infty$ ist, so ist auf der Strecke (σ_1, σ_0) $s(\sigma) \geqq s_1$ und auf der Strecke (σ_0, σ_2) $s(\sigma) \leqq s_2$. Hieraus folgt, daß auf diesen Segmenten auch die Ungleichungen (15) bzw. (16) gelten, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Auf dem Segment $(1, \sigma_6)$ schließlich ist $t(\sigma)$ ebenfalls reell und nimmt Werte an, welche auf das Segment $(1, t_6)$ fallen, wo

$$t_6 = \frac{s_6}{\sigma_6} > 1. \tag{17}$$

Die Funktion $t(\sigma)$ besitzt somit folgende Eigenschaften:

1^0 *In der Halbebene* $\Im\sigma > 0$ *ist* $t(\sigma)$ *regulär und* $\Im t \geqq 0$.

2^0 *Auf den Segmenten* $(\infty, 0), (1, \sigma_6), (\sigma_1, \sigma_2)$ *ist* $t(\sigma)$ *analytisch und nimmt Werte an, die bzw. auf die Segmente* $(0, \infty), (1, t_6), (t_1, t_2)$ *fallen.*

Es ist hier $0 < t_2 < t_1$, $t_6 > 1$.

Wenn umgekehrt die Funktion $t = t(\sigma)$ den obigen Bedingungen 1^0 und 2^0 genügt, so genügt die Funktion

$$s(\sigma) = \sigma t(\sigma) \tag{18}$$

den Bedingungen 1^0 und 2^0 von S. 181, wie man durch Wiederholung der Schlüsse von Nr. 7 leicht beweist.

13. Wir behaupten, daß unter unseren Voraussetzungen stets gewisse lineare Funktionen $t(\sigma)$ existieren, welche den obigen Bedingungen 1^0 und 2^0 genügen.

Dies ist einleuchtend, wenn die drei Segmente der t-Ebene, $(0, \infty)$, $(1, t_6)$, (t_1, t_2), einen gemeinsamen Teil (t', t'') haben, d. h. falls entweder

$$t_2 > 1 \quad \text{oder} \quad t_1 < t_6 \tag{19}$$

ist. Dann genügt nämlich den geforderten Bedingungen z. B. jede lineare Funktion, welche die Halbebene $\Im\sigma > 0$ auf die Halbebene $\Im t > 0$ so abbildet, daß die Segmente $(\infty, 0)$, $(1, \sigma_6)$ und (σ_1, σ_2) alle auf das Segment (t', t'') fallen. Auch in den Fällen $t_2 = 1$ und $t_1 = t_6$ gibt es offenbar lineare Transformationen, welche die geforderten Bedingungen erfüllen.

Wir nehmen jetzt an, daß die Segmente (t_1, t_2) und $(1, t_6)$ keinen gemeinsamen Punkt haben. Damit es dann eine Funktion $t = t(\sigma)$ gibt, die der Bedingung 1^0, S. 182, genügt und auf den zwei Segmenten $(1, \sigma_6)$ und (σ_1, σ_2) Werte annimmt, die auf die Segmente $(1, t_6)$ bzw. (t_1, t_2) fallen, ist notwendig und hinreichend, daß (Nr. 2)

$$(1, t_6, t_1, t_2) \geqq (1, \sigma_6, \sigma_1, \sigma_2).$$

Ich behaupte, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Zum Beweise lasse ich z_4, z_5, z_6, w_4, w_5 unverändert bleiben und w_6 abnehmen, bis

$$(1, z_4, z_5, z_6) = (1, w_4, w_5, w_6) \tag{20}$$

wird. Sei dann $w_6 = w_6'$ $(> w_5)$. Gemäß (8) bleiben hierbei auch u_4 und u_5 unverändert, während sich u_6 verkleinert. Die Bedingung (20) gibt

$$u_6' = \frac{w_6'}{z_6} = \frac{(z_5 - 1)(z_6 - z_4)(z_5 u_5 - z_4 u_4) - (z_5 - z_4)(z_6 - 1)(z_5 u_5 - 1) z_4 u_4}{(z_5 - 1)(z_6 - z_4)(z_5 u_5 - z_4 u_4) z_6 - (z_5 - z_4)(z_6 - 1)(z_5 u_5 - 1) z_6}.$$

Sei t_6' der Wert von t_6, der nach (12) und (17) dem Wert $u_6 = u_6'$ entspricht. Berechnet man $(1, t_6', t_1, t_2)$ gemäß (17), (14) und (12), so erhält man

$$(1, t_6', t_1, t_2) = \frac{z_6}{z_5};$$

nach (13) ist also

$$(1, t_6', t_1, t_2) = (1, \sigma_6, \sigma_1, \sigma_2). \tag{21}$$

Während der Verkleinerung von u_6 wird auch $(1, u_4, u_5, u_6)$ kleiner. Wegen (12) und (17) nehmen desgleichen s_6 und t_6 ab, woraus folgt, daß auch $(1, t_6, t_1, t_2)$ abnimmt. Dieses Doppelverhältnis kann nicht für $w_6 \geqq w_6'$ unendlich werden. Dies geschieht nämlich erst dann, da sich t_6 durch den Wert $t_6 = \infty$ bis $t_6 = t_1$ vermindert hat. Dann ist s_6 nach (17) durch den

Wert $s_6 = \infty$ abgenommen, und es ist zuletzt wegen (14) und (17) $s_6 < s_1$. Gemäß der Transformation (11) würde dann $u_6 < 0$. Dies ist aber nach (8) unmöglich, da $z_6 > 0$ und $w_6 \geqq w_6' > w_5 > 0$ ist. Also bleibt $(1, t_6, t_1, t_2)$ für $w_6 \geqq w_6'$ endlich. Aus der Verminderung dieses Doppelverhältnisses mit t_6 folgt dann nach (21), daß für $w_6 > w_6'$

$$(22) \qquad (1, t_6, t_1, t_2) > (1, t_6', t_1, t_2) = (1, \sigma_6, \sigma_1, \sigma_2),$$

wie behauptet wurde.

Wegen (22) gibt es nun unendlich viele lineare Funktionen $t = t(\sigma)$, welche unseren Bedingungen (1° und 2°, S. 182) genügen, so wie es auch in den Fällen $t_2 \geqq 1$ und $t_1 \leqq t_6$ der Fall war. Jeder dieser Funktionen entspricht vermöge (18) eine rationale Funktion $s(\sigma)$ zweiten Grades, welche den Bedingungen 1° und 2° von S. 181 genügt. Diese Funktionen $s(\sigma)$ gehen vermöge der Transformationen (11) in Funktionen $u(z)$ über, die ebenfalls rational vom zweiten Grade sind und den Bedingungen 1° und 2° (S. 179) genügen.

Wenn also im Falle c) (S. 180) das Ungleichheitszeichen in (10) gilt, so gibt es unendlich viele rationale Funktionen $u(z)$ zweiten Grades, welche den Bedingungen 1° und 2° (S. 179) genügen.

14. Es erübrigt noch den Fall zu untersuchen, wo das Gleichheitszeichen in (10) gilt:

$$(23) \qquad (1, z_4, z_5, z_6) = (1, u_4, u_5, u_6).$$

Dann ist die einzige Funktion, welche der Bedingung 1° (S. 179) genügt und auf den Strecken $(1, z_4)$ und (z_5, z_6) Werte aus den Strecken $(1, u_4)$ bzw. (u_5, u_6) annimmt, die durch die Relation

$$(24) \qquad (1, u_4, u_5, u) = (1, z_4, z_5, z)$$

definierte lineare Funktion $u(z)$. Diese bildet die negative reelle Achse auf dasjenige Segment ab, dessen Endpunkte u' und u'' durch

$$(1, u_4, u_5, u') = (1, z_4, z_5, \infty), \quad (1, u_4, u_5, u'') = (1, z_4, z_5, 0)$$

bestimmt werden. Damit dieses Segment auf der positiven reellen Achse liegt, ist notwendig und hinreichend, daß entweder $0 \leqq u' < 1$ oder $u_6 < u'' \leqq \infty$ ist, d. h. daß entweder

$$(25) \qquad (1, u_4, u_5, 0) \leqq (1, z_4, z_5, \infty)$$

oder

$$(26) \qquad (1, u_4, u_5, \infty) \geqq (1, z_4, z_5, 0)$$

(vgl. Nr. 5). Diese Relationen sind nach (12) übereinstimmend mit

$$s_1 \leqq \sigma_1, \quad s_2 \geqq \sigma_2$$

und folglich nach (14) mit

$$(27) \qquad t_1 \leqq 1, \quad t_2 \geqq 1.$$

Man schließt nun leicht mit Hilfe der vorigen Nummer, daß eine der Relationen (27) gilt. Ist dies nicht der Fall, sondern

$$t_2 < 1 < t_1, \tag{28}$$

so gilt folgendes. Nach (23) und (12) ist $s_6 = \sigma_6$ und somit $t_6 = \frac{s_6}{\sigma_6} = 1$. Läßt man u_6 abnehmen wie in Nr. 13 bis $u_6 = u_6'$, wobei auch t_6 abnimmt, so nimmt $(1, t_6, t_1, t_2)$ ab und wird wegen (28) < 1. Da aber $(1, t_6, t_1, t_2)$ für $u_6 = u_6'$ nach (21) > 1 ist, so liegt hier ein Widerspruch vor. Folglich gilt eine der Relationen (27) und also entweder (25) oder (26).

Aus den Resultaten von Nr. 12 bis 14 geht hervor, daß die Bedingung (10) auch hinreichend ist. Gilt in (10) das Gleichheitszeichen, so ist die Funktion $u(z)$ nach dieser Nummer durch (24) eindeutig bestimmt.

15. Jeder der Funktionen $u(z)$, die den Bedingungen 1° und 2° von S. 179 genügen, entspricht vermöge (9) eine Funktion $w(z)$, welche den Bedingungen 1° und 2° von S. 177 genügt. Ist $u(z)$ eine rationale Funktion vom Grade n, so ist $w(z)$ rational vom Grade $n+1$.

Als Zusammenfassung unserer Resultate erhalten wir folgende Lösung des aufgestellten Problems:

Damit eine Funktion $w(z)$ existiert, welche den geforderten Bedingungen 1° *und* 2°, S. 177, *genügt, ist notwendig und hinreichend, daß einer der folgenden Fälle eintrifft*:

I. *Es ist für einen der Werte* $\nu = 1, 3, 5$

$$(z_\nu, z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, z_{\nu+3}) = (w_\nu, w_{\nu+1}, w_{\nu+2}, w_{\nu+3}) \quad (z_{\nu+6} = z_\nu, w_{\nu+6} = w_\nu)$$

und

$$\begin{cases} (z_\nu, z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, z_{\nu+4}) \geqq (w_\nu, w_{\nu+1}, w_{\nu+2}, w_{\nu+4}), \\ (z_\nu, z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, z_{\nu+5}) \leqq (w_\nu, w_{\nu+1}, w_{\nu+2}, w_{\nu+5}). \end{cases}$$

Die einzige Lösung des Problems ist in diesem Fall die durch

$$(z_\nu, z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, z) = (w_\nu, w_{\nu+1}, w_{\nu+2}, w)$$

definierte lineare Funktion $w(z)$.

II. *Es ist für jedes* $\nu = 1, 3, 5$

$$(z_\nu, z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, z_{\nu+3}) < (w_\nu, w_{\nu+1}, w_{\nu+2}, w_{\nu+3}),$$

wozu noch eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

$$\text{a)} \quad \left(1, \frac{w_4}{z_4}, \frac{w_5}{z_5}, \frac{w_6}{z_6}\right) < 1,$$

$$\text{b)} \quad \left(1, \frac{w_4}{z_4}, \frac{w_5}{z_5}, \frac{w_6}{z_6}\right) \geqq (1, z_4, z_5, z_6).$$

Im Falle a) *gibt es unendlich viele Funktionen $w(z)$, welche den geforderten Bedingungen genügen, unter diesen unendlich viele rationale Funktionen zweiten Grades.*

Gilt im Falle b) *das Gleichheitszeichen, so existiert eine einzige Funktion der geforderten Art, nämlich eine gewisse rationale Funktion zweiten Grades. Gilt hier wiederum das Ungleichheitszeichen, so gibt es unendlich viele Funktionen der geforderten Art, unter diesen unendlich viele rationale Funktionen zweiten Grades, falls* $\frac{w_6}{z_6} < 1$, *dritten Grades, falls* $\frac{w_5}{z_5} > \frac{w_4}{z_4}$.

16. Zu den ursprünglichen Kreisgebieten K_z, K_w gelangt man nun, wenn man die linearen Transformationen von Nr. 4 wieder ausführt. Da sich die Doppelverhältnisse von vier Punkten hierbei nicht verändern, so bleiben die Bedingungen I (Nr. 15) und die erste der Relationen II invariant. Die Bedingungen a) und b) transformieren sich so, daß z_ν, w_ν ($\nu = 4, 5, 6$) durch die Doppelverhältnisse (2) (S. 177) ersetzt werden.

(Eingegangen am 12. Oktober 1940.)

Die Koppelkurve als Laguerresches Bild einer Hesseschen Korrespondenz.

Von

E. A. Weiss in Bonn.

Wird ein Punkt mit der Koppel eines Viergelenkmechanismus fest verbunden, so beschreibt er bei der Bewegung des Viergelenkmechanismus eine Koppelkurve. Die Koppelkurve ist eine trizirkulare Kurve 6. Ordnung. Sie besitzt im Endlichen drei Doppelpunkte und auf dem durch die Doppelpunkte bestimmten Kreise drei reelle außerordentliche Brennpunkte. Dabei befindet sich das Dreieck der Doppelpunkte mit dem Dreieck der außerordentlichen Brennpunkte in isogonaler Lage. Die angegebenen Eigenschaften sind für die Koppelkurve charakteristisch.

Die Tatsache, daß die Koppelkurve elliptisch ist, setzt G. Darboux[1]) dadurch in Evidenz, daß er den Bewegungsvorgang durch ein analytisches Verfahren auf den ebenen Schnitt einer Fläche 3. Ordnung abbildet. In seiner für die algebraische Geometrie der Koppelkurve grundlegenden Arbeit hat G. T. Bennett[2]) den Zusammenhang der Koppelkurve und einer invariant mit ihr verbundenen ebenen elliptischen Kurve 3. Ordnung durch ein konstruktives Verfahren hergestellt. Er beweist, daß jede Koppelkurve als Laguerresches Bild einer Hesseschen Korrespondenz auf einer Kurve 3. Ordnung aufgefaßt werden kann. Er zeigt nämlich, daß die schon von R. L. Hippisley[3]) bemerkte Paarung der Punkte einer Koppelkurve durch die mit dem Dreieck der Doppelpunkte verbundene isogonale Verwandtschaft hervorgerufen wird und gewinnt durch Laguerresche Abbildung der Paare zugeordneter Punkte die Paare einer auf einer Kurve 3. Ordnung gelegenen Hesseschen Korrespondenz. Der Satz steht am Ende einer längeren analytischen Entwicklung, die sich auf die Untersuchung einer auf das Dreieck der außerordentlichen Brennpunkte (als Koordinatendreieck eines Systems von Dreieckskoordinaten) bezogenen Normalform der Koppelkurve stützt.

---

[1]) G. Darboux, De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. Bull. Sc. Math. (2) 3 (1879), S. 109–128. – W. Blaschke zeigt dasselbe, indem er dem eingliedrigen Bewegungsvorgang durch die kinematische Abbildung eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art zuordnet. Ebene Kinematik, Leipzig 1938, S. 32.

[2]) G. T. Bennett, The three-bar sextic curve. Proc. London Math. Soc. (2) 20 (1922), S. 59–84.

[3]) R. L. Hippisley, A new method of describing a three-bar curve. Proc. London Math. Soc. (2) 18 (1920), S. 136–140.

Der Bennettsche Satz darf als besonders merkwürdig bezeichnet werden, weil er zwei Gegenstände, die jeder in seinem Gebiete von Interesse sind — die Koppelkurve in der Kinematik, die Hessesche Korrespondenz in der projektiven Geometrie der Kurven 3. Ordnung — und zwischen denen von vornherein kein Zusammenhang vermutet werden kann, durch eine Abbildung verbindet, die einem dritten Gebiete angehört, der komplexen Geometrie. Es ist daher sicher nicht überflüssig, den Beweis des Satzes von allem ihm beim ersten Auffinden noch anhaftenden analytischen Beiwerk zu befreien und zu versuchen, rein synthetisch eine genauere Einsicht in den Sachverhalt (z. B. über die Lage der Doppelpunkte der Koppelkurve zur Ausgangskurve 3. Ordnung) als bisher zu erhalten. Dies geschieht im folgenden, indem auf Grund einfacher Sätze über die Hesseschen Korrespondenzen einer Kurve 3. Ordnung bewiesen wird, daß das Laguerresche Bild einer Hesseschen Korrespondenz die charakteristischen Eigenschaften der Koppelkurve besitzt. Anschließend wird gezeigt, wie die einzügigen und zweizügigen Koppelkurven, übrigens nicht in trivialer Weise, aus den einzügigen und zweizügigen Kurven 3. Ordnung entstehen.

Eine Hessesche Korrespondenz läßt sich auch für die rationale und für die zerfallenden Kurven 3. Ordnung erklären. Daher lassen sich, wie im zweiten Teil der Arbeit gezeigt wird, auch die rationale und die zerfallenden Koppelkurven durch die Laguerresche Abbildung gewinnen. Die so entstehenden Klassen von Koppelkurven sind schon von G. Darboux (a. a. O.) unterschieden worden, der auch die besonderen Mechanismen angibt, mittels deren sie erzeugt werden können. F. V. Morley[4]) gewinnt sie dadurch, daß er in einer Parameterdarstellung der allgemeinen Koppelkurve mittels elliptischer Funktionen diese Funktionen ausarten läßt. Die hier gegebene synthetische Ableitung der Ausartungsfälle gibt ohne jede Rechnung auf jede auftretende Frage nach der Lage der Brennpunkte, Doppelpunkte usw. eine erschöpfende konstruktive Antwort.

1. Die isogonale Verwandtschaft einer HESSEschen Korrespondenz. Das Polarsystem einer Kurve 3. Ordnung $(ax)^3 = 0$ ordnet jedem Punkte y der Ebene eine Polarkurve 2. Ordnung

$$(ax)^2 (ay) = 0 \tag{1}$$

zu. Die Punkte y, denen eine zerfallende Kurve entspricht, erfüllen die Hessesche Kurve $(hx)^3 = 0$ von $(ax)^3 = 0$. Ist y' der Scheitel einer zerfallenen Kurve 2. Ordnung, so gilt:

$$(ay')\,(ax)\,(ay) \equiv 0\,\{x\}. \tag{2}$$

[4]) F. V. Morley, An analytic treatment of the 3-bar curve. Proc. London Math. Soc. (2) 21 (1923), S. 140—160.

Die Gleichung zeigt, daß die Beziehung zwischen y und y' symmetrisch ist, daß also auch y' der Hesseschen Kurve angehört und daß jeder Punkt der Scheitel des Geradenpaares ist, das dem anderen zugeordnet wird. So entsteht eine involutorische Korrespondenz $y \to y'$ zwischen den Punkten der Hesseschen Kurve. Zwei Punkte, die sich in der Korrespondenz entsprechen, sind bezüglich aller Kurven des Kegelschnittbündels (1) konjugiert. Sie werden deshalb kurz konjugiert genannt. Die Korrespondenz der konjugierten Punkte heißt Hessesche Korrespondenz. Da eine vorgegebene Kurve $(hx)^3 = 0$ Hessesche Kurve von drei anderen Kurven ist, lassen sich auf ihr drei Hessesche Korrespondenzen erklären. Nur eine von ihnen wird hier betrachtet.

Den Punkten einer Geraden g, welche die Kurve $(hx)^3 = 0$ in den Punkten d_1', d_2', d_3' schneidet, wird durch die Polarität (1) ein Büschel von Kurven 2. Ordnung zugeordnet, und dieser bestimmt eine involutorische quadratische Verwandtschaft: Jedem Punkte x wird der Schnittpunkt seiner Polaren bezüglich der Kegelschnitte des Büschels zugeordnet. Da die Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve bezüglich aller Kurven des Kegelschnittbündels konjugiert sind, sind sie insbesondere Paare der quadratischen Verwandtschaft. So sind die Punktepaare der Hesseschen Korrespondenz den ∞^2 Geraden der Ebene entsprechend in ∞^2 involutorischen quadratischen Verwandtschaften enthalten. Es sind dies die einzigen involutorischen quadratischen Verwandtschaften 1. Art, denen sie angehören[5]).

Die singulären Kurven des der Geraden g entsprechenden Kegelschnittbüschels sind die Geradenpaare, die den Punkten d_1', d_2', d_3' als Polarkegelschnitte zugeordnet sind. Sie bilden die Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen Diagonalpunkte d_1, d_2, d_3 (die Scheitel der Geradenpaare) auf $(hx)^3 = 0$ liegen und zu d_1', d_2', d_3' konjugiert sind. Hieraus folgt in bekannter Weise, daß die Punktepaare d_1, d_1'; d_2, d_2'; d_3, d_3' die Eckpunkte eines der Kurve $(hx)^3 = 0$ einbeschriebenen Vierseits sind.

Soll die einem Büschel von Polarkegelschnitten entsprechende quadratische Verwandtschaft eine isogonale Verwandtschaft werden, so muß das Paar $(ju)^2 = 0$ der absoluten Punkte bezüglich aller Kurven des Büschels konjugiert sein. Die Polarkegelschnitte mit dieser Eigenschaft erfüllen gerade ein Büschel, das Bildbüschel der Geraden:

$$(aj)^2(ay) = 0. \tag{3}$$

Daher:

Satz 1. *Die Kurve* $(ax)^3 = 0$ *bestimmt auf ihrer Hesseschen Kurve* $(hx)^3 = 0$ *eine Hessesche Korrespondenz. Die Punktepaare dieser Korrespondenz*

[5]) V. Martinetti, Ricerche sulle curve piane del terzo ordine. Giornale di Mat. 23 (1885), S. 37–47.

sind in einer und nur einer isogonalen Verwandtschaft enthalten. Die Fundamentalpunkte dieser Verwandtschaft sind die Punkte d_1, d_2, d_3, *deren konjugierte Punkte* d_1', d_2', d_3' *von der Geraden* $(aj)^2(ay) = 0$ *aus der* Hesseschen *Kurve ausgeschnitten werden. Die Punktepaare* d_1, d_1'; d_2, d_2'; d_3, d_3' *sind die Gegenpunktepaare eines der* Hesseschen *Kurve einbeschriebenen Vierseits.*

2. Das Laguerresche Bild einer isogonalen Verwandtschaft. Wir bezeichnen mit i_1, i_2 das Paar der absoluten Punkte, mit x, x' ein beliebiges Punktepaar. Die beiden Punktepaare sind Gegenpunktpaare eines bestimmten Vierseits, dessen fehlende Gegenpunkte wir y, y' nennen. Dann ist das Punktepaar y, y' das Laguerresche Bild des Punktepaares x, x'.

Wir unterwerfen die Punktepaare einer isogonalen Verwandtschaft der Laguerreschen Abbildung und beweisen

Satz 2. *Durch die Laguerresche Abbildung werde das Punktepaar* x, x' *auf das Punktepaar* y, y' *abgebildet. Gehört dann das erste Punktepaar der isogonalen Verwandtschaft mit dem Fundamentaldreieck* d_1, d_2, d_3 *an, so auch das zweite.*

Beweis. Nach Voraussetzung gehören die Strahlenpaare, die vom Punkte d_i aus die Punkte

$$d_j, d_k;\ i_1, i_2;\ x, x'$$

projizieren, einer Involution an. In Strahlenpaaren einer Involution werden vom Punkte d_i aus auch die Punktepaare

$$y, y';\ i_1, i_2;\ x, x'$$

(als Gegenpunktepaare eines vollständigen Vierseits) projiziert. Die beiden Involutionen sind identisch, weil sie die beiden zu den Punktepaaren i_1, i_2; x, x' führenden Strahlenpaare gemeinsam haben. Also gehören auch die Strahlenpaare einer Involution an, die von d_i aus die Punktepaare

$$d_j, d_k;\ i_1, i_2;\ y, y'$$

projizieren, w. z. b. w.

3. Das Laguerresche Bild einer Hesseschen Korrespondenz auf einer elliptischen Kurve 3. Ordnung. Wir unterwerfen jetzt die Paare der in 1. erklärten Hesseschen Korrespondenz der Laguerreschen Abbildung. Aus den Punktepaaren der Hesseschen Korrespondenz entstehen Punktepaare einer neuen Kurve, der *Bildkurve*. Wir wollen zeigen, daß die Bildkurve eine Koppelkurve ist.

Satz 3. *Die Bildkurve gestattet die isogonale Verwandtschaft des Satzes 1.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folge davon, daß die Hessesche Korrespondenz aus Paaren der isogonalen Verwandtschaft besteht und davon, daß

die Laguerresche Abbildung nach Satz 2 ein Paar der isogonalen Verwandtschaft wieder in ein solches Paar transformiert.

Satz 4. *Die Bildkurve hat die Fundamentalpunkte d_1, d_2, d_3 der isogonalen Verwandtschaft zu Doppelpunkten.*

In der Tat bilden die Verbindungslinien eines Punktes d_i mit den Punkten i_1, i_2 ein Paar der durch die isogonale Verwandtschaft im Punkte d_i erzeugten Involution. Die eine Minimalgerade schneidet also die Kurve $(hx)^3 = 0$ in zwei weiteren Punkten, die den Schnittpunkten der anderen Minimalgeraden durch die Hessesche Korrespondenz zugeordnet sind. Die Laguerreschen Bilder der beiden Paare konjugierter Punkte sind zwei Punktepaare, die den Punkt d_i gemein haben. Dieser Punkt wird also bei der Erzeugung zweimal geliefert, w. z. b. w.

Satz 5. *Die Bildkurve ist von 6. Ordnung.*

Die Behauptung folgt aus den Sätzen 3 und 4. Wird nämlich eine beliebige Kurve n-ter Ordnung der isogonalen Verwandtschaft mit den Fundamentalpunkten d_1, d_2, d_3 unterworfen, so entsteht eine Kurve der Ordnung $n' = 2n$. Geht die ursprüngliche Kurve k-mal durch jeden Fundamentalpunkt, so spaltet sich bei der Verwandtschaft das Fundamentaldreieck k-mal ab. Es entsteht also eine Kurve der Ordnung $n' = 2n - 3k$. In unserem Falle ist $n' = n$ nach Satz 3 und $k = 2$ nach Satz 4. Also haben wir:

$$n = 2n - 3 \cdot 2; \; n = 6,$$

w. z. b. w.

Satz 6. *Die Bildkurve hat jeden der absoluten Punkte zum dreifachen Punkte.*

Rückt nämlich ein Punkt der Kurve 3. Ordnung in einen der drei uneigentlichen Punkte b_i' der Kurve (der konjugierte Punkt in einen im Endlichen gelegenen Punkt b_i), so bewegen sich die Laguerreschen Bildpunkte t_i, t_i' (auf Tangenten der durch die Punkte i_1, i_2 laufenden Kurvenzweige) gegen die Punkte i_1, i_2. Jeder der drei uneigentlichen Punkte b_i' der Kurve 3. Ordnung wird also zusammen mit dem konjugierten eigentlichen Punkte b_i auf das Paar der absoluten Punkte abgebildet, w. z. b. w.

Die Überlegung zeigt zugleich, daß der dem Punkte b_i' in der isogonalen Verwandtschaft zugeordnete Schnittpunkt b_i der beiden einander entsprechenden Tangenten der Kurve in den Punkten i_1, i_2 ein außerordentlicher Brennpunkt der Kurve ist. Auf diese Weise entstehen drei ausgezeichnete außerordentliche Brennpunkte der Kurve.

Im Ganzen hat die Bildkurve natürlich neun außerordentliche Brennpunkte. Die für den nur im reellen Gebiete arbeitenden Geometer nicht auffallende Tatsache, daß von ihnen (z. B. beim Satze von Roberts) nur drei (nämlich die drei reellen!) auftreten, findet ihre Erklärung darin, daß die

mit der Kurve verbundene isogonale Verwandtschaft die durch die absoluten Punkte laufenden Kurvenzweige paart und daß nur die zu gepaarten Zügen gehörigen „ausgezeichneten" außerordentlichen Brennpunkte in der Theorie der Kurve von Bedeutung sind. Wenn wir im folgenden von den Brennpunkten der Kurve sprechen, so meinen wir die ausgezeichneten außerordentlichen Brennpunkte der Kurve.

Da die isogonale Verwandtschaft des Dreiecks d_1, d_2, d_3 bekanntlich die uneigentliche Gerade mit dem Umkreis des Dreiecks d_1, d_2, d_3 vertauscht, liegen die Bildpunkte der Punkte b'_1, b'_2, b'_3 auf diesem Umkreise. Es folgt also:

Satz 7. *Die Bildkurve besitzt drei Brennpunkte b_1, b_2, b_3 auf dem Umkreise des Dreiecks d_1, d_2, d_3. Sie liegen auf der Kurve $(hx)^3 = 0$ und sind zu den uneigentlichen Punkten b'_1, b'_2, b'_3 der Kurve konjugiert.*

Der letzte Satz wird ergänzt durch

Satz 8. *Die Dreiecke d_1, d_2, d_3 und b_1, b_2, b_3 befinden sich in isogonaler Lage.*

In der Tat: Da die Punktepaare b_i, b'_i Paare konjugierter Punkte sind und die Punkte b'_i einer Geraden angehören, sind die Punktepaare b_i, b'_i die Gegeneckenpaare eines der Kurve 3. Ordnung einbeschriebenen Vierseits. Die Gerade $b_i b_j$ läuft also durch den Punkt b'_k. Daher ordnet die isogonale Verwandtschaft des Dreiecks d_1, d_2, d_3 (die ja konjugierte Punkte vertauscht), dem Punkte b_k den uneigentlichen Punkt der Geraden $b_i b_j$ zu. Durch diese (bekanntlich in allen Punkten des Dreiecks symmetrische Bedingung, in der auch die Rolle der beiden Dreiecke vertauscht werden kann) ist aber die isogonale Lage der beiden Dreiecke bedingt[6]).

Mit den Sätzen 3 bis 8 ist gezeigt, daß die Bildkurve die charakteristischen Eigenschaften der Koppelkurve besitzt. Damit ist das Ergebnis gewonnen:

Satz 9. *Das Laguerresche Bild einer Hesseschen Korrespondenz auf einer Kurve dritter Ordnung ist eine Koppelkurve.*

4. Realitätsverhältnisse. Von jetzt ab setzen wir die absoluten Punkte i_1, i_2 als konjugiert-komplex voraus. Die Laguerresche Abbildung bildet dann Paare reeller Punkte auf Paare konjugiert-komplexer Punkte ab und umgekehrt. Reelle Punkte der Koppelkurve entstehen also aus Paaren konjugiert-komplexer Punkte der Hesseschen Korrespondenz. Wir fragen daher nach den Paaren konjugiert komplexer Punkte der auf einer Kurve 3. Ordnung gelegenen Hesseschen Korrespondenzen.

Vom Standpunkte der reellen projektiven Geometrie aus sind bekanntlich zwei Typen reeller elliptischer Kurven 3. Ordnung zu unterscheiden, die einzügige und die zweizügige Kurve. Es ist ferner bekannt, daß man von jedem Punkte der einzügigen Kurve zwei reelle (und also ein Paar konjugiert-

[6]) Vgl. z. B. E. A. Weiss, Dreiecke in isogonaler Lage. Deutsche Mathematik (1941).

komplexe) Tangenten an die Kurve legen kann, von einem Punkte des paaren Zuges einer zweizügigen Kurve keine reelle Tangente (also zwei Paare konjugiert-komplexer Tangenten), von einem Punkte des unpaaren Zuges der zweizügigen Kurve vier reelle Tangenten (also kein Paar konjugiert-komplexer Tangenten)[7]).

Nun haben zwei Punkte, die sich in einer Hesseschen Korrespondenz entsprechen, denselben Tangentialpunkt. Handelt es sich um zwei konjugiert-komplexe Punkte, so sind die in ihnen an die Kurve gelegten Tangenten ebenfalls konjugiert-komplex und schneiden sich also in einem reellen Tangentialpunkt. Daher werden die konjugiert-komplexen Punktepaare einer Hesseschen Korrespondenz einer reellen Kurve 3. Ordnung auf einen reellen Zug dieser Kurve abgebildet.

Im Falle der einzügigen Kurve stellt jeder Punkt der Kurve ein Paar konjugiert-komplexer Punkte einer Hesseschen Korrespondenz dar, und diese Korrespondenz ist die einzige Korrespondenz der Kurve, die Paare konjugiert-komplexer Punkte enthält. Ein orientierter Punkt der Kurve vertritt einen bestimmten Punkt seines Bildpunktepaares in der Hesseschen Korrespondenz und also (nach erfolgter Laguerreschei Abbildung) einen bestimmten Punkt der Koppelkurve. Bei einmaligem Durchlaufen der Kurve 3. Ordnung ändert sich auf Grund der Nichtorientierbarkeit der projektiven Ebene die Orientierung des orientierten Punktes. Zweimaliges Durchlaufen der Kurve mit einem orientierten Punkte liefert also die ganze Koppelkurve. Diese besteht daher aus einem einzigen Zuge.

Im Falle der zweizügigen Kurve liefert der unpaare Zug nach dem Gesagten keinen Beitrag zur Koppelkurve. Von jedem Punkte des paaren Zuges aus laufen dagegen zwei Paare konjugiert-komplexer Tangenten. Diese Paare führen zu zwei Paaren derselben Hesseschen Korrespondenz.

Die Berührungspunkte der von einem Punkte u der Kurve an die Kurve geführten Tangenten haben nämlich die Parameter:

$$-\frac{u}{2},\ -\frac{u}{2}+\frac{\omega_1}{2},\ -\frac{u}{2}+\frac{\omega_2}{2},\ -\frac{u}{2}+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}.$$

Man kann sie auf drei verschiedene Weisen in Paare einteilen. Bei jeder Einteilung gehören die Paare einer Hesseschen Korrespondenz an. Z. B. gehören die Paare

$$-\frac{u}{2},\ -\frac{u}{2}+\frac{\omega_1}{2};\ \left(-\frac{u}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right),\ \left(-\frac{u}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{\omega_1}{2}$$

der durch die halbe Periode $\frac{\omega_1}{2}$ charakterisierten Hesseschen Korrespondenz an.

---

[7]) Vgl. z. B. H. Schroeter, Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, § 16. Leipzig 1888.

Die Parameterwerte zeigen, daß die Berührungspunkte des zweiten Paares konjugiert-komplexer Tangenten beim Durchlaufen des paaren Zuges als Berührungspunkte der vom Punkte $u + \omega_2$ ausgehenden Tangenten entstehen. Diesen Punkt hat man sich auf dem doppelt mit Punkten belegten paaren Zug unter dem Punkte u liegend vorzustellen, so daß der paare Zug mit zwei Schichten bedeckt wird, die nach Art einer RIEMANNschen Fläche in einem Verzweigungspunkt zusammenhängen. Man erhält die ganze Koppelkurve, wenn man den entstehenden Doppelring einmal ganz durchläuft.

Orientiert man jetzt den Punkt des paaren Zuges und bildet man den orientierten Punkt auf einen bestimmten Punkt der Koppelkurve ab, so werden den beiden möglichen Orientierungen des Punktes entsprechend zwei verschiedene Züge der Koppelkurve geliefert; denn die Orientierung des Punktes ändert sich nicht beim Durchlaufen des paaren Zuges. Da dem Umorientieren des Punktes die Anwendung der isogonalen Verwandtschaft auf die Koppelkurve entspricht, folgt, daß die isogonale Verwandtschaft die beiden Züge der Koppelkurve miteinander vertauscht. Also:

Satz 10. *Die Paare konjugiert-komplexer Punkte der* HESSEschen *Korrespondenzen einer einzügigen oder zweizügigen reellen Kurve 3. Ordnung werden durch die* LAGUERREsche *Abbildung auf eine reelle einzügige oder zweizügige Koppelkurve abgebildet. Die isogonale Verwandtschaft der zweizügigen Koppelkurve vertauscht die beiden Züge der Kurve.*

5. Das LAGUERREsche Bild einer HESSEschen Korrespondenz auf einer rationalen Kurve 3. Ordnung. Von einem Punkte einer rationalen Kurve 3. Ordnung kann man an die Kurve nur zwei Tangenten legen. Ihre Berührungspunkte entsprechen sich in der Involution, die auf der Kurve durch den Doppelpunkt bestimmt wird. Diese Involution stellt die einzige HESSEsche Korrespondenz auf der Kurve dar, und sie enthält Paare konjugiert-komplexer Punkte nur dann, wenn sie hyperbolisch, der Doppelpunkt also ein Knoten ist. In diesem Falle laufen die Paare konjugiert-komplexer Tangenten von den Punkten der durch den Doppelpunkt bestimmten Schleife aus. Die Punktepaare der Koppelkurve werden also auf die Punkte der Schleife abgebildet.

Durchläuft ein orientierter Punkt die Schleife, so kann man ihn seine Orientierung ändern lassen, wenn er den Doppelpunkt durchschreitet. Dann wird die ganze Koppelkurve geliefert, wenn der orientierte Punkt die Schleife zweimal durchläuft. Durch die LAGUERREsche Abbildung wird der Doppelpunkt der Kurve 3. Ordnung auf sich selbst als zusätzlichen Doppelpunkt der Koppelkurve abgebildet. Da die Umorientierung des orientierten Punktes die Anwendung der isogonalen Verwandtschaft auf die Koppelkurve nach sich zieht, werden die beiden Teile, in die die Koppelkurve durch den Doppelpunkt

geteilt wird, durch die isogonale Verwandtschaft der Kurve miteinander vertauscht. Der zusätzliche Doppelpunkt fällt als ein Fixpunkt der isogonalen Verwandtschaft des Dreiecks d_1, d_2, d_3 in einen der vier Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Dreiecks.

Außer dem Auftreten des zusätzlichen Doppelpunktes ändert sich nichts an den unter 3. abgeleiteten Eigenschaften der Koppelkurve.

Satz 11. *Als Laguerresches Bild der Hesseschen Korrespondenz einer reellen Kurve 3. Ordnung mit Knoten entsteht die rationale Koppelkurve. Sie besitzt einen zusätzlichen Doppelpunkt, der mit dem Doppelpunkt der Kurve 3. Ordnung zusammen und in einen der vier Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des von den drei übrigen Doppelpunkten gebildeten Dreiecks fällt. Die isogonale Verwandtschaft der Kurve vertauscht die beiden Teile, in die der zusätzliche Doppelpunkt die Kurve teilt.*

6. Das Laguerresche Bild einer Involution auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt. Zerfällt die Kurve 3. Ordnung in einen Kegelschnitt und in eine Gerade, so zerfällt, wie wir sehen werden, die Hessesche Korrespondenz der Kurve in zwei Involutionen, in eine Involution auf dem Kegelschnitt und eine Involution auf der Geraden. Wir wollen daher zunächst die Laguerreschen Bilder solcher Involutionen behandeln.

Satz 12. *Das Laguerresche Bild einer hyperbolischen Involution auf einer Geraden ist der Kreis, der die Gerade in den Ruhepunkten der Involution senkrecht schneidet.*

Beweis. x, x' sei ein Punktepaar der Involution. Dann sind die Strahlenbüschel $i_1 x$, $i_2 x'$ projektiv und erzeugen also einen Kegelschnitt, der die Punkte i_1, i_2 enthält, einen Kreis. Dieser Kreis läuft durch die Ruhepunkte der Involution und schneidet in diesen Punkten die vorgegebene Gerade senkrecht; denn die Diagonalen des Vierecks der Punkte x, x' und der Laguerreschen Bilder y, y' stehen aufeinander senkrecht. Bewegen sich die Punkte x, x' gegen einen Ruhepunkt der Involution, so rücken auch die Punkte y, y' auf der Tangente des Bildkreises in diesen Punkt zusammen.

Soll das Laguerresche Bild einer Involution auf einem Kegelschnitt reelle Punkte erhalten, so muß die Involution Paare konjugiert-komplexer Punkte besitzen. Es muß sich also um eine hyperbolische Involution auf einem einteiligen Kegelschnitt handeln.

Satz 13. *Das Laguerresche Bild einer hyperbolischen Involution auf einem (einteiligen) Kegelschnitt ist eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung, die den Kegelschnitt in den Ruhepunkten der Involution senkrecht schneidet.*

In der Tat: Durchläuft das Paar x, x' die Punktepaare der Involution, so werden die Strahlenbüschel $i_1 x$, $i_2 x'$ durch eine (2, 2)-Korrespondenz

aufeinander bezogen. Diese erzeugt eine Kurve 4. Ordnung, die zweimal durch jeden der absoluten Punkte läuft. Daß die Kurve den Kegelschnitt in den Ruhepunkten der Involution senkrecht schneidet, wird ebenso bewiesen wie die Schlußbehauptung des vorigen Satzes.

Im einzelnen läßt sich über die Kurve noch folgendes aussagen:

Satz 14. *Die bizirkulare Kurve 4. Ordnung des Satzes* 13 *besitzt einen Doppelpunkt* d_1 *im Endlichen. Es ist der Schnittpunkt der beiden Minimalgeraden, die zusammengenommen den Kegelschnitt in zwei Punktepaaren der vorgegebenen Involution schneiden.* d_1 *liegt auf der Polaren des Zentrums dieser Involution.*

Beweis. Ein Doppelpunkt d_1 entsteht, wenn die Geraden $d_1 i_1$, $d_1 i_2$ den Kegelschnitt in Punktepaaren $s_1 s_2$, $s_1' s_2'$ schneiden, die sich in der vorgegebenen Involution entsprechen. Die Punktepaare bilden dann ein dem Kegelschnitt einbeschriebenes Viereck, von dem zwei Diagonalpunkte bekannt sind, der Punkt d_1 und das Zentrum z der Involution. Die Existenz des Punktes d_1 vorausgesetzt ist der letzte Teil unseres Satzes also bewiesen.

Wir verbinden nun einen auf der Polaren des Punktes z laufenden Punkt p mit dem Punkte i_2. Die Verbindungslinie schneide den Kegelschnitt in den Punkten s_1, s_2. Den Punkten s_1, s_2 mögen in der Involution die Punkte s_1', s_2' entsprechen. Die Gerade $s_1' s_2'$ wird dann der Geraden $s_1 s_2$ in der projektiven Spiegelung zugeordnet, die durch das Zentrum z und seine Polare bestimmt wird. Dreht sich also die Gerade $i_2 p$ um den Punkt i_2, so dreht sich die Gerade $s_1' s_2'$ um den Punkt i_2', der dem Punkte i_2 in dieser projektiven Spiegelung zugeordnet wird. Von den Geraden $s_1' s_2'$ läuft daher nur eine durch i_1, die Gerade $i_1 i_2'$. Sie schneidet die Polare des Punktes z in dem gesuchten Doppelpunkt d_1.

Satz 15. *Die bizirkulare Kurve 4. Ordnung des Satzes* 13 *besitzt zwei ausgezeichnete außerordentliche Brennpunkte. Es sind die Punkte, die den uneigentlichen Punkten des Kegelschnittes durch die Involution zugeordnet werden.*

Der Satz wird auf dieselbe Weise bewiesen wie der erste Teil von Satz 7.

Wir fragen schließlich nach den Schnittpunkten der Kurve 4. Ordnung mit dem Kegelschnitt. Vier Punkte ergeben sich unmittelbar als Schnittpunkte des Kegelschnitts mit den beiden von z ausgehenden Minimalgeraden. Zwei weitere Punkte, die Fixpunkte der Involution, kennen wir bereits. Der Kreis über der Verbindungsstrecke dieser Fixpunkte als Durchmesser schneidet den Kegelschnitt in den beiden letzten Punkten. Ein solcher Punkt d projiziert nämlich nach dem Satze von Thales das Punktepaar i_1, i_2 und das Fixpunktepaar der Involution in harmonischen Strahlenpaaren. Die Strahlen

di_1, di_2 schneiden daher den Kegelschnitt zum zweiten Male in einem Punktepaar unserer Involution, und dieses gibt bei der LAGUERREschen Abbildung ein Punktepaar, das den Punkt d als Bestandteil enthält.

Satz 16. *Die bizirkulare Kurve 4. Ordnung des Satzes* 13 *schneidet den Kegelschnitt in folgenden* 8 *Punkten*:

1. *In den vier Punkten, in denen die vom Involutionszentrum ausgehenden Minimalgeraden den Kegelschnitt treffen.*

2. *In den vier Punkten, in denen der über der Strecke der Involutionsfixpunkte als Durchmesser konstruierte Kreis den Kegelschnitt schneidet.*

7. Das LAGUERREsche Bild der HESSEschen Korrespondenz einer einfach zerfallenden Kurve 3. Ordnung. Vorgegeben sei eine in einen Kegelschnitt k und eine Gerade g zerfallene Kurve 3. Ordnung.

Um HESSEsche Korrespondenzen auch für zerfallende Kurven erklären zu können, definieren wir eine HESSEsche Korrespondenz als die Korrespondenz der Paare von Gegenpunkten einer Schar der Kurve 3. Ordnung einbeschriebener Vierseite.

Der zerfallenen Kurve 3. Ordnung lassen sich ∞^2 Vierseite einbeschreiben. Die Gegenpunkte dieser Vierseite sind einerseits Paare (bezüglich des Kegelschnitts) konjugierter Punkte der Geraden g und zweitens Paare der durch den Pol z der Geraden g auf dem Kegelschnitt bestimmten Involution. Auf der zerfallenen Kurve 3. Ordnung gibt es daher nur eine HESSEsche Korrespondenz. Sie zerfällt in die beiden Involutionen.

Das LAGUERREsche Bild der HESSEschen Korrespondenz zerfällt in das LAGUERREsche Bild der Involution auf dem Kegelschnitt und der Involution auf der Geraden. Damit das Bild einen reellen Zug erhält, müssen die Involutionen hyperbolisch sein. Die Kurve 3. Ordnung muß also aus einem einteiligen Kegelschnitt bestehen, der von einer reellen Geraden in zwei reellen Punkten geschnitten wird.

Aus den Sätzen der vorigen Nummer folgt sofort

Satz 17. *Eine Kurve 3. Ordnung zerfalle in einen einteiligen Kegelschnitt und eine Gerade, die ihn in zwei reellen Punkten schneidet. Das* LAGUERREsche *Bild der* HESSEschen *Korrespondenz dieser Kurve wird eine Koppelkurve, die in eine bizirkulare Kurve 4. Ordnung und einen Kreis zerfällt.*

Wir wollen über Doppelpunkte und Brennpunkte dieser Kurve nähere Angaben machen.

Satz 18. *Die Koppelkurve des Satzes* 17 *besitzt* 5 *eigentliche Doppelpunkte, den eigentlichen Doppelpunkt d_1 der bizirkularen Kurve 4. Ordnung und die vier Punkte d_2, d_3, d_4, d_5, in denen der Kreis die Kurve 4. Ordnung schneidet.*

Wie bereits bekannt, erscheinen die Punkte d_2, d_3, d_4, d_5 gepaart. Zwei von ihnen, d_4, d_5, sind die Fixpunkte der Involution. Sie sind die zusätzlichen Doppelpunkte. Die beiden übrigen bereits gelegentlich des Beweises des Satzes 16 behandelten Doppelpunkte d_2, d_3 projizieren die Punktepaare der HESSEschen Korrespondenz — wie die Doppelpunkte der allgemeinen Koppelkurve — in Strahlenpaaren einer Involution, welche auch das Paar der Minimalgeraden enthält. Die Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 spielen daher dieselbe Rolle für die zerfallene wie die drei ebenso bezeichneten Doppelpunkte für die nicht zerfallene Koppelkurve. Also:

Satz 19. *Die Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 des Satzes 18 spielen für die zerfallene Koppelkurve die gleiche Rolle wie die ebenso bezeichneten Doppelpunkte für die nicht zerfallene. Der Umkreis des Dreiecks d_1, d_2, d_3 enthält die drei ausgezeichneten außerordentlichen Brennpunkte der Kurve, die beiden Brennpunkte der bizirkularen Kurve 4. Ordnung und den Mittelpunkt des Kreises. Das Dreieck der Doppelpunkte befindet sich mit dem Dreieck der Brennpunkte in isogonaler Lage.*

Die isogonale Verwandtschaft des Dreiecks d_1, d_2, d_3 transformiert sowohl den Kreis wie die Kurve 4. Ordnung in sich. Die Punkte d_4, d_5 sind Fixpunkte dieser Verwandtschaft.

8. Das LAGUERREsche Bild der HESSEschen Korrespondenz einer doppelt zerfallenen Kurve 3. Ordnung. Eine Kurve 3. Ordnung sei in drei Geraden zerfallen. Diese bilden ein Dreieck. Es gibt ∞^2 Vierseite, die man dem Dreieck einbeschreiben kann. Ihre Gegenpunkte entsprechen sich in den Involutionen, die auf jeder Seite des Dreiecks durch die beiden Eckpunkte bestimmt werden. Soll die Bildkurve reell ausfallen, müssen die Involutionen hyperbolisch, die Geraden selbst also reell sein.

Da wir das LAGUERREsche Bild einer hyperbolischen Involution auf einer Geraden bereits kennen, folgt unmittelbar:

Satz 20. *Eine Kurve 3. Ordnung sei in drei reelle Geraden zerfallen, die ein Dreieck d_4, d_5, d_6 bilden. Die als LAGUERRESches Bild der auf ihr bestehenden HESSEschen Korrespondenz abgeleitete Koppelkurve zerfällt in die drei Kreise, die über den Seiten des Dreiecks als Durchmesser konstruiert werden können.*

Die Kurve besitzt drei ausgezeichnete außerordentliche Brennpunkte, die Mittelpunkte der drei Kreise, also die Mitten der Dreiecksseiten. Sie hat drei zusätzliche Doppelpunkte, die Ecken des Dreiecks und drei den Doppelpunkten des allgemeinen Falles entsprechende Doppelpunkte, die Höhenfußpunkte des Dreiecks. Die Brennpunkte und die zuletzt genannten Doppelpunkte liegen auf einem Kreise, dem FEUERBACHschen Kreise des Dreiecks.

(Eingegangen am 2. November 1940.)

Zur Geometrie der Zahlen*).

Von

Josef Heinhold in München.

In meiner Arbeit „Verallgemeinerung und Verschärfung eines MINKOWSKIschen Satzes“[1]) wurde folgende Aufgabe behandelt: Gegeben ist die quadratische Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$; es ist die untere Grenze φ aller C^2 zu bestimmen, für die zu beliebigen reellen Zahlen x, y stets ganze rationale Zahlen X, Y existieren, so daß

$$|a(X+x)^2 + 2b(X+x)(Y+y) + c(Y+y)^2| \leqq C^2,$$

d. h. in geometrischer Deutung, daß bei beliebiger Translation in einem $(x; y)$-Koordinatensystem der durch $|ax^2 + 2bxy + cy^2| \leqq C^2$ definierte Bereich stets Gitterpunkte, d. h. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, im Innern oder auf seinem Rand enthält.

Es soll nun dieselbe Aufgabe in der Ebene für endliche „nichtkonkave“ Bereiche mit inneren Punkten und mit Mittelpunkt gestellt werden. Ein solcher läßt sich nach MINKOWSKI[2]), in der für das Folgende bequemen Weise, durch die „Distanzfunktion“ $f(x; y)$ definieren:

Es sei $f(x; y)$ irgendeine Funktion der reellen Veränderlichen x und y, welche die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \begin{cases} f(x; y) > 0 & \text{für} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ f(0; 0) = 0, \end{cases} \\ &\text{(b)}\quad f(tx; ty) = |t| f(x; y), \\ &\text{(c)}\quad f(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2) \leqq f(x_1; y_1) + f(x_2; y_2). \text{ [3])} \end{aligned}$$

Die Punkte, deren Koordinaten $(x; y)$ der Ungleichung $f(x; y) \leqq 1$ genügen, erfüllen einen nicht konkaven Bereich $\mathfrak{F}$ mit dem Mittelpunkt $(0; 0)$, dessen Randpunkte der Gleichung $f(x; y) = 1$ genügen. Gilt in (1c) für Zahlenpaare $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ mit $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ stets das $<$-Zeichen, so bezeichnen wir $\mathfrak{F}$ als „konvexen“ Bereich. Ist $P(\xi; \eta)$ ein beliebiger von $(0; 0)$

---

*) Diese Arbeit wurde von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 659–688.

[2]) Vgl. MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen, S. 102. Leipzig u. Berlin 1910 oder BONNESEN u. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, S. 21 u. 22. Berlin 1934.

[3]) Unter $f(x; y)$ wird im folgenden stets eine Funktion mit den Eigenschaften (1) verstanden.

verschiedener Punkt und $(x; y)$ der Schnittpunkt des Strahles OP mit dem Rand $f(x; y) = 1$, so folgt aus (1b):

$$f(\xi; \eta) = f\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} x; \quad \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} y\right) = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also die geometrische Bedeutung der Distanzfunktion $f(x; y)$. Unsere Aufgabe läßt sich nun folgendermaßen formulieren:

(2) Es ist bei vorgegebener Funktion $f(x; y)$ die untere Grenze $\varphi(f)$ aller C^2 zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß zu beliebigen reellen Zahlen x, y stets ganze rationale Zahlen X, Y vorhanden sind, so daß $f(X + x; Y + y) \leqq C^2$.

D. h. also geometrisch, daß bei beliebiger Translation des durch $f(x; y) \leqq C^2$ definierten Bereichs stets Gitterpunkte in seinem Innern oder auf dem Rande gelegen sind. Für die andere Aufgabe:

(3) Die untere Grenze ψ aller C^2 zu bestimmen, für die stets von $(0; 0)$ verschiedene ganze Zahlen X, Y mit $f(X; Y) \leqq C^2$ vorhanden sind,

hat bekanntlich Minkowski [4]) eine obere Schranke ϱ für ψ, $\varrho = \frac{2}{\sqrt{J}}$ angegeben, wobei J der Flächeninhalt des Bereichs $f(x; y) \leqq 1$ ist. Für die Aufgabe (2) hingegen gibt es keine nur vom Flächeninhalt J abhängige obere Schranke für φ, denn wie das Beispiel von Rechtecken mit achsenparallelen Seiten und extremem Seitenverhältnis zeigt, kann bei konstantem J der Flächeninhalt der Figur $f(x; y) \leqq C^2$, $J C^4$, und damit C^2 beliebig große Werte annehmen, ohne daß die Forderung (2) erfüllt ist.

Im folgenden wird ein Satz über die Funktionen $f(x; y)$ abgeleitet (Satz 1), hierauf die Bestimmung der unteren Grenze φ zurückgeführt (Satz 2) und hiermit für die Funktion

$$f(x; y) = (|\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqq 1, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

$\varphi(f)$ bestimmt (Satz 3). Schließlich werden aus dem letzteren einige weitere Folgerungen gezogen.

1.

Die Eigenschaft (1) einer Funktion $f(x; y)$ ist offenbar invariant gegenüber affinen Transformationen. Zwei Funktionen $f_1(x; y)$ und $f_2(x; y)$ nennen wir „äquivalent", wenn sie durch eine „unimodulare" Transformation, d. h. durch eine Transformation $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$ mit ganzzahligen Koeffi-

[4]) Geometrie der Zahlen, S. 77, für $n = 2$.

zienten der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ineinander übergeführt werden können. (Ebenso bezeichnen wir Bereiche mit dieser Eigenschaft als äquivalent.) Gibt es in diesem Fall zu beliebigen reellen[5]) x, y stets ganze Zahlen X, Y, so daß $f_1(X + x,\ Y + y) \leqq C^2$, so gibt es wegen

$$f_1(X + x;\ Y + y) = f_2(\alpha X + \beta Y + \alpha x + \beta y;\ \gamma X + \delta Y + \gamma x + \delta y)$$
$$= f_2(X' + x';\ Y' + y')$$

auch zu beliebigen Zahlen x', y' stets ganze Zahlen X', Y', so daß

$$f_2(X' + x';\ Y' + y') \leqq C^2.$$

D. h.

Hilfssatz 1. Äquivalente Funktionen $f(x; y)$ haben dieselbe untere Grenze φ.

Wir betrachten nun die Zahlenpaare

$$\begin{aligned} &A\ (x_1 = \tfrac{1}{4} + u;\quad y_1 = \tfrac{1}{4} + v),\\ &B\ (x_2 = \tfrac{3}{4} - u;\quad y_2 = -\tfrac{1}{4} - v),\\ &C\ (x_3 = \tfrac{1}{4} + u;\quad y_3 = -\tfrac{3}{4} + v), \end{aligned} \tag{4}$$

wobei u, v in den folgenden Grenzen liegen:

$$0 < v \leqq \tfrac{1}{4},\qquad 0 \leqq u \leqq v,$$

und beweisen den

Satz 1. *Zu jeder Funktion $f(x; y)$ von* (1) *gibt es stets eine äquivalente Funktion $\bar{f}(x; y)$ und Zahlen u, v mit den in* (4) *angegebenen Bedingungen*[6]), *so daß*

$$\bar{f}(x_1; y_1) = \bar{f}(x_2; y_2) = \bar{f}(x_3; y_3).$$

Definition. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir im folgenden mit $k(u, v)$.

Satz 1 besagt geometrisch: Es läßt sich jedem Bereich $f(x; y) \leqq C^2$, bzw. einem dazu äquivalenten, nach passender Wahl von C^2 ein aus Punkten A, B, C und deren Spiegelpunkten bezüglich 0 (0; 0) gebildetes „Sechseck" mit diesen Punkten als Eckpunkten einbeschreiben.

Zum Beweis wählen wir eine Zahl t_1 so, daß im Innern des Bereichs $f(x; y) \leqq t_1$ außer seinem Mittelpunkt 0 (0; 0) kein weiterer Gitterpunkt liegt, daß aber wenigstens ein Gitterpunkt auf dem Rand des Bereichs gelegen ist. Einen solchen greifen wir heraus und bezeichnen ihn mit $G_1(p_1; q_1)$. Nun nehmen wir ein $t_2 \geqq t_1$ so, daß ein nicht auf 0 G_1 gelegener Gitterpunkt

---

[5]) Im folgenden sind alle Zahlen reell, falls nichts anderes angegeben ist.

[6]) Für konvexe Bereiche gilt dieser Satz mit $\begin{cases} 0 < v < \frac{1}{4} \\ 0 \leqq u < v \end{cases}$, ferner mit $u = v = \frac{1}{4}$.

auf dem Rand des Bereichs $f(x; y) \leqq t_2$, aber nicht in seinem Innern liegt. Ein solcher sei $G_2(p_2; q_2)$. Ist dabei $t_2 = t_1$, so dürfen wir voraussetzen, daß auf der Verbindungsstrecke G_1G_2 kein weiterer Gitterpunkt gelegen ist.

Im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks $0, G_1, G_2$ liegen dann außer seinen Eckpunkten sicher keine weiteren Gitterpunkte, daher gilt dasselbe für das Parallelogramm $\mathfrak{P}\{0\,(0; 0), G_1(p_1; q_1), G_2(p_2; q_2), G_3(p_1 + p_2; q_1 + q_2)\}$. $\mathfrak{P}$ besitzt demnach einen Flächeninhalt vom Absolutbetrag 1 und ist ein Fundamentalparallelogramm des Gitters. Durch die unimodulare Transformation

$$(T) \qquad \begin{cases} x = p_1 x' + p_2 y' \\ y = q_1 x' + q_2 y', \end{cases} \qquad p_1 q_2 - p_2 q_1 = \pm 1,$$

geht $\mathfrak{P}$ über in das Quadrat $\mathfrak{Q}\{0\,(0; 0), G_1(1; 0), G_2(0; 1), G_3(1; 1)\}$, $f(x; y)$ in die äquivalente Funktion $f'(x; y)$.

Um[7]) 0 legen wir nun den Bereich $f'(x; y) \leqq \frac{t_2}{2}$ und ebenso um die anderen Gitterpunkte von $\mathfrak{Q}$ die hierzu homologen Bereiche[8]). Die Mittelpunkte der Seiten von $\mathfrak{Q}$: $M_1\,(\frac{1}{2}; 0)$, $M_2(0; \frac{1}{2})$, $M_3\,(\frac{1}{2}; 1)$, $M_4\,(1; \frac{1}{2})$ liegen dann im Innern oder auf den Rändern der Bereiche um die Eckpunkte von $\mathfrak{Q}$ und der Rand des Quadrats $\mathfrak{Q}$ $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ (vgl. Fig. 1) besteht aus inneren oder Randpunkten dieser Bereiche. Der außerhalb von $\bar{\mathfrak{Q}}$ gelegene Teil des Quadrates $\mathfrak{Q}$ wird von den vier Bereichen um die Punkte $0, G_1, G_2, G_3$ überdeckt.

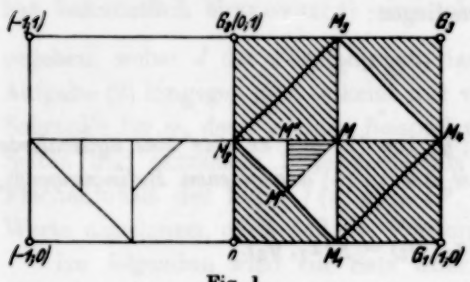

Fig. 1.

Der Mittelpunkt $M\,(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ von $\mathfrak{Q}$ kann nicht innerer Punkt einer der vier Bereiche $\mathfrak{F}_{0,0}, \mathfrak{F}_{1,0}, \mathfrak{F}_{0,1}, \mathfrak{F}_{1,1}$ sein, sonst wäre ein anderer Gitterpunkt vor G_2 auf den Rand des Bereiches um 0 zu liegen gekommen. Falls der Punkt M noch nicht auf dem Rand eines der Bereiche $\mathfrak{F}_{0,0}, \mathfrak{F}_{1,0}, \mathfrak{F}_{0,1}, \mathfrak{F}_{1,1}$ liegt, vergrößern wir die sämtlichen Bereiche[9]), bis dieses für $f'(x; y) \leqq t_3 \left(t_3 \geqq \frac{t_2}{2}\right)$ der Fall ist. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle:

---

[7]) D. h. mit 0 als Mittelpunkt.

[8]) Dabei nennen wir zwei Bereiche um Gitterpunkte, welche durch Translation miteinander zur Deckung gebracht werden können, „homolog" und bezeichnen im folgenden den zum Bereich um 0 (0; 0) homologen Bereich um $(p; q)$ auch mit $\mathfrak{F}_{p,q}$

[9]) Die vergrößerten Bereiche werden wieder mit $\mathfrak{F}_{0,0}$ usw. bezeichnet.

I. *Alle vier Bereiche um die Eckpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthalten M auf ihrem Rand.* In diesem Fall geht der Rand des zugehörigen Bereichs um (0; 0) durch die Punkte ($x = \pm \frac{1}{2}$; $y = \pm \frac{1}{2}$), also auch durch die Punkte A, B, C von (4), S. 201 mit $u = v = \frac{1}{4}$, wobei B und C zusammenfallen.

II. *Es enthält einer der zu $f(x; y) \leqq t_3$ homologen Bereiche um die Eckpunkte des Quadrats $\mathfrak{Q}$ den Punkt M auf seinem Rand, und damit auch der zu diesem bezüglich M symmetrische Bereich, während die anderen M nicht enthalten.* Wir können annehmen, daß M auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{1,0}$ und damit auch auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{0,1}$ gelegen ist, anderenfalls liegt nach der Transformation $x = -x'$, $y = y'$ M auf dem Rand des äquivalenten Bereichs um $G_{1,0}$. Es gehört demnach das Quadrat $MM_1G_1M_4$ ganz dem Bereich $\mathfrak{F}_{1,0}$ an und ebenso das Quadrat $MM_3G_2M_2$ dem Bereich $\mathfrak{F}_{0,1}$. Daher bleibt von $\mathfrak{Q}$ höchstens das Dreieck M_1MM_2 oder ein Teil davon und ebenso das zu M hierzu symmetrische Dreieck M_3MM_4 bzw. der entsprechende Teil desselben unbedeckt. Wir betrachten nun den Unterfall von II, daß

IIa) die Ränder der drei zu $f(x; y) \leqq t_3$ homologen Bereiche $\mathfrak{F}_{0,0}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$, $\mathfrak{F}_{0,1}$ durch einen von M verschiedenen Punkt A gehen.

Wir können uns dabei auf den Fall beschränken, daß A im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks M' ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$); M ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$), M'' ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$) (vgl. Fig. 1, S. 202) gelegen ist. Zunächst kann man nämlich annehmen, daß A im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks $M'MM_2$ gelegen ist, was sich nötigenfalls durch die unimodulare Transformation $x' = y$, $y' = x$ für die äquivalenten Bereiche erzielen läßt. Liegt dann der Punkt A, durch den die Ränder der Bereiche um $0, G_1, G_2$ gehen, noch außerhalb des Dreiecks $M'MM''$, so gehen die Ränder der drei homologen Bereiche um $(-1; 0)$, 0, $(-1; 1)$ durch den zu A homologen[10]) Punkt A' des Dreiecks $(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$, $(-1; \frac{1}{2})$, $(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$. Durch die Transformation $X = x + y$, $Y = y$ wird dieses Dreieck übergeführt in das Dreieck $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$, und $(-1; 0)$ in $(-1; 0)$, $(-1; 1)$ in $G_2(0; 1)$, durch die Transformation $X = -X'$, $Y = Y'$ das letzte Dreieck in das Dreieck $\Delta\{(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})\}$, $(-1; 0)$ in $G_1(1; 0)$ und $(1; 0)$ in $G_2(0; 1)$. Daher ist nach diesen Transformationen A in einen Punkt dieses Dreiecks übergegangen und es läßt sich so, gegebenenfalls noch durch die Transformation $X' = Y'''$, $Y' = X''$, erreichen, daß A durch eine unimodulare Transformation in einen Punkt des Dreiecks $M'MM''$ übergeht und auf den Rändern der drei Bereiche $\mathfrak{F}_{0,0}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$, $\mathfrak{F}_{0,1}$ liegt. Hiermit beschränken sich die Werte u, v in den Koordinaten des Punktes A von (4), S. 201, auf $0 < v \leqq \frac{1}{4}$, $0 \leqq u \leqq v$.

---

[10]) Dabei nennen wir zwei Punkte, deren Koordinaten sich um ganze rationale Zahlen unterscheiden, „homolog".

A liegt auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{0,0}$. Da A ferner auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{1,0}$ gelegen ist und daher auch der Spiegelpunkt von A bezüglich G_1, B' $(\frac{1}{4} - u;$ $-\frac{1}{4} - v)$, so liegt der Punkt $B(x_2 = \frac{3}{4} - u;\ y_2 = -\frac{1}{4} - v)$ ebenfalls auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{0,0}$. Schließlich liegt A noch auf dem Rand des Bereichs $\mathfrak{F}_{0,1}$, also der Punkt $C(x_3 = \frac{1}{4} + u;\ y_3 = -\frac{3}{4} + v)$ auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{0,0}$. Damit ist für diesen Spezialfall IIa der Satz 1 bewiesen.

Da die Ränder von $\mathfrak{F}_{1,0}$ und $\mathfrak{F}_{0,1}$ durch den Punkt A $(x_1; y_1)$ gehen, so liegt der Spiegelpunkt von A bezüglich G_2, $\bar{A}$ $(-x_1; 2 - y_1)$ auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{0,1}$ und daher der Punkt A^* $(1 - x_1;\ 1 - y_1)$ auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{1,0}$. Es enthält demnach im Fall IIa der Rand des Bereichs $\mathfrak{F}_{1,0}$ die Punkte A, M und den Spiegelpunkt von A bezüglich M, A^*, auf seinem Rand. Ebenso folgt das für den Bereich $\mathfrak{F}_{0,1}$. Liegt aber im Innern einer Strecke, deren Endpunkte einem Bereich $f(x; y) \leqq t$ angehören, ein Randpunkt, so besteht offenbar die ganze Strecke aus Randpunkten. Gilt nun in (1) von S. 199 für $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ nur das Kleinerzeichen, ist also der zugehörige Bereich konvex, so kann der Fall IIa nicht eintreten. In dem noch übrigbleibenden Fall

IIb) liegt M für $t = t_3$ auf den Rändern der Bereiche $\mathfrak{F}_{1,0}$ und $\mathfrak{F}_{0,1}$, aber die Ränder der drei Bereiche $\mathfrak{F}_{0,0}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$, $\mathfrak{F}_{0,1}$, die aus inneren oder Randpunkten des Dreiecks $M_1 M M_2$ bestehen, gehen nicht durch einen gemeinsamen Punkt dieses Dreiecks. Es bleibt dann ein von den drei Rändern begrenztes Gebiet des Dreiecks unbedeckt. Anderenfalls gäbe es, da die drei Ränder keinen Punkt gemein haben, einen Punkt P, der im Innern aller drei Bereiche $\mathfrak{F}_{0,0}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$, $\mathfrak{F}_{0,1}$ gelegen ist. Aus Symmetriegründen wäre dann der Spiegelpunkt von P bezüglich M, P^*, innerer Punkt z. B. von $\mathfrak{F}_{1,0}$, also die Strecke PP^* im Innern von $\mathfrak{F}_{1,0}$ gelegen, während nach Voraussetzung M Randpunkt von $\mathfrak{F}_{1,0}$ ist. Vergrößern wir nun die zu $f(x; y) \leqq t$, $t = t_3$, homologen Figuren um $0, G_1, G_2$ mitsamt den Strecken $M_1 M$, $M M_2$, $M_2 M_1$, so wird für ein gewisses $t = t^*$ das aus dem ursprünglichen Dreieck $M_1 M M_2$ hervorgegangene Dreieck auf einen Punkt zusammengeschrumpft sein. Dann ist aber schon für ein $t_4 \leqq t^*$ das Dreieck $M_1 M M_2$ zum erstenmal durch die Bereiche um $0, G_1, G_2$ lückenlos überdeckt und es gibt einen Punkt A, der auf den drei Rändern von $\mathfrak{F}_{0,0}$, $\mathfrak{F}_{1,0}$, $\mathfrak{F}_{0,1}$ gelegen ist.

In gleicher Weise wie unter IIa können wir, wenn das noch nicht der Fall sein sollte, erreichen, daß A innerhalb oder auf den Rand des Dreiecks $M'MM''$ zu liegen kommt, wobei sich die Parameter u, v in den Koordinaten von A $(x_1 = \frac{1}{4} + u;\ y_1 = \frac{1}{4} + v)$ in diesem Fall IIb auf die Werte beschränken $0 < v < \frac{1}{4}$, $0 \leqq u \leqq v$. Schließlich ergibt sich in derselben Weise wie unter IIa, daß zusammen mit A auch B und C von Satz 1 auf dem Rand von $\mathfrak{F}_{0,0}$ gelegen sind, womit Satz 1 einschließlich der Fußnote [6]) bewiesen ist.

2.

Wir betrachten nun die Gesamtheit der zu $A\,(x_1 = \frac{1}{4} + u;\ y_1 = \frac{1}{4} + v)$ von (4), S. 201, homologen Punkte $E_{p,q}\,(x_1 + p;\ y_1 + q)$, ebenso die zu $B\,(x_2 = \frac{3}{4} - u;\ y_2 = -\frac{1}{4} - v)$ homologen Punkte $E'_{p,q}\,(x_2 + p;\ y_2 + q)$. Ziehen wir die Verbindungsstrecken von $E_{p,q}$ nach $E'_{p,q}$ und von $E_{p,q}$ nach $E'_{p,q+1}$ und $E'_{p-1;\,q+1}$, so erhalten wir wegen $0 < v \leqq \frac{1}{4}$ und $0 \leqq u \leqq v$ nicht konkave „Sechsecke" $\mathfrak{S}_{p,q}$ um die Gitterpunkte $(p;q)$ mit den Ecken $E_{p,q}$, $E'_{p,q}$, $E_{p,q-1}$, $E'_{p-1,q}$, $E_{p-1,q}$, $E'_{p-1,q+1}$, welche die Ebene lückenlos überdecken (vgl. Fig. 2). Nach Satz 1 geht der Rand des Bereichs $f'(x;y) \leqq k(u;v)$ durch die Punkte $A = E_{0,0}$, $B = E'_{0;0}$, $C = E_{0;-1}$ und wegen (1 b), S. 199, auch durch die Punkte $E'_{-1,0}$, $E_{-1,0}$, $E'_{-1,1}$. Der zu $f' \leqq k(u;v)$ homologe Bereich $\mathfrak{F}_{p,q}$ enthält also die Eckpunkte des Sechsecks $\mathfrak{S}_{p,q}$ auf seinem Rand. Demnach überdeckt die Gesamtheit dieser Bereiche um die Gitterpunkte der Ebene die ganze Ebene lückenlos.

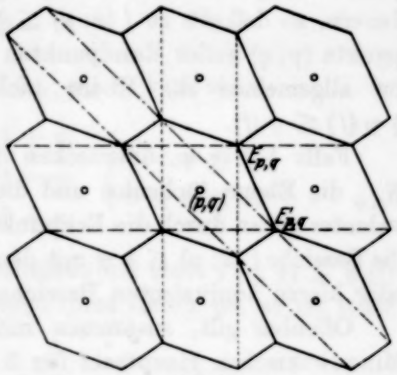

Fig. 2.

Die Forderung, es soll zu jedem Zahlenpaar x, y ganze rationale Zahlen X, Y geben, so daß $f(x+X;\ y+Y) \leqq C^2$, ist gleichbedeutend mit der Forderung: Zu beliebigen Zahlen μ, ν sollen stets kongruente Zahlen x, y, $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu \pmod 1$ vorhanden sein, so daß $f(x;y) \leqq C^2$; d. h. in geometrischer Deutung: Zu jedem Punkt $(\mu;\nu)$ sei ein homologer Punkt im Innern oder auf dem Rand des Bereiches $f(x;y) \leqq C^2$ um 0 gelegen. Diese Forderung erfüllt $f'(x;y) \leqq k(u;v)$. Dabei kann $k(u;v)$ nicht mehr verkleinert werden, da die über die Sechseckseiten hinausragenden Teile des Bereichs stets in den in Fig. 2 eingezeichneten Parallelstreifen verlaufen, also andere Punkte $E_{p,q}$, $E'_{p,q}$ höchstens auf dem Rand, falls drei Eckpunkte von $\mathfrak{S}_{p,q}$ auf einer Geraden liegen, aber nicht im Innern des Bereichs enthalten sein können. Demnach entstehen für $f'(x;y) \leqq t$, $t < k(u;v)$, in der Umgebung der Punkte $E_{p,q}$ Lücken in der Überdeckung der Ebene durch die homologen Bereiche $\mathfrak{F}_{p,q}$. Somit ergibt sich in Verbindung mit Satz 1, zusammen mit Hilfssatz 1, S. 201,

Satz 2. $\varphi(f) = k(u;v)$. [$k(u,v)$ *wurde S. 201 definiert.*]

Reduziert man die Funktionen $f(x;y)$ von (1) weniger stark, läßt man z. B. den Punkt A jede Lage im Dreieck M_1MM_2 oder auf seinem Rand annehmen, so erhält man ebenfalls eine lückenlose Überdeckung der Ebene mit Sechsecken $\mathfrak{S}_{p,q}$ und damit mit homologen Bereichen $\mathfrak{F}_{p,q}$, welche die Ecken

von $\mathfrak{S}_{p,q}$ auf ihren Rändern enthalten und daher nicht verkleinert werden können. In diesem Falle liegen die Parameter der Koordinaten von A, B, C aus (4), S. 201, in den Grenzen

$$(5) \qquad -\tfrac{1}{4} < v \leqq \tfrac{1}{4}; \quad -v \leqq u \leqq \tfrac{1}{4}.^{11})$$

Demnach gelten die Sätze 1 und 2 auch für diese Werte von u und v.

Anmerkung. Hilfssatz 1 von S. 201 gilt offenbar auch für die untere Grenze ψ von Aufgabe (3), S. 200.

Zwischen den unteren Grenzen φ und ψ besteht die Ungleichung

$$(6) \qquad \varphi(f) \geqq \tfrac{1}{2}\,\psi(f),$$

dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, falls die Bereiche $f(x;y) \leqq \varphi(f)$ mit den Bereichen $\mathfrak{S}_{0,0}$ oder dazu äquivalenten identisch sind.

Es enthalten nämlich die Bereiche $f(x;y) \leqq \psi(f)$ außer ihrem Mittelpunkt wenigstens zwei Gitterpunkte auf ihrem Rand, aber keine in ihrem Innern, so daß die zu $f(x;y) \leqq \frac{1}{2}\psi(f)$ homologen Bereiche um die Gitterpunkte $(p;q)$ außer Randpunkten keine weiteren Punkte gemein haben und im allgemeinen die Ebene nicht lückenlos überdecken. Demnach ist $\frac{1}{2}\psi(f) \leqq \varphi(f)$.

Falls $\frac{1}{2}\psi = \varphi$, überdecken die zu $f(x;y) \leqq \frac{1}{2}\psi$ homologen Bereiche $\mathfrak{F}_{p,q}$ die Ebene lückenlos und die Ränder dieser Bereiche oder dazu äquivalenter gehen durch die Eckpunkte eines Sechsecks $\mathfrak{S}_{p,q}$. Es müssen daher die Bereiche $f(x;y) \leqq \frac{1}{2}\psi$ mit den Bereichen $\mathfrak{S}_{0;0}$ mit $0 < v \leqq \frac{1}{4}$, $0 \leqq u \leqq v$ oder hierzu äquivalenten Bereichen identisch sein. W. z. b. w.

Offenbar gilt, zusammen mit dem auf S. 200, Fußnote [4]) erwähnten Minkowskischen Hauptsatz für 2 Dimensionen,

$$(7) \qquad \varphi(f) \geqq \frac{1}{\sqrt{J}} \geqq \tfrac{1}{2}\,\psi(f),$$

wenn J den Flächeninhalt des Bereichs $f(x;y) \leqq 1$ bedeutet, und es gelten beide Gleichheitszeichen stets gleichzeitig.

3.

Nun bestimmen wir mit Hilfe der Sätze 1 und 2 die untere Grenze φ für die Funktionen

$$(8) \qquad \begin{aligned} &f(x;y) = (|\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ &\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ reell}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad p \geqq 1; \end{aligned}$$

dabei sei stets der positive reelle Wert von $|a|^p$ bzw. $|a|^{\frac{1}{p}}$ genommen[12]).

[11]) Falls in (1) S. 199 stets das Kleinerzeichen gilt:

$$-\tfrac{1}{4} < v < \tfrac{1}{4}, \quad -v < u < \tfrac{1}{4}; \text{ ferner } u = v = \tfrac{1}{4}.$$

[12]) Im Zusammenhang mit Aufgabe (3) von S. 200 behandelt Minkowski ebenfalls solche Potenzsummen. Mit Hilfe seines Hauptsatzes für n Dimensionen bestimmt er

$f(x; y) \leqq 1$ definiert dann für $p > 1$ einen konvexen Bereich mit dem Mittelpunkt $0\,(0; 0)$, der durch die affine Transformation $x' = \alpha x + \beta y$; $y' = \gamma x + \delta y$ in $(|x'|^p + |y'|^p)^{\frac{1}{p}} \leqq 1$, also in

$$|x'|^p + |y'|^p \leqq 1 \tag{9}$$

übergeht. Für $p = 1$ ist dieser Bereich in rechtwinkligen $(x'; y')$-Koordinaten ein Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$. Mit wachsendem p nähert er sich immer mehr dem Quadrat um $0: |x'| \leqq 1$, $|y'| \leqq 1$ (vgl. Fig. 3).

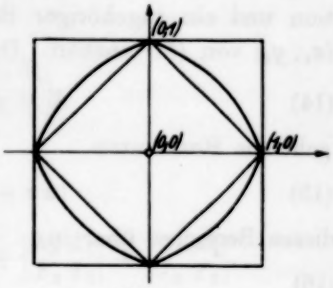

Fig. 3.

Nach Satz 1, S. 201, gibt es zu jeder Funktion $f(x; y)$ von (1) stets eine äquivalente, $f'(x; y)$, und Zahlen u, v, so daß

$$f'(x_1; y_1) = f'(x_2; y_2) = f'(x_3; y_3) = k(u; v), \tag{10}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} + u, & y_1 = \frac{1}{4} + v, \\ x_2 = \frac{3}{4} - u, & y_2 = -\frac{1}{4} - v, \\ x_3 = \frac{1}{4} + u, & y_3 = -\frac{3}{4} + v, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < v \leqq \frac{1}{4}, \\ 0 \leqq u \leqq v, \end{cases} \tag{11}$$

und es ist nach Satz 2 $k(u; v) = \varphi(f)$. Schreiben wir statt $f(x; y) \leqq \varphi(f)$ die Ungleichung $f(x; y)^p \leqq \varphi^p$ und dividieren diese durch φ^p, so ist jeder gesuchte kleinste Bereich einem Bereich

$$|ax + by|^p + |cx + dy|^p \leqq 1 \tag{12}$$

äquivalent, dessen Koeffizienten a, b, c, d die drei Gleichungen erfüllen

$$|ax_i + by_i|^p + |cx_i + dy_i|^p = 1, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{13}$$

mit den Koordinaten $(x_i; y_i)$ von (11).

Wir erhalten also, bis auf äquivalente Funktionen $f(x; y)$, welche ja dieselbe untere Grenze haben, alle kleinsten Bereiche $f(x; y) \leqq \varphi$, wenn wir um $(0; 0)$ auf alle möglichen Arten Bereiche (12) legen, welche die Eckpunkte von $\mathfrak{S}_{0,0}$ auf ihren Rändern enthalten. Nun lassen sich aber die Koeffizienten a, b, c, d, welche die Gleichungen (13) erfüllen, bei beliebigem $p \geqq 1$ und vor-

---

für $\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_{1,\nu} x_1 + \cdots + \alpha_{n,\nu} x_n|^p$, $p \geqq 1$, eine obere Schranke für ψ. Vgl. Geometrie der Zahlen, S. 122. Für $n = 2$, also für die Funktionen (8), stellt er ferner die Aufgabe, das Maximum von ψ für ein bestimmtes p zu ermitteln, löst diese Aufgabe aber nur für $p = 2$ und beschränkt sich für die anderen Werte von p auf eine Vermutung. Diophantische Approximationen, Leipzig u. Berlin, § 14, S. 51–58.

gegebenen x_i, y_i nicht allgemein aus diesen Gleichungen berechnen. Wir schlagen daher, um alle kleinsten Bereiche (12) bis auf äquivalente zu bestimmen, den folgenden Weg ein:

Angenommen, es wäre zu einer gegebenen Potenzsumme $f(x; y) = |\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ schon eine äquivalente Funktion und ein zugehöriger Bereich (12) bekannt, dessen Rand drei Punkte $(x_i; y_i)$ von (11) enthält. Durch die Transformation

$$X = ax + by, \quad Y = cx + dy \tag{14}$$

geht die Randkurve

$$|ax + by|^p + |cx + dy|^p = 1 \tag{15}$$

dieses Bereiches über in

$$|X|^p + |Y|^p = 1, \tag{16}$$

die zugehörigen Punkte $(x_i; y_i)$ in die Punkte $(X_i; Y_i)$. Diese liegen auf der Kurve (16), lassen sich also in der Form darstellen

$$X_i = \frac{s_i}{(|s_i|^p + |t_i|^p)^{\frac{1}{p}}}, \qquad Y_i = \frac{t_i}{(|s_i|^p + |t_i|^p)^{\frac{1}{p}}}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{17}$$

und es besteht nach (14) folgendes Entsprechen:

$$\begin{aligned} X_1 &= a\left(\tfrac{1}{4} + u\right) + b\left(\tfrac{1}{4} + v\right); & Y_1 &= c\left(\tfrac{1}{4} + u\right) + d\left(\tfrac{1}{4} + v\right), \\ X_2 &= a\left(\tfrac{3}{4} - u\right) + b\left(-\tfrac{1}{4} - v\right); & Y_2 &= c\left(\tfrac{3}{4} - u\right) + d\left(-\tfrac{1}{4} - v\right), \\ X_3 &= a\left(\tfrac{1}{4} + u\right) + b\left(-\tfrac{3}{4} + v\right); & Y_3 &= c\left(\tfrac{1}{4} + u\right) + d\left(-\tfrac{3}{4} + v\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Die Determinante der beiden ersten Gleichungen von (18) ist $\Delta = -\left(\frac{1}{4} + v\right)$, also wegen der Bedingungen für v von (11) oder (5), S. 207 bzw. 206, stets $\neq 0$ und man erhält aus den zwei ersten Gleichungspaaren von (18)

$$\begin{aligned} a &= X_1 + X_2; \quad b = U(X_1 - X_2) + V(X_1 + X_2), \\ c &= Y_1 + Y_2; \quad d = U(Y_1 - Y_2) + V(Y_1 + Y_2), \end{aligned} \tag{19}$$

wobei

$$U = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4} + v\right)}, \qquad V = \frac{\frac{1}{4} - u}{\frac{1}{4} + u}.$$

Es müssen nun noch die beiden letzten Gleichungen von (18) gelten, diese liefern mit (19) für U, V die Beziehungen:

$$\begin{aligned} (X_1 - X_2)U + (X_1 + X_2)V &= X_1 - X_3 \\ (Y_1 - Y_2)U + (Y_1 + Y_2)V &= Y_1 - Y_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Daraus läßt sich nun, weil $D = 2(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \neq 0$ wegen der Voraussetzungen für $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$, umgekehrt U, V und damit u, v durch X_i, Y_i $(i = 1, 2, 3)$ ausdrücken:

$$U = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} X_3 X_2 \\ Y_3 Y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 X_1 \\ Y_3 Y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_2 X_1 \\ Y_2 Y_1 \end{vmatrix}},$$

$$V = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} X_3 X_2 \\ Y_3 Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_3 X_1 \\ Y_3 Y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_2 X_1 \\ Y_2 Y_1 \end{vmatrix}}, \tag{21}$$

also

$$u = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} X_3 X_1 \\ Y_3 Y_1 \end{vmatrix} - \frac{1}{4}, \qquad v = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} X_2 X_1 \\ Y_2 Y_1 \end{vmatrix} - \frac{1}{4}, \tag{22}$$

$$D = \begin{vmatrix} X_2 X_1 \\ Y_2 Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 X_1 \\ Y_3 Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 X_2 \\ Y_3 Y_2 \end{vmatrix}.$$

Nunmehr ergibt sich zwischen den a, b, c, d und den zugehörigen X_i, Y_i aus (18) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} a &= X_1 + X_2; \quad b = X_1 - X_3, \\ c &= Y_1 + Y_2; \quad d = Y_1 - Y_3, \end{aligned} \tag{23}$$

und die Transformation (14) läßt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} X &= (X_1 + X_2)\, x + (X_1 - X_3)\, y, \\ Y &= (Y_1 + Y_2)\, x + (Y_1 - Y_3)\, y \end{aligned} \tag{24}$$

mit der Determinante D, die wegen der Voraussetzungen über die Punkte $(x_i; y_i)$ von Null verschieden ist.

Falls also die Randkurve (15) eines kleinsten Bereiches durch drei Punkte $(x_i; y_i)$ von (11) geht, welche durch die Transformation (14) in drei Punkte $(X_i; Y_i)$ übergehen, lassen sich die Koeffizienten a, b, c, d von (14) in dieser Weise durch $(X_i; Y_i)$ von (17) ausdrücken. Die Randkurve (15) lautet dann

$$|(X_1 + X_2)\, x + (X_1 - X_3)\, y|^p + |(Y_1 + Y_2)\, x + (Y_1 - Y_3)\, y|^p = 1. \tag{25}$$

Dabei erfüllen die Größen X_i, Y_i mit (22) die Bedingungen von (11), also

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{D} \begin{vmatrix} X_2 X_1 \\ Y_2 Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{D} \begin{vmatrix} X_3 X_1 \\ Y_3 Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{D} \begin{vmatrix} X_3 X_2 \\ Y_3 Y_2 \end{vmatrix}; \tag{26}$$

$$D = \begin{vmatrix} X_2 X_1 \\ Y_2 Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 X_1 \\ Y_3 Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 X_2 \\ Y_3 Y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Umgekehrt, wenn wir drei Zahlenpaare $(X_i; Y_i)$ von (17) nehmen, welche die Bedingungen (26) erfüllen, so bekommen wir mit (25) für je drei solcher Zahlenpaare einen Bereich (12), dessen Rand durch drei, mit (22) und (11) zu bestimmende Punkte $(x_i; y_i)$ geht. [Dabei können für verschiedene Zahlen-

paare $(X_i; Y_i)$, $i = 1, 2, 3$, welche die Bedingungen (26) erfüllen, sich gleiche Werte u, v und damit gleiche Punktetripel $(x_i; y_i)$ ergeben, also durch diese Punkte verschiedene Kurven (25) gehen.] Nach dem Vorhergehenden erhalten wir auf diese Weise auch alle Bereiche $|ax + by|^p + |cx + dy|^p \leqq 1$, deren Ränder drei Punkte $(x_i; y_i)$ von (11) enthalten.

Bezeichnen wir $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ als die „Determinante" der Funktion $F(x; y) = |\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p$, so bleibt der Absolutbetrag dieser Determinante bei unimodularen Transformationen ungeändert. Äquivalente Funktionen $F(x; y)$ haben also denselben Absolutbetrag der Determinante. Durch Division mit $\left(\text{Abs} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}\right)^{\frac{p}{2}}$ läßt sich stets erreichen, daß die Determinante den Absolutbetrag 1 hat. Der Wert der Determinante kann dann stets gleich 1 angenommen werden.

Zusammenfassend ergibt sich aus dem Vorigen mit Hilfssatz 1, Satz 1 und Satz 2:

Satz 3. *Jede Funktion*

$$F(x; y) = |\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p, \quad p \geqq 1,$$

mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *ist äquivalent einer Funktion der Gestalt*

$$(27) \qquad \frac{1}{|D|^{\frac{p}{2}}}\left(|(X_1 + X_2)x + (X_1 - X_3)y|^p + |(Y_1 + Y_2)x + (Y_1 - Y_3)y|^p\right),$$

dabei ist

$$X_i = \frac{s_i}{(|s_i|^p + |t_i|^p)^{\frac{1}{p}}}, \qquad Y_i = \frac{t_i}{(|s_i|^p + |t_i|^p)^{\frac{1}{p}}}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$D = \begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ Y_3 & Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 & X_2 \\ Y_3 & Y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

und

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ Y_3 & Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}.$$ [13])

Da man auch mit den Bedingungen (5) von S. 206 Sechsecke $\mathfrak{S}_{p,\eta}$ erhält und die Bereiche $F(x; y) \leqq k(u; v)$, welche die Eckpunkte von $\mathfrak{S}_{0,0}$ auf ihrem Rand enthalten, nicht verkleinert werden können, so ergibt sich mit diesen weniger engen Bedingungen

---

[13]) Nach Satz 1, Fußnote, kommt

$$\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ Y_3 & Y_1 \end{vmatrix} < \frac{1}{2}$$

Satz 3a. *Unter den Bedingungen*

$$(23^{14}) \quad 0 < \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ Y_3 & Y_1 \end{vmatrix} \leqq \frac{1}{2}; \quad D \neq 0,$$

gibt es zu beliebigen reellen Zahlen x, y stets ganze rationale Zahlen X, Y, so daß

$$(29) \quad |(X_1 + X_2)(x + X) + (X_1 - X_3)(y + Y)|^p + \\ + |(Y_1 + Y_2)(x + X) + (Y_1 - Y_3)(y + Y)|^p \leqq 1.$$

Die Schranke 1 *kann nicht verkleinert werden und das Gleichheitszeichen wird dabei benötigt für*

$$x \equiv \varepsilon x_1 = \varepsilon \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ Y_3 & Y_1 \end{vmatrix}, \quad y \equiv \varepsilon y_1 = \varepsilon \frac{1}{D}\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix} \pmod 1, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Es gilt also für die Funktionen $F(x; y)$ von (27)

$$\varphi(F) = \frac{1}{|D|^{\frac{p}{2}}}.$$

Zusammen mit Hilfssatz 1 und Satz 3 ist somit durch Satz 3a für jede Funktion $F(x; y)$ und damit für $f(x; y)$ von (8), S. 206, die untere Grenze φ bestimmt[15]).

Anmerkung. Die zu Satz 3 führenden Überlegungen ergeben:

Jede indefinite quadratische Form $(ax + by)(cx + dy)$ der Determinante ± 1 ist nach Multiplikation mit ± 1 einer Form der Gestalt

$$\frac{1}{|D|}[(X_1 + X_2)x + (X_1 - X_3)y]\ [(Y_1 + Y_2)x + (Y_1 - Y_3)y]$$

äquivalent; dabei haben die X_i, Y_i dieselbe Bedeutung wie in Satz 3 und genügen den dort angegebenen Bedingungen. Für $p = 1$ folgt nun aus Satz 3a, da das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen höchstens so groß ist wie

---

[14]) Hier kommen die Fälle, in denen in den einen Ungleichungen das Gleichheitszeichen angenommen wird, in den anderen das Kleinerzeichen, nur für $p = 1$ in Frage.

[15]) Falls es gelänge, ebenso im Falle $0 < p < 1$ für die Funktionen (8) von S. 206 die untere Grenze φ allgemein als Funktion von p zu bestimmen, ließe sich durch den Grenzübergang

$$\lim_{p \to 1} \left(\frac{|\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}} = |\alpha x + \beta y|\,|\gamma x + \delta y|$$

die schwierige Aufgabe lösen, für binäre indefinite quadratische Formen die untere Grenze φ allgemein zu bestimmen.

Die in Satz 4 der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit angegebenen Schranken liefern (Satz 5) für unendlich viele Klassen solcher Formen die untere Grenze.

das arithmetische: Es gibt zu beliebigen reellen Zahlen x, y stets ganze rationale Zahlen X, Y, so daß

$$|(X_1 + X_2)(x + X) + (X_1 - X_3)(y + Y)| \times$$
$$\times |(Y_1 + Y_2)(x + X) + (Y_1 - Y_3)(y + Y)| \leqq \frac{1}{4}.$$

Man erhält somit zu jeder indefiniten quadratischen Form $(ax + by)(cx + dy)$ eine obere Schranke für φ. Diese Schranke liefert für $|D| > 1$ bessere, für $|D| = 1$ gleich gute und für $|D| < 1$ schlechtere Werte als die MINKOWSKIsche Schranke[16]).

Für $p = 2$ erhält man aus Satz 3 und Satz 3a mit $X_i = \sin \alpha_i$, $Y_i = \cos \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, da sich jede positiv definite binäre quadratische Form in der Gestalt darstellen läßt $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2$, nach einiger Umformung:

Jede quadratische Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ der Diskriminante $ac - b^2 = 1$ ist einer der folgenden Formen äquivalent

$$(30) \quad \frac{1}{|R|}\left(x^2 \cos^2 \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} + 2xy \cos \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2} + \right.$$
$$\left. + y^2 \sin^2 \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\right)$$

mit

$$R = \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2} \neq 0$$

und den Bedingungen

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < \bar{u} < 1, \quad \frac{1}{2} \leqq \bar{v} \leqq \bar{u}, \\ \text{ferner für} \\ \bar{u} = \bar{v} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

wobei

$$(32) \quad \bar{u} = \frac{\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}}, \qquad \bar{v} = \frac{\cos \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}}.$$

Es gilt somit für die Formen (30):

$$\varphi = \frac{1}{4|R|}.$$ [17])

---

[16]) Diophantische Approximationen, § 11, S. 42–47.

[17]) Dieses Ergebnis, das wir hier als Spezialfall erhalten, wurde in etwas anderer Form ebenfalls in der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit abgeleitet. Aus den mit (26) gleichwertigen Bedingungen für U, V von (21), S. 209, $1 \leqq U < 2$, $U - 1 \leqq V \leqq \frac{U}{2}$ folgt zusammen mit $X_2 Y_1 - X_1 Y_2 \neq 0$ in einfacher Weise, daß die Bedingungen des Ergebnisses von S. 665 der obigen Arbeit erfüllt sind. Man erhält aus diesem nach elementaren Umformungen wieder $\varphi = \frac{1}{4|R|}$.

Hier ist für die Formen $F(x; y)$ von (30) in $F(x + X; y + Y)$ das Gleichheitszeichen notwendig für die Werte

$$(33)\qquad \left.\begin{aligned} x &\equiv \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}} \\ y &\equiv \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}} \end{aligned}\right\} \pmod 1, \qquad \varepsilon^2 = 1.$$

Schließlich betrachten wir noch die Linearformen reeller x, y

$$(34)\qquad ax + by$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten, $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$, wobei wir stets $|a_1 b_2 - a_2 b_1| = 1$ voraussetzen können, gegebenenfalls nach Division mit $\sqrt{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}$.

Das Quadrat des Absolutbetrages $|ax + by|$ ist dann eine positiv definite quadratische Form mit reellen Koeffizienten und ist daher einer Form von der Gestalt (27) von Satz 3, S. 210, für $p = 2$ äquivalent. Setzen wir dort wieder $X_i = \sin\alpha_i$, $Y_i = \cos\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, so können wir (27) in der Gestalt schreiben

$$(35)\qquad \begin{gathered} \frac{1}{K}\left|(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2})\,x + (e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_3})\,y\right| \\ K = 2\left|\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \neq 0. \end{gathered}$$

Jeder Betrag von (34) ist einer der Formen (35) mit den Bedingungen (31) äquivalent. Unter diesen Bedingungen oder unter den weniger engen, aus (28), S. 211, folgenden Bedingungen

$$(36)\qquad \begin{gathered} 0 < \bar{u} < 1, \quad 1 - \bar{u} < \bar{v} < 1; \\ \text{ferner für} \qquad \bar{u} = \bar{v} = 1 \qquad \text{mit } \bar{u}, \bar{v} \text{ von (32)}, \end{gathered}$$

gibt es nach Satz 3a zu beliebigen reellen Zahlen x, y stets ganze rationale Zahlen X, Y, so daß

$$(37)\qquad |(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2})(x + X) + (e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_3})(y + Y)| \leqq 1.$$

Die Schranke 1 kann nicht verkleinert werden; dabei wird das Gleichheitszeichen benötigt für die Zahlenpaare (33).

Schreiben wir die linke Seite von (37) in der Form

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)(X + x) + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3)(Y + y) + \\ &+ i\,[(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)(X + x) + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3)(Y + y)] \\ = &(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) X + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) Y + c_1 + \\ &+ i\,[(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) X + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) Y + c_2],\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\, x + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3)\, y &= c_1, \\ (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\, x + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3)\, y &= c_2,\end{aligned}$$

so lassen sich, da die Determinante dieses Gleichungssystems in x, y gleich $-D$ von Satz 3, also $\neq 0$ ist, zu beliebigen reellen Zahlen c_1, c_2, Zahlen x, y bestimmen.

Wir erhalten demnach folgenden Satz über inhomogene Linearformen reeller Veränderlicher mit komplexen Koeffizienten:

Satz 4. *Durch eine unimodulare Transformation läßt sich jeder Absolutbetrag einer Linearform reeller Veränderlicher x, y*

$$|ax + by + c|, \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$$

überführen in

$$\frac{1}{K}\left|(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2})\, x + (e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_3})\, y + c\right|$$

$$K = 2\left|\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}\right|^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

mit den Nebenbedingungen (31). *Hierfür oder mit den weniger engen Bedingungen* (36) *gibt es zu beliebigem $c = c_1 + ic_2$ stets ganze rationale Zahlen X, Y, so daß*

$$|(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2})\, X + (e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_3})\, Y + c| \leqq 1.$$

Die Schranke 1 *kann nicht mehr verkleinert werden; das Gleichheitszeichen ist dabei notwendig für*

$$c = \mu_1 (e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}) + \nu_1 (e^{i\alpha_1} - e^{i\alpha_3}),$$

$$\mu_1 \equiv \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}}, \quad \nu_1 \equiv \varepsilon\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}} \pmod 1, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

(Eingegangen am 16. November 1940.)

Zur Relativ-Geometrie ebener Kurven.

Von

H. Gericke, Freiburg i. Br.

Das Neue, das diese Arbeit bringen will, besteht nicht in den Ergebnissen[1]), sondern in dem Wege zu diesen. Wie man in der „gewöhnlichen" Geometrie stützbarer Kurven oft mit Vorteil die Stützfunktion h als Funktion des Tangentenwinkels φ oder, was dasselbe ist, der Bogenlänge des Normalenbildes benutzt, so führe ich eine relative (R-) Stützfunktion $\varkappa$ ein und benutze als Parameter die R-Bogenlänge ψ der „Eichkurve", d. h. des R-Normalenbildes. An die Stelle der Fourier-Entwicklung von $h(\varphi)$ tritt eine Entwicklung von $\varkappa(\psi)$ nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$(c(x) \cdot y')' + \lambda y = 0,$$

aus der weitgehend die gleichen Ergebnisse zu gewinnen sind. Ich nenne den Isoperimetriebeweis von Hurwitz[2]), eine Abschätzung des isoperimetrischen Defizits von Dinghas[3]), sowie die Deutung der Reihenentwicklung als Basisdarstellung und Kennzeichnung der Basisbereiche durch eine Extremaleigenschaft von Görtler[4]).

§ 1.

Definitionen und Formeln.

1. Zwei Kurven, $\mathfrak{x}(\varphi)$, $\mathfrak{e}(\varphi)$, seien durch parallele Normalen aufeinander bezogen. In entsprechenden Punkten sei φ der Winkel der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$ ($\mathfrak{n}^2 = 1$) mit einer festen Richtung:

$$\mathfrak{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi). \tag{1}$$

Die Stützfunktion der Kurve $\mathfrak{x}$ sei

$$h(\varphi) = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}, \tag{2}$$

[1]) Vgl. insbesondere W. Süss, Zur relativen Differentialgeometrie: I. Über Eilinien und Eiflächen in der elementaren und affinen Differentialgeometrie. Jap. J. Math. **4** (1927), S. 57.

[2]) Sur quelques applications geometriques des séries de Fourier. Ann. Ec. norm. Sup. (3) **19** (1902), S. 357.

[3]) Geometrische Anwendungen der Kugelfunktionen. Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Neue Folge, Bd. 1 (1940), Nr. 18.

[4]) Erzeugung stützbarer Bereiche. I. Deutsche Math. **2** (1937), S. 454.

die der Eichkurve $\mathfrak{e}$ sei

$$k(\varphi) = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{n}. \tag{3}$$

$\mathfrak{e}$ tritt im folgenden an die Stelle der Normalen $\mathfrak{n}$ und heißt auch R-Normale.

2. Wir führen eine R-Bogenlänge ein, indem wir in der gewöhnlichen Definition der Bogenlänge $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{e}$ ersetzen. Die gewöhnliche Bogenlänge ist

$$s = \int \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}\, d\varphi.$$

Dabei bedeutet der Punkt die Ableitung nach φ; φ könnte hier einen beliebigen Parameter bedeuten, wovon auch Gebrauch gemacht wird.

Da $\mathfrak{n}$ der zu $\dot{\mathfrak{x}}$ senkrechte Einheitsvektor ist, kann

$$\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2} = (\mathfrak{n}, \dot{\mathfrak{x}})$$

gesetzt werden. Hiernach wird als R-Bogenlänge von $\mathfrak{x}$ definiert

$$\sigma = \int (\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{x}})\, d\varphi. \tag{4}$$

Als R-Bogenlänge von $\mathfrak{e}$ definieren wir entsprechend

$$\psi = \int (\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})\, d\varphi. \tag{5}$$

ψ könnte R-Winkel genannt werden.

3. Ableitung nach der Bogenlänge. $'$ bedeute Ableitung nach der jeweils zugehörigen gewöhnlichen Bogenlänge.

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma} = \mathfrak{x}' \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\mathfrak{x}'}{(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}')},$$

$$\frac{d\mathfrak{e}}{d\psi} = \mathfrak{e}' \frac{ds(\mathfrak{e})}{d\psi} = \frac{\mathfrak{e}'}{(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}')}.$$

Da $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{x}'$ parallele Einheitsvektoren sind, ist also

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma} = \frac{d\mathfrak{e}}{d\psi}.$$

Ich bilde weiter

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{d\sigma^2} = \frac{1}{(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}')^3} [\mathfrak{x}'' \cdot (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}') - \mathfrak{x}' \cdot (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}'')].$$

Nun ist $(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}') = \mathfrak{n}\mathfrak{e}$, $(\mathfrak{e}, \mathfrak{n}) = -\mathfrak{x}'\mathfrak{e}$, und wenn $r(\mathfrak{x})$ der gewöhnliche Krümmungsradius ist, $\mathfrak{x}'' = -\frac{1}{r}\mathfrak{n}$. Also ist, nach Berücksichtigung von (3)

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r(\mathfrak{x}) \cdot k^3}\mathfrak{e}. \tag{6}$$

Diese Gleichung tritt an die Stelle der Frenetschen Gleichung: Für $\mathfrak{e}$ ist ebenso

$$\frac{d^2\mathfrak{e}}{d\psi^2} = \frac{1}{r(\mathfrak{e}) \cdot k^3}\mathfrak{e}. \tag{7}$$

Ich bezeichne die Ableitung nach ψ durch ^{0}. Dann kann man schreiben

$$\frac{d^3\mathfrak{x}}{d\sigma^3} = \frac{r(\mathfrak{e})}{r(\mathfrak{x})} \cdot \mathfrak{e}^{00} = \frac{1}{\varrho}\,\mathfrak{e}^{00}. \tag{8}$$

$$\frac{r(\mathfrak{x})}{r(\mathfrak{e})} = \varrho \text{ heiße } R\text{-Krümmungsradius.} \tag{9}$$

4. Für den gewöhnlichen Krümmungsradius gilt $r = \frac{ds}{d\varphi}$. Man rechnet leicht nach, daß hier die entsprechende Gleichung gilt

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\psi}. \tag{10}$$

Ich notiere noch für späteren Gebrauch

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = k \cdot r(\mathfrak{e}) \tag{11}$$

und die aus (5) folgende Gleichung

$$(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}^0) = 1.$$

§ 2.

R-Kreise.

1. $\mathfrak{x}$ heißt R-Kreis, wenn $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{e}$ homothetisch ist, d. h. wenn nach einer geeigneten Parallelverschiebung

$$h = \lambda \cdot k, \qquad \lambda = \text{const} \tag{1}$$

gilt Daraus folgt wegen (1, 2), (1, 3) da n alle Richtungen durchläuft,

$$\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{e} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x} - \lambda\mathfrak{e} = 0, \tag{2}$$

d. h. die R Normalen gehen alle durch einen festen Punkt.

2. Ist L der R-Umfang des R-Kreises, $2p$ der R-Umfang von $\mathfrak{e}$, so folgt aus (1, 4)

$$L = 2p\lambda.$$

3. Aus (1, 10) folgt für R-Kreise

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\psi} = \frac{\lambda(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})}{(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})} = \lambda = \text{const.}$$

Umgekehrt ist $\varrho = \text{const}$ kennzeichnend für R-Kreise; denn wenn

$$(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{x}}) = \lambda(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}) \quad \text{und} \quad \lambda = \text{const}$$

ist, so ist, da $\mathfrak{x}$ parallel $\dot{\mathfrak{e}}$ ist,

$$\dot{\mathfrak{x}} = \lambda\dot{\mathfrak{e}}$$

und durch Integration folgt

$$\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{e} + \mathfrak{k},$$

und das ist bis auf den konstanten Vektor $\mathfrak{k}$, der eine Parallelverschiebung bedeutet, die Gleichung (2).

4. Der Satz vom Zentriwinkel lautet hier so: Bei R-Kreisen gehören zu gleichen R-Winkeln gleiche R-Bögen. Mit anderen Worten: Für beliebige Werte von $\Delta\psi$ ist

$$\Delta\sigma = \int_{\psi_0}^{\psi_0+\Delta\psi} (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}^0)\, d\psi \tag{3}$$

unabhängig von ψ_0.

Beweis. Aus (2) und $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}^0) = 1$ folgt $\Delta\sigma = \lambda\Delta\psi$.

Auch diese Eigenschaft ist kennzeichnend für R-Kreise. Ist nämlich (3) unabhängig von ψ_0, so folgt durch Ableitung nach ψ_0

$$(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}^0)_{\psi_0+\Delta\psi} - (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}^0)_{\psi_0} = 0,$$

und da das für beliebiges $\Delta\psi$ gelten soll,

$$(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}^0) = \frac{d\sigma}{d\psi} = \varrho = \text{const}$$

und dadurch waren nach Nr. 3 R-Kreise gekennzeichnet.

§ 3.

R-Stützfunktion.

1. Die gewöhnliche Stützfunktion ist

$$h = \mathfrak{x}\mathfrak{n} = (\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{n}}). \tag{1}$$

Ähnlich dazu definiere ich als R-Stützfunktion

$$\varkappa = (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}^0). \tag{2}$$

Ich will $\varkappa$ durch h und k ausdrücken. $\mathfrak{e}^0$ ist parallel zu $\dot{\mathfrak{n}}$, ich setze

$$\mathfrak{e}^0 = e \cdot \dot{\mathfrak{n}}. \tag{3}$$

Aus $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}^0) = 1$ folgt

$$e = \frac{1}{(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{n}})} = \frac{1}{\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}} = \frac{1}{k}.$$

Trägt man dies in (3) und weiter in (2) ein, so erhält man

$$\varkappa = \frac{h}{k}. \tag{4}$$

2. Darstellung von $\mathfrak{x}$ durch die R-Stützfunktion. Durch die gewöhnliche Stützfunktion wird $\mathfrak{x}$ so dargestellt:

$$\mathfrak{x} = h \cdot \mathfrak{n} + \dot{h}\,\dot{\mathfrak{n}}. \tag{5}$$

Ich will diese Darstellung im Koordinatensystem $\mathfrak{n}$, $\dot{\mathfrak{n}}$ durch eine Darstellung im Koordinatensystem $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}^0$ ersetzen. Die Transformationsgleichungen sind

$$\mathfrak{e} = k \cdot \mathfrak{n} + \dot{k} \cdot \dot{\mathfrak{n}},$$

$$\mathfrak{e}^0 = \frac{1}{k}\,\dot{\mathfrak{n}}.$$

Löst man diese nach $\mathfrak{n}$ und $\dot{\mathfrak{n}}$ auf und trägt das Ergebnis in (5) ein, so erhält man unter Benutzung von (1, 11) und der Abkürzung

$$k^3 \cdot r(\mathfrak{e}) = c: \tag{6}$$

$$\mathfrak{x} = \varkappa \mathfrak{e} + c \varkappa^0 \mathfrak{e}^0. \tag{7}$$

$\mathfrak{x}$ ist hiermit nicht durch die R-Größen allein, sondern nur durch diese in Verbindung mit den absoluten Größen der Eichkurve dargestellt.

3. Der R-Flächeninhalt wird als identisch mit dem gewöhnlichen Flächeninhalt definiert. Man erhält mittels (1, 11)

$$F = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} h \cdot r(\mathfrak{x})\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_0^{2p} \varkappa \varrho\, d\psi. \tag{8}$$

Der R-Krümmungsradius drückt sich durch die R-Stützfunktion so aus: Es ist

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\psi} = (\mathfrak{e}, \mathfrak{x}^0)$$

und mittels (7) und $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}^{00}) = 0$, $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}^0) = 1$ erhält man

$$\varrho = \varkappa + (c \varkappa^0)^0. \tag{9}$$

Daraus folgt für den R-Umfang L von $\mathfrak{x}$, wenn $2p$ der R-Umfang von $\mathfrak{e}$ ist,

$$L = \int_0^{2p} \varkappa\, d\psi. \tag{10}$$

§ 4.

Die Ellipse als Eichkurve.

1. Gleichung (3, 7) legt nahe, solche Eichkurven auszuzeichnen, für die

$$c = r \cdot k^3 = \text{const} \tag{1}$$

ist. Aus Sätzen der Affingeometrie ergibt sich, daß dadurch Ellipsen gekennzeichnet sind. Nach W. Blaschke[5]) ist nämlich

$$K = k^3 (k + \ddot{k}) = k^3 r$$

die Affinkrümmung einer Kurve, deren Affinkrümmungsbild die Stützfunktion k hat. Soll also $c = \text{const}$ sein, so muß $\mathfrak{e}$ das Affinkrümmungsbild einer Kurve konstanter Affinkrümmung sein. Konstante Affinkrümmung haben aber unter den Eilinien nur die Ellipsen, und deren Affinkrümmungsbilder sind wieder die Ellipsen.

[5]) Vorlesungen über Differentialgeometrie. II. (1923), § 14, (158).

2. Ich berechne die in Frage kommenden Größen für die Ellipse

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} &= (a \cdot \cos\tau,\ b \cdot \sin\tau), \\ \dot{\mathfrak{e}} &= (-a \cdot \sin\tau,\ b \cdot \cos\tau), \\ \ddot{\mathfrak{e}} &= (-a \cdot \cos\tau,\ -b \cdot \sin\tau). \end{aligned} \tag{2}$$

Es ist

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{\mathfrak{e}}^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2\tau + b^2 \cdot \cos^2\tau}.$$

Die Stützfunktion von $\mathfrak{e}$ ist

$$k = \mathfrak{e}\,\mathfrak{n} = (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}') = \frac{(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})}{\dot{s}} = \frac{a \cdot b}{\dot{s}}.$$

Ferner ist

$$r = \frac{\dot{s}^3}{a\,b}, \quad \text{also} \quad c = (a\,b)^2. \tag{3}$$

Die R-Bogenlänge von $\mathfrak{e}$ ist bei geeigneter Festlegung des Anfangs der ψ- und der τ-Zählung

$$\psi = \int_0^\tau (\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})\, dt = ab\,\tau; \tag{4}$$

d. h. *die R-Bogenlänge der Ellipse als Eichkurve ist bis auf den Faktor $a \cdot b$ die Bogenlänge des Kreises, aus dem die Ellipse durch die affine Transformation $\bar{x} = ax$, $\bar{y} = by$ hervorgeht.*

Ich normiere durch ähnliche Vergrößerung so, daß $a \cdot b = 1$ wird. Dann wird $c = 1$, $\tau = \psi$, und der R-Umfang der Ellipse gleich 2π.

3. Bei dieser Normierung ist

$$\dot{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}^0(\psi) = \mathfrak{e}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Nun ist die Richtung der Tangente im Endpunkt eines Durchmessers zu diesem konjugiert, d. h. $\mathfrak{e}(\psi)$ ist konjugiert zu $\dot{\mathfrak{e}}(\psi)$, also nach (5) zu $\mathfrak{e}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)$, d. h. *konjugierte Durchmesser teilen den R-Umfang der Eichellipse in vier gleiche Teile.*

4. Eichkurve sei die normierte Ellipse, $c = 1$. Entwickelt man $\varkappa$ in eine Fourier-Reihe

$$\varkappa = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{i n \psi}, \quad \alpha_{-n} = \bar{\alpha}_n, \tag{6}$$

so lassen sich eine Reihe von Aussagen der gewöhnlichen Theorie stützbarer Bereiche, die auf dieser Darstellung beruhen, auf die R-Geometrie übertragen.

Das gilt z. B. für den HURWITZschen Beweis für die Isoperimetrie des Kreises, den ich im folgenden Paragraphen allgemeiner durchführe. Die einzelnen Glieder der FOURIER-Reihe lassen sich nach GÖRTLER [a. a. O.⁴)] als Stützfunktionen von Basisbereichen deuten, aus denen alle stützbaren Bereiche additiv aufgebaut werden können. Es soll gezeigt werden: Die Basisbereiche lassen sich durch Abrollen zweier R-Kreise aufeinander erzeugen.

Wenn ich einen Vektor, z. B. $\mathfrak{e} = (e_1, e_2)$, durch eine komplexe Zahl darstelle, bezeichne ich ihn durch den entsprechenden griechischen Buchstaben, also im Beispiel $\varepsilon = e_1 + ie_2$. Also schreibe ich jetzt die Gleichung der Eichellipse in der Form

$$\varepsilon = a \cdot \cos\psi + ib \cdot \sin\psi = \frac{a+b}{2} e^{i\psi} + \frac{a-b}{2} e^{-i\psi}. \tag{7}$$

Der Basisbereich n-ter Ordnung hat die Stützfunktion

$$\varkappa_n = \alpha_n e^{in\psi} + \bar{\alpha}_n e^{-in\psi},$$

er wird beschrieben durch den Vektor

$$\xi_n = \varkappa_n \varepsilon + \varkappa_n^0 \varepsilon^0.$$

Man rechnet leicht aus

$$\xi_n = (1-n)\left[\alpha_n \frac{a+b}{2} e^{i(n+1)\psi} + \bar{\alpha}_n \frac{a-b}{2} e^{-i(n+1)\psi}\right] + (1+n)\left[\bar{\alpha}_n \frac{a+b}{2} e^{i(n-1)\psi} + \alpha_n \frac{a-b}{2} e^{-i(n-1)\psi}\right]. \tag{8}$$

Vergleich mit (7) zeigt, daß jede eckige Klammer einen (vielleicht gedrehten) R-Kreis darstellt. Um das noch etwas deutlicher zu machen, setze ich in der ersten Klammer

$$\alpha_n = |\alpha_n| \cdot e^{i(n+1)\omega},$$

dann wird die erste Klammer

$$|\alpha_n| \cdot \left[\frac{a+b}{2} e^{i(n+1)(\psi+\omega)} + \frac{a-b}{2} e^{-i(n+1)(\psi+\omega)}\right];$$

in dieser Form ist die Übereinstimmung mit (7) noch etwas besser zu sehen. Also: *Der Basisbereich ξ_n entsteht, indem ein Punkt sich auf dem Umfang eines R-Kreises vom R-Radius $(1-n)\cdot|\alpha_n|$ bewegt, während sich der Mittelpunkt dieses R-Kreises gleichzeitig auf einem R-Kreis mit dem R-Radius $(1+n)\cdot|\alpha_n|$ bewegt.*

5. *Die ersten Basisbereiche.*

$\mathfrak{x}_0$, der Bereich mit der R-Stützfunktion $\xi = \alpha_0 = \text{const}$ ist ein R-Kreis.

$\mathfrak{x}_1$ ist ein Punkt; aus (8) folgt nämlich

$$\xi_1 = \bar{\alpha}_1 \cdot (a+b) + \alpha_1 \cdot (a-b) = \text{const}.$$

Bei einem beliebigen stützbaren Bereich $\mathfrak{x}$ bezeichnet α_1 den R-Krümmungsschwerpunkt; nämlich: der Vektor zum Krümmungsschwerpunkt ist (Integrale umlaufen stets die ganze Kurve)

$$\mu = \frac{\int \xi \frac{1}{\varrho}\, d\sigma}{\int \frac{1}{\varrho}\, d\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int \xi\, d\psi.$$

Hier ist nach (8)

$$\xi = \sum_0^\infty \xi_n$$

einzutragen, und man erhält

$$\mu = \xi_1 = \bar{\alpha}_1 \cdot (a + b) + \alpha_1 \cdot (a - b).$$

$\alpha_1 = 0$ bedeutet also, daß der R-Krümmungsschwerpunkt der Nullpunkt ist.

6. Wörtlich wie in einer früheren Arbeit[6]) schließe ich: Unter allen Achsen einer festen Richtung $\mathfrak{g}$, ($\mathfrak{g}^2 = 1$) liefert die durch den Krümmungsschwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment

$$T_0 = \int [\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{g})^2]\, d\psi.$$

Dabei ist die Kurve mit Masse von der Dichte $\frac{1}{\varrho}$ belegt.

Ich frage weiter nach Su-Ovalen, d. h. nach solchen Kurven, für die die R-Trägheitsachsen beim Übergang zu R-Parallelbereichen ungeändert bleiben. Man erhält wie a. a. O.[6]) Nr. 6 als Bestimmungsgleichungen für die Komponenten von $\mathfrak{g}$

$$(B_{11} + t)\, g_1 + B_{12}\, g_2 = 0,$$
$$B_{21}\, g_1 + (B_{22} + t)\, g_2 = 0.$$

Dabei ist

$$B_{ik} = \int x_i x_k\, d\psi.$$

Man drehe nun das Koordinatensystem so, daß die Trägheitsachsen Koordinatenachsen werden, d. h. daß $B_{12} = B_{21} = 0$ wird.

Der Parallelbereich sei

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + r\,\mathfrak{e},$$

es sei

$$C_{ik} = \int y_i y_k\, d\psi.$$

Damit auch für $\mathfrak{y}$ die Koordinatenachsen Trägheitsachsen sind, muß $C_{12} = 0$ sein. Nun ist

$$C_{12} = B_{12} + r\int (x_1 e_2 + x_2 e_1)\, d\psi + r^2 \int e_1 e_2\, d\psi.$$

---

[6]) Gericke, Stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen. Math. Zeitschr. **46**, Nr. 5, S. 58.

Ich berechne die beiden Integrale; es ist

$$e_1 = a \cdot \cos \psi, \quad e_2 = b \cdot \sin \psi.$$

Daraus folgt

$$\int e_1 e_2 \, d\psi = 0.$$

Es ist

$$x_i = \varkappa e_i + \varkappa^0 e_i^0.$$

Für $\varkappa$ benutze ich jetzt die reelle Fourier-Darstellung

$$\varkappa = \sum_0^\infty (a_n \cdot \cos n + b_n \cdot \sin n \, \psi).$$

Daraus erhält man $(a \cdot b = 1)$

$$x_1 e_2 + x_2 e_1 = \varkappa \cdot \sin 2 \, \psi + \varkappa^0 \cdot \cos 2 \, \psi,$$

$$\int (x_1 e_2 + x_2 e_1) \, d\psi = 3 \pi b_2.$$

Also wenn nach der oben ausgeführten Drehung $b_2 = 0$ ist, liegt ein Su-Oval vor. Das b_2 nach der Drehung ist aber eine Linearkombination der vor der Drehung vorhandenen Koeffizienten a_2, b_2; also liegt jedenfalls dann ein Su-Oval vor, wenn für die ursprünglichen Fourier-Koeffizienten

$$a_2 = b_2 = 0$$

gilt.

§ 5.

Eine allgemeinere Reihenentwicklung.

1. Veranlaßt durch die Form der Gleichung (3, 9)

$$\varrho = \varkappa + (c \varkappa^0)^0,$$

lege ich die Differentialgleichung

$$(1) \qquad (c(\psi) \cdot y^0)^0 + \lambda y = 0$$

mit den Randbedingungen

$$y(2p) = y(0), \quad y^0(2p) = y^0(0)$$

zugrunde. Dabei sind c und p durch die Eichkurve bestimmt. Sie habe die Eigenwerte λ_n und die Eigenfunktionen X_n, $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$. Die Eigenwerte sind einfach oder zweifach und lassen sich so anordnen, daß $\lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \cdots$ ist. Zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen sind orthogonal, d. h.

$$(2) \qquad \int X_n X_m d\psi = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m.$$

und die zu einem zweifachen Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen lassen sich orthogonalisieren. Es kann also für zwei verschiedene Eigenfunktionen stets (2) vorausgesetzt werden.

Mit X_n ist auch const $\cdot X_n$ Lösung von (1) zum gleichen Eigenwert. Also kann jedes X_n so normiert werden, daß

$$\int X_n^2 \, d\psi = 2p \tag{3}$$

ist. Hier und im folgenden sind alle Integrale von 0 bis $2p$ zu erstrecken, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben.

(1) genügt den Voraussetzungen dafür, daß kein Eigenwert negativ ist. $\lambda_0 = 0$ ist Eigenwert; denn

$$(c \cdot y^0)^0 = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = A \cdot \int_0^\psi \frac{1}{c} \, d\psi + B,$$

und aus den Randbedingungen folgt $A = 0$, wenigstens für konvexe Eichkurven ($c = r \cdot k^3 > 0$). Also $\lambda_0 = 0$ ist einfacher Eigenwert, zu ihm gehört die Eigenfunktion $X_0 = \text{const}$ und wegen der Normierung (3)

$$X_0 = 1. \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt noch

$$\int X_n \, d\psi = 0 \quad \text{für } n > 0, \tag{5}$$

was auch aus (1) unter Berücksichtigung der Randbedingungen abgelesen werden kann.

2. Ich entwickle nun die R-Stützfunktion $\varkappa$ nach den Eigenfunktionen

$$\varkappa = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n. \tag{6}$$

Dann ist nach (3, 9)

$$\varrho = \varkappa + (c\varkappa^0)^0 = \sum_0^\infty a_n \left[X_n + (c\, X_n^0)^0\right] = \sum_0^\infty (1 - \lambda_n)\, a_n\, X_n. \tag{7}$$

Nach (3, 10) ist

$$L = \int \varkappa \, d\psi = 2\, p a_0. \tag{8}$$

Nach (3, 8):

$$F = \tfrac{1}{2} \int \varkappa \varrho \, d\psi = p \cdot \sum_0^\infty (1 - \lambda_n)\, a_n^2. \tag{9}$$

3. Ich betrachte die Stützfunktion eines Punktes. Für einen Punkt ist

$$\mathfrak{r}^0 = (\varkappa + (c\varkappa^0)^0)\, \mathfrak{e}^0 = 0,$$

also liefert die Stützfunktion eines Punktes eine zum Eigenwert $\lambda_m = 1$ gehörige Eigenfunktion von (1).

Es soll gezeigt werden, daß $\lambda_m = 1$ der kleinste positive Eigenwert ist[7]). Hierzu überlegen wir zuerst, daß $\lambda_m = 1$ zweifacher Eigenwert ist. Die Stützfunktion eines Punktes ist nämlich

$$\varkappa = \frac{a \cdot \cos\varphi + b \cdot \sin\varphi}{k},$$

und man rechnet leicht nach, daß $Z_m = \frac{\cos\varphi}{k}$ und $Z_{m+1} = \frac{\sin\varphi}{k}$ in der Tat der Differentialgleichung (1) mit $\lambda = 1$ genügen. X_m, X_{m+1} entstehen aus Z_m, Z_{m+1} durch die Normierung (3). Beide haben im Periodizitätsintervall genau zwei Nullstellen.

Nun nehme ich an, es sei $\lambda_1 < \lambda_m$. Zu λ_1 gehört eine Eigenfunktion X_1, die im Intervall mindestens zwei Nullstellen ψ_1, ψ_2 hat. Durch Linearkombination von X_m und X_{m+1} bilde ich eine Eigenfunktion $\bar{X}$ (die also auch zum Eigenwert 1 gehört), die in ψ_1 eine Nullstelle hat. Aus $\lambda_1 < \lambda_m$ folgt nun, daß $\bar{X}$ eine Nullstelle $\psi_3 < \psi_2$ und eine weitere $\psi_4 < \psi_1 + 2p$ hat. Somit hätte $\bar{X}$ im Intervall mehr als zwei Nullstellen. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß die Stützfunktion eines Punktes *nur* zwei Nullstellen hat. Also ist der kleinste positive Eigenwert

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

4. Aus dem Ergebnis von Nr. 3 und den Gleichungen (8) und (9) folgt die isoperimetrische Ungleichung

$$L^2 - 4\,pF = 4\,p^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - 1) \cdot a_n^2 \geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn alle a_n mit $n > 2$ verschwinden. Aus

$$\varkappa = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$$

folgt aber wegen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\varrho = a_0 = \text{const},$$

also: Das Gleichheitszeichen gilt nur für R-Kreise.

5. Dinghas (a. a. O., Fußnote 3) hat im Anschluß an Hurwitz das isoperimetrische Defizit nach oben abgeschätzt durch Vergleich mit der Größe

$$Q = \tfrac{1}{2} \int \varrho^2\, d\psi - F.$$

Wegen (3, 8) und (3, 9) ist

$$Q = \tfrac{1}{2} \int \varrho\,(\varrho - \varkappa)\, d\psi = \tfrac{1}{2} \int \varrho\,(c\,\varkappa^0)^0\, d\psi.$$

---

[7]) Den Beweis verdanke ich Herrn G. Bol.

Einsetzen der Reihen für $\varkappa$ und ϱ ergibt

$$Q = p \sum_1^\infty \lambda_n (\lambda_n - 1) a_n^2.$$

Ich bilde nun mit einem unbestimmten Faktor q

$$\frac{L^2}{4p} - F - q \cdot Q$$

und suche q so zu bestimmen, daß dieser Ausdruck $\leqq 0$ wird. Es ist

$$\frac{L^2}{4p} - F - qQ = -p \sum_1^\infty (q\lambda_n - 1)(\lambda_n - 1) \cdot a_n^2,$$

und das ist jedenfalls $\leqq 0$, wenn $q = \frac{1}{\lambda_3}$ gewählt wird. Also ist

$$\frac{L^2}{4p} - F \leqq \frac{1}{\lambda_3} \left\{ \frac{1}{2} \int \varrho^2 d\psi - F \right\},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für

$$\varkappa = \sum_0^{3\,(4)} a_n X_n,$$

wobei bis $n = 3$ oder bis $n = 4$ zu summieren ist, je nachdem $\lambda_4 > \lambda_3$ oder $\lambda_4 = \lambda_3$ ist.

6. Auch die Überlegungen der Nr. 6 der genannten Arbeit von Dinghas übertragen sich ohne weiteres: Es ist

$$\frac{1}{2p} \int \varrho^2 d\psi = \sum_0^\infty (1 - \lambda_n)^2 \cdot a_n^2 = \left(\frac{L}{2p}\right)^2 + \sum_1 (1 - \lambda_n)^2 a_n^2,$$

also

$$\frac{1}{2p} \int \varrho^2 d\psi \leqq \left(\frac{L}{2p}\right)^2,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für R-Kreise. Das ist die Ungleichung (6, 2) von Dinghas (a. a. O., S. 224). Der Beweis der Ungleichung

$$\left(\frac{2p}{L}\right)^2 \leqq \frac{1}{2p} \int \frac{d\psi}{\varrho^2} \tag{6, 4}$$

gilt ohne Abänderung auch in unserem Falle, wenn nur $\varrho > 0$ ist. Das ist jedenfalls für konvexes $\mathfrak{x}$ stets der Fall. Demnach gilt der Satz: Sind die Eichkurve $\mathfrak{e}$ und die Kurve $\mathfrak{x}$ konvexe, stetig gekrümmte Kurven, so gibt es mindestens einen R-Krümmungsradius ϱ_1 und einen R-Krümmungsradius ϱ_2, so daß

$$2p\,\varrho_1 \leqq L \leqq 2p\,\varrho_2$$

ist.

7. *Der gemischte Flächeninhalt* zweier Bereiche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ mit den R-Stützfunktionen

$$\varkappa_1 = \sum a_n X_n, \quad \varkappa_2 = \sum b_n X_n$$

ist

$$F_{12} = \tfrac{1}{2} \int \varkappa_1 \varrho_2 d\psi = p \cdot \sum (1 - \lambda_n) \cdot a_n b_n.$$

Es ist nämlich

$$\int \varkappa_1 \varrho_2 \, d\psi = \int \frac{h_1}{k} \frac{r(\mathfrak{y})}{r(\mathfrak{e})} \frac{d\psi}{d\varphi} \, d\varphi = \int h_1 \cdot r(\mathfrak{y}) \, d\varphi$$

nach (1, 11).

Ist $\mathfrak{y}$ ein Basisbereich, d. h. $b_m = 1$, $b_n = 0$ für $n \neq m$, so ist

$$F_{12} = p \cdot (1 - \lambda_m) \cdot a_m,$$

also: *Die Koeffizienten der Reihenentwicklung sind bis auf den Faktor* $p\,(1 - \lambda_m)$ *die gemischten Flächeninhalte mit den Basisbereichen.*

Ist insbesondere $\mathfrak{y}$ die Eichkurve ($m = 0$, $b_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$), so wird

$$F_{12} = p a_0 = \tfrac{1}{2} L.$$

Der R-Umfang ist der doppelte gemischte Flächeninhalt der vorliegenden Kurve mit der Eichkurve.

Da ferner der Flächeninhalt der Eichkurve, den ich jetzt mit F_{22} zu bezeichnen hätte, gleich p ist, erkennt man, daß die isoperimetrische Ungleichung unserer R-Geometrie nichts anderes ist als die bekannte Brunn-Minkowskische Ungleichung für die Kurven $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$.

8. *R-Fußpunktkurven. Eine Kennzeichnung der Basiskurven.* Nach (3, 7) ist

$$\mathfrak{x} = \varkappa \mathfrak{e} + c \varkappa^0 \mathfrak{e}^0,$$

man wird also sinngemäß

$$\mathfrak{y} = \varkappa \mathfrak{e}$$

als die R-Fußpunktkurve zu $\mathfrak{x}$ erklären. Sie fällt mit $\mathfrak{x}$ dann und nur dann zusammen, wenn $\varkappa = \text{const}$, also $\mathfrak{x}$ ein R-Kreis ist. Der Flächeninhalt von $\mathfrak{y}$ ist

$$\Phi(\varkappa) = \tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{y}, \mathfrak{y}^0) \, d\psi = \tfrac{1}{2} \int \varkappa^2 \, d\psi = p \sum a_n^2.$$

Ich frage nun, für welche Kurven das Verhältnis

$$v(\varkappa) = \frac{F}{\Phi}$$

ein Maximum wird.

Es ist

$$v = \frac{\sum (1 - \lambda_n) a_n^2}{\sum a_n^2} = 1 - \frac{\sum \lambda_n a_n^2}{\sum a_n^2} \leqq 1,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $a_n = 0$ ist für $n \neq 0$, d. h. $v = \text{Max.}$ kennzeichnet R-Kreise um den Nullpunkt.

Allgemeiner suche ich nach Görtler eine Folge von Klassen von Bereichen, $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots$ derart, daß $\varkappa_N$ unter allen den Bereichen, die mit $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{N-1}$ einen verschwindenden gemischten Flächeninhalt haben, das Maximum von v liefert.

Die Klasse der Bereiche $\varkappa_0$ sind nach obigem die Bereiche mit $\varkappa = \text{const.}$ Ich bestimme $\varkappa_N$ durch vollständige Induktion. Es sei vorausgesetzt, daß für $m < N$ die Klasse $\varkappa_m$ von den Bereichen

$$\varkappa_m = a_m X_m, \quad a_m \text{ beliebig}$$

gebildet wird. Damit dann der gemischte Flächeninhalt von $\varkappa_N$ mit allen $\varkappa_m$ verschwindet, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\varkappa_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n X_n$$

ist. Somit ist

$$v(\varkappa_N) = 1 - \frac{\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n a_n^2}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2}.$$

Diesen Wert vergleiche ich mit dem Wert von v für

$$\bar{\varkappa}_N = a_N X_N,$$

wobei zunächst λ_N als einfacher Eigenwert vorausgesetzt sei. Es ist

$$v(\bar{\varkappa}_N) = 1 - \lambda_N,$$

$$v(\varkappa_N) - v(\bar{\varkappa}_N) = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} (\lambda_N - \lambda_n) a_n^2}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2} \leqq 0,$$

da $\lambda_N < \lambda_n$ für $N < n$ ist; also

$$v(\bar{\varkappa}_N) \geqq v(\varkappa_N),$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $\bar{\varkappa}_N = \varkappa_N$ ist, d. h. $\bar{\varkappa}_N = a_N X_N$ liefert das verlangte Maximum.

Ist $\lambda_N = \lambda_{N+1}$, so tritt $a_N X_N + a_{N+1} X_{N+1}$ an die Stelle von $a_N X_N$.

Die Forderung, von der wir ausgingen, hat uns die Folge der Basisbereiche geliefert.

(Eingegangen am 16. Dezember 1940.)

Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der *C*- und *H*-Verfahren.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Der Satz von der Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen, dessen eine Hälfte ich 1907 in meiner Dissertation [1][1]) bewiesen hatte, ist in zahlreichen Arbeiten behandelt worden, die die eigentümlichen Zusammenhänge beider Mittelbildungen von den verschiedensten Seiten her beleuchten[2]). Der durchsichtigste Beweis ist ohne Zweifel derjenige, den I. Schur in Vervollkommnung einer älteren Fassung von 1913 [1] im Jahre 1930 [4] für Zahlenfolgen und positiv-ganzzahlige Ordnungen gegeben hat. Denn bei diesem wird nicht nur die Transformation P_k, die die k-ten Cesàroschen Mittel C_k in die k-ten Hölderschen Mittel H_k, sondern auch die inverse Transformation $Q_k = P_k^{-1}$, die die Hölderschen in die Cesàroschen Mittel überführt, explizit angegeben. Beides geschieht in so übersichtlicher Form, daß die Äquivalenz der Transformationen C_k und H_k unmittelbar daraus abzulesen ist[3]).

Kurz zuvor (1929) hatte I. Schur [3] den Äquivalenzsatz sehr wesentlich dahin verallgemeinert, daß er zeigte, daß in ganz bestimmtem Sinne auch das asymptotische Wachstum der Hölderschen und Cesàroschen Mittel derselben Ordnung das gleiche ist. Die Beweise von 1913 wurden noch im gleichen Jahre von E. Landau [1] auf die Hölderschen und Cesaroschen Integralmittel von Funktionen übertragen; diejenigen von 1929 hat N. Obreschkoff [1] in entsprechender Weise zu übertragen versucht[4]).

---

[1]) Die eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Die andere Hälfte des Satzes wurde von W. Schnee [1] bewiesen. Weitere Beweise und verschiedene Erweiterungen gaben Andersen [1], [2], [3], Drobrowolski [1], Faber [1], Ford [1], Garten [2], Hahn [1], Hardy-Littlewood [1], Hausdorff [1], Hurwitz-Silverman [1], Jacob [1], Knopp [3], [4], Kogbetliantz [1], Landau [1], Obreschkoff [1], Ottolenghi [1], Schur [1], [3], [4], Watanabe [1].

[3]) In etwas anderer Weise hat kürzlich V. Garten [2] die beiden Transformationen angegeben, indem er sie, wenn auch nicht explizit, so doch durch einfache Rekursionsformeln gewinnt.

[4]) Seine Note [1] übersieht aber die Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, daß die in ihr mit $v(x)$, $w(x)$ usw. bezeichneten Funktionen sicher für $x = a$ und möglicher-

Für Folgen nimmt der Beweis die prägnanteste Form an, wenn von vornherein die Matrizenrechnung benutzt wird, zumal von ihr nur die einfachsten Dinge benötigt werden. Für Funktionen, genauer: für deren Integraltransformationen, ist ein entsprechender Formalismus durch V. Volterra [1] und im Anschluß an ihn von anderen[5]) geschaffen und ausgebaut worden. Doch begnügt man sich hier durchweg mit der Betrachtung stetiger und beschränkter Funktionen. Für die vorliegenden Zwecke reicht das nicht aus, da schon die bei dem C- und H-Verfahren benötigten Vermittlungsfunktionen [s. (1. 5)] in ihren Definitionsbereichen nicht beschränkt sind. Es würde keine Schwierigkeiten machen, für diese speziellen Funktionen die Existenz der weiterhin benötigten Integrale und deren Eigenschaften direkt nachzuweisen. Doch ist es befriedigender und für die weitergehenden Anwendungen unerläßlich, diese Dinge auf eine breitere Grundlage zu stellen. Daher soll, nachdem in Nr. 2 das notwendige über die Matrixtransformationen zusammengestellt ist, zunächst in Nr. 3 der der Matrizenrechnung eng verwandte Formalismus der Integraltransformation einer Klasse $\mathfrak{V}$ begründet werden, die für die Bedürfnisse der Limitierungsverfahren zweckmäßig abgegrenzt ist.

Alsdann soll in Nr. 4, im wesentlichen unter Beibehaltung des Schurschen Gedankenganges, der Beweis des ursprünglichen Äquivalenzsatzes einheitlich für Funktionen und Folgen dargestellt werden.

Schreibt man, im Falle der Integralmittel, die beim Beweise des Äquivalenzsatzes auftretenden Transformationen und ihre Umkehrungen für Funktionen auf, so hat man, wie sich zeigen wird (Nr. 5), ein paar zusammengehöriger Volterrascher Integralgleichungen 2. Art vor sich, deren jede auch durch die Neumannsche Reihe gelöst werden kann und so direkt zu der anderen führt. Durch diesen Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen ergeben sich (Nr. 6) insbesondere ein neuer Beweis und Verallgemeinerungen eines Satzes von Mercer [1] und Schur [1] und seines Analogons für Funktionen (s. Hardy [1], Landau [1]), durch den gewisse Transformationen als konvergenzgleich erkannt werden. Schließlich werden in Nr. 7 noch die Transformationen explizit angegeben, welche die C_k- und H_k-Mittel direkt in die Abelschen oder A-Mittel überführen.

In einer späteren Arbeit sollen dann die schon erwähnten Verallgemeinerungen des Äquivalenzsatzes in entsprechender Weise einheitlich für Funktionen und Folgen bewiesen werden.

---

weise für gewisse $x > a$ verschwinden. Mehrere der von ihm benutzten Integrale sind daher bedeutungslos, und seine Sätze sind in dem behaupteten Umfange nicht aufrechtzuerhalten.

[5]) So besonders von G. C. Evans [1], J. Péres u. a. Eine zusammenfassende Darstellung geben die „Leçons" von V. Volterra [1] und von Volterra-Péres [1]

1. Bezeichnungen. Wir betrachten im folgenden Limitierungsverfahren, die in bekannter Weise durch eine Integraltransformation

$$\sigma(x) = V(x; s(t)) = \int_0^\infty V(x,t)\, s(t)\, dt \tag{1.1}$$

einer Funktion $s(t)$ bzw. durch eine Matrixtransformation

$$\sigma_n = V(n; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{n\nu}\, s_\nu \tag{1.2}$$

einer Folge s_ν gegeben werden[6]). $V(x,t)$ und $V_{n\nu}$ nennen wir die Vermittlungsfunktion bzw. -matrix des betreffenden Verfahrens und bezeichnen sie, sowie das Verfahren selbst kurz mit V. Die Voraussetzungen, unter denen (1.1) und (1.2) sinnvoll sind, werden in Nr. 2 und 3 zusammengestellt. Wir nennen $\sigma(x)$ und σ_n die Ergebnisfunktion (-folge) gegenüber $s(t)$ und s_ν als der ursprünglichen oder Ausgangsfunktion (-folge) und bezeichnen jene, wenn kein Zweifel über die Rolle der Veränderlichen zu befürchten ist, als V-Transformation oder V-Mittel von s auch mit $Vs(t)$ bzw. Vs_ν oder ganz kurz mit Vs. Diejenige Transformation, die man erhält, wenn man in (1.1) und (1.2) die Werte von V durch ihre absoluten Beträge ersetzt, bezeichnen wir dann als die $|V|$-Transformation von $s(t)$ bzw. s_ν.

Aus der Gesamtheit dieser Verfahren V greifen wir nun eine bestimmte Klasse $\mathfrak{B}$ heraus, deren Erklärung in Nr. 2 und 3 gegeben wird. Von diesen Verfahren oder Funktionen V wiederum sind die am häufigsten gebrauchten „zeilenfinit", es ist, genauer gesagt, V nur in dem Halbquadranten $\Delta: \{0 < t < x\}$ bzw. $\{0 \leqq \nu \leqq n\}$ von 0 verschiedener Werte fähig, während es sonst für die nicht negativen x, t bzw. n, ν gleich 0 ist[7]). Die Teilklasse dieser Verfahren bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_\Delta$, ihre Funktionen bzw. Matrizen auch als Dreiecksfunktionen (-matrizen). Für sie nimmt (1.1) die Form

$$\sigma(x) = \int_0^x V(x,t)\, s(t)\, dt \tag{1.3}$$

und (1.2) die Form

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} V_{n\nu}\, s_\nu \tag{1.4}$$

an. In der Theorie der Integralgleichungen werden die Funktionen $V(x,t)$ aus $\mathfrak{B}_\Delta$ Volterrasche Kerne genannt. Die Gleichung (1.3) stellt bei gegebenem $\sigma(x)$ und gesuchtem $s(t)$ eine Volterrasche Integralgleichung dar, mit deren

[6]) Bei den Matrizen ist wie üblich der erste Index n die Zeilennummer, der zweite ν die Spaltennummer. Entsprechend denken wir uns auch bei stetigen Veränderlichen x, t die positive x-Achse nach unten, die positive t-Achse nach rechts genommen und x und t auch als Zeilen- bzw. Spaltennummer bezeichnet.

[7]) Im Falle stetiger Veränderlicher x, t ist es bequem, $V(x,0) = V(x,x) = 0$ zu setzen für alle $x \geqq 0$, — auch wenn die in Δ gegebene Funktion $V(x,t)$ dort von 0 verschiedene Randwerte besitzen sollte.

Theorie die nachfolgenden Betrachtungen mannigfache Berührungspunkte haben (vgl. besonders Nr. 5).

Das Verfahren M der gewöhnlichen arithmetischen Mittel und die Verfahren C_k und H_k der Cesàroschen und Hölderschen Mittel k-ter Ordnung gehören zu $\mathfrak{B}_J$. Im Falle der Integralmittel werden die Vermittlungsfunktionen bei beliebigem k mit $\Re(k) > 0$ für $0 < t < x$ durch

$$(1.5) \qquad M = \frac{1}{x}, \quad C_k = \frac{k}{x}\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1}, \quad H_k = \frac{1}{\Gamma(k)}\frac{1}{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1},$$

und im Falle der Matrixverfahren die Vermittlungsmatrizen bei beliebigem $k \neq 0, -1, -2, \ldots$ für $0 \leqq \nu \leqq n$ durch

$$(1.6) \qquad M = \frac{1}{n+1}, \quad C_k = \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \Big/ \binom{n+k}{n}$$

gegeben[8]). H_k läßt sich in diesem Falle nicht recht in übersichtlicher Form angeben[9]); doch werden wir sogleich sehen, daß es für positiv-ganze k durch die Gleichung

$$(1.7) \qquad H_k = M^k$$

gegeben wird und daß diese Gleichung auch für die Integralmittel gilt und auf beliebige k ausgedehnt werden kann.

Der *Äquivalenzsatz* für die beiden Arten von Verfahren besagt nun, daß unter gewissen Einschränkungen bezüglich k jede der beiden Beziehungen

$$(1.8) \qquad C_k(x; s(t)) \to s \quad \text{für} \quad x \to +\infty$$

und

$$(1.9) \qquad H_k(x; s(t)) \to s \quad \text{für} \quad x \to +\infty$$

und ebenso jede der beiden Beziehungen

$$(1.10) \qquad C_k(n; s_\nu) \to s \quad \text{für} \quad n \to +\infty$$

und

$$(1.11) \qquad H_k(n; s_\nu) \to s \quad \text{für} \quad n \to +\infty$$

aus der anderen folgt.

2. Die Matrixtransformationen. Für die Behandlung der linearen Transformationen V in (1.2) und (1.4) steht die Matrizenrechnung zur Verfügung. Doch brauchen wir von ihr nur die einfachsten Dinge, die wir hier kurz zusammenstellen.

Die Gesamtheit aller (komplexen) Zahlenfolgen s_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ und mit $\mathfrak{S}_b$ die Teilklasse derjenigen unter ihnen, die (jede für sich) beschränkt sind.

---

[8]) Bei den Verfahren aus $\mathfrak{B}_J$ brauchen nur die Werte (Elemente) von V für $0 < t < x$ [vgl.[7]] bzw. $0 \leqq \nu \leqq n$ angegeben zu werden. Das ist in der Folge zu beachten.

[9]) Vgl. jedoch die Ausführungen zu (2.10).

Für die Zwecke der Limitierungsverfahren genügt es nun, sich weiterhin auf diejenigen Matrizen $V = (V_{n\nu})$ zu beschränken, welche die folgenden drei Voraussetzungen erfüllen, bei denen wir für festes $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} V_{n\nu} = v_n, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |V_{n\nu}| = \varphi_n \tag{2.1}$$

setzen und v_n als n-te *Zeilensumme*, φ_n als n-te *Zeilennorm* bezeichnen:

(*Zn*). *Die Zeilennormen sind vorhanden und beschränkt*: $\varphi_n \leqq K = K_V$.

(*Sp*). *Die in den Spalten stehenden Folgen* $V_{n\nu}$ *streben* $\to 0$ *für* $n \to \infty$, ($\nu = 0, 1, \ldots$, *fest*).

(*Zs*). *Die Zeilensummen* v_n *streben für* $n \to \infty$ *gegen einen Grenzwert* v.

Die Gesamtheit der Matrizen V, die diese drei Bedingungen erfüllen, sollen die schon in Nr. 1 genannte Klasse $\mathfrak{V}$ bilden mit der Teilklasse $\mathfrak{V}_\Delta$ der Dreiecksmatrizen unter ihnen. In jeder dieser Klassen fassen wir noch diejenigen Transformationen zusammen, für die $v = 1$ ist, und bezeichnen ihre Gesamtheit mit $\mathfrak{V}_1$ bzw. $\mathfrak{V}_{\Delta 1}$. Es gelten dann die folgenden einfachen Sätze:

I. Erfüllt V allein die Voraussetzung (*Zn*), so ist die V-Transformation und ebenso die $|V|$-Transformation jeder Folge s_ν aus $\mathfrak{S}_b$ vorhanden. In beiden Fällen gehört die Ergebnisfolge wieder zu $\mathfrak{S}_b$.

II. Erfüllt V die Voraussetzungen (*Zn*) und (*Sp*), so tut es auch $|V|$ und beide Transformationen verwandeln jede Nullfolge wieder in eine Nullfolge.

III. Jedes V aus $\mathfrak{V}$ ist *konvergenzerhaltend*, d. h. durch jedes solche V wird eine konvergente Folge $s_\nu \to s$ in eine wiederum konvergente Folge $\sigma_n \to \sigma$ verwandelt. Hierbei ist $\sigma = sv$. Man sagt darum auch, die Transformation V sei *multiplikativ*, und nennt v ihren *Multiplikator*.

IV. Ist für ein V aus $\mathfrak{V}$ noch $v = 0$, so wird durch dies V jede konvergente Folge in eine Nullfolge verwandelt.

V. Gehört V zu $\mathfrak{V}_1$, so gilt für das Verfahren V der Permanenzsatz oder kurz: es ist *permanent*, d. h. jede konvergente Folge $s_\nu \to s$ wird in eine gegen den gleichen Grenzwert konvergierende Folge $\sigma_n \to s$ verwandelt[10]).

VI. Für die Permanenz eines beliebigen Verfahrens aus (1. 2) sind die drei Bedingungen (*Zn*), (*Sp*), (*Zs*) mit $v = 1$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig (s. Toeplitz [1], Schur [2]). Daß (*Sp*) und (*Zs*) notwendig sind, ist fast trivial (man betrachte die Folgen, die an allen Stellen eine 1 bzw. an genau einer Stelle eine 1 und sonst Nullen haben); daß (*Zn*) notwendig ist, wird im folgenden nicht gebraucht.

Die (sehr einfachen) Beweise dieser Sätze sehen wir als bekannt an (s. Toeplitz [1], Schur [2]).

---

[10]) Diese Verfahren bzw. Matrizen werden auch *regulär* genannt.

Es seien jetzt A und B zwei Verfahren aus $\mathfrak{B}$. Man kann dann eine Folge s_ν aus $\mathfrak{S}_b$ zuerst durch B und alsdann die Ergebnisfolge $\sigma_n = B(n; s_\nu)$, die (nach I.) wieder zu $\mathfrak{S}_b$ gehört, durch A transformieren. Die erhaltene Folge $\tau_n = A(n; \sigma_\nu)$ wird dann durch

$$\tau_n = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} \{ \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu} s_\nu \} \tag{2.2}$$

gegeben. Da hier alles konvergent bleibt, wenn man die A, B und s durch ihre Beträge ersetzt, so darf man in (2. 2) die Reihenfolge der Summierungen vertauschen, und man erhält

$$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} B_{\mu\nu} \} s_\nu. \tag{2.3}$$

Die Folge τ_n ist also die C-Transformation von s_ν, wenn unter C die Matrix mit den (für A, B aus $\mathfrak{B}$ stets sinnvollen) Elementen

$$C_{n\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} B_{\mu\nu}, \qquad (n, \nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.4}$$

verstanden wird. C ist also das übliche Matrizenprodukt von A und B, d. h. $C = AB$. Ist $AB = BA$, so heißen A und B vertauschbar. Über diese Produktbildung gilt nun

VII. *Gehören A und B zu $\mathfrak{B}$, so gehört auch ihr Produkt $C = AB$ zu $\mathfrak{B}$. Haben A, B die Multiplikatoren a, b, so hat C den Multiplikator $c = ab$. Insbesondere: Sind A und B permanent, so ist auch AB permanent.*

Dies sei kurz bewiesen. Wir bezeichnen dabei die Zeilensummen (-normen) von A, B, ... mit a_n (α_n), b_n (β_n), ... und die Schranken für die Zeilennormen mit K_A, K_B, ... Da die Zeilennormen β_μ von B beschränkt sind, so konvergieren (als $|A|$-Transformation von β_μ) die Reihen

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |A_{n\mu}| \cdot \beta_\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty} |A_{n\mu}| \{ \sum_{\nu=0}^{\infty} |B_{\mu\nu}| \}, \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

und sind $\leqq K_B \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} |A_{n\mu}| \leqq K_A \cdot K_B$. Bei der Doppelreihe darf die Reihenfolge der Summierungen vertauscht werden, und man hat

$$K_A \cdot K_B \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} |A_{n\mu}| \cdot |B_{\mu\nu}| \} \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} | \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} B_{\mu\nu} | = \gamma_n.$$

Hiernach erfüllt C die Bedingung (Zn) mit $K_C = K_A \cdot K_B$. Wird ν festgehalten und nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ein m so bestimmt, daß für $n > m$ stets $|B_{n\nu}| < \varepsilon$ ausfällt, so ist für diese n

$$|C_{n\nu}| \leqq |A_{n0} B_{0\nu} + \cdots + A_{nm} B_{m\nu}| + \varepsilon \{ |A_{n,m+1}| + \cdots \}.$$

Bei festem ν und m strebt aber der erste Summand rechts $\to 0$ für $n \to \infty$, denn A erfüllt (Sp); der zweite bleibt $< \varepsilon K_A$. Also erfüllt C auch (Sp). Schließlich ist

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} B_{\mu\nu} \} = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} \{ \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu} \} = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} b_\mu .$$

Nun strebt $b_\mu \to b$, und A ist konvergenzerhaltend mit dem Multiplikator a. Also strebt c_n, als A-Transformation von b_μ, gegen ab. Auch (Zs) ist erfüllt. Die Richtigkeit der übrigen Behauptungen ist unmittelbar zu erkennen. Gemäß (2. 2) und (2. 3) merken wir noch besonders an:

Für jede Folge s_ν aus $\mathfrak{S}_b$ gilt

$$(AB)\, s = A\,(Bs). \tag{2. 5}$$

Da die Produkte zweier Matrizen aus $\mathfrak{V}$ wieder zu $\mathfrak{V}$ gehören, so können nun (und wegen des nachfolgenden Satzes VIII.) ohne weiteres Produkte aus mehr Faktoren aus $\mathfrak{V}$ und also auch Potenzen solcher Matrizen gebildet werden. Sie gehören immer wieder zu $\mathfrak{V}$. Hierüber gilt nun weiter:

VIII. *Die Produktbildung der Matrizen aus $\mathfrak{V}$ ist assoziativ.* Sind nämlich A, B, C beliebige Verfahren aus $\mathfrak{V}$, so hat $(AB)C$ an der Stelle (n, ν) das Element

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} B_{\mu\lambda} \} C_{\lambda\nu}. \tag{2. 6}$$

Das ist aber (für festes $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) die (AB)-Transformation der (beschränkten) Folge $s_\lambda \equiv C_{\lambda\nu}$, also $= (AB)\, s$. Andererseits hat $A\,(BC)$ an der Stelle (n, ν) das Element

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{n\mu} \{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} B_{\mu\lambda} C_{\lambda\nu} \}, \tag{2. 7}$$

d. h. bei derselben Auffassung das Element $A\,(Bs)$. Nach (2. 5) ist also

$$(AB)C = A\,(BC). \tag{2. 8}$$

Die Multiplikation mit einem Zahlenfaktor und die Addition zweier Matrizen definieren sich wie üblich. Diese Addition ist distributiv zur Multiplikation. Die Einheitsmatrix E liefert die identische Transformation. Ist für zwei Verfahren A und B das gemäß (2. 4) gebildete Produkt $AB = E$, so heißt A eine linksseitige Inverse zu B, B eine rechtsseitige Inverse zu A. Sind hierbei A und B vertauschbar, so ist die Beziehung eine gegenseitige, und die Matrizen heißen kurz zueinander invers. Man schreibt dann $B = A^{-1}, A = B^{-1}$.

Gehören A, B zu $\mathfrak{V}_J$, so gehört auch AB zu $\mathfrak{V}_J$, und die Formel (2. 4) vereinfacht sich zu

$$C_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} A_{n\mu} B_{\mu\nu}, \quad (0 \leqq \nu \leqq n;\ \text{sonst}\ C_{n\nu} = 0). \tag{2. 9}$$

Auch die Beweise der übrigen bisher genannten Tatsachen vereinfachen sich, da immer nur endliche Summen auftreten, die Beweise also „konvergenzfrei" sind (im Sinne von Koethe-Toeplitz [1]). Für die Verfahren V aus $\mathfrak{B}_\mathcal{J}$ sind überdies die Transformationen aller Folgen aus $\mathfrak{S}$ (nicht nur der beschränkten) sinnvoll. Sind die Diagonalelemente V_{nn}, $(n = 0, 1, \ldots)$ einer solchen Transformation V aus $\mathfrak{B}_\mathcal{J}$ sämtlich $\neq 0$, so besitzt V offenbar eine Inverse V^{-1}, die man aus den Gleichungen $\sum_{\nu=0}^{n} V_{n\nu} s_\nu = \sigma_n$ erhält, indem man sie nach den s_ν der Reihe nach auflöst.

Für die Matrizen H_k und M (die zu $\mathfrak{B}_\mathcal{J}$ gehören) und ganzes $k > 0$ gilt mit den nun definierten Potenzen die Gleichung

$$H_k = M^k. \tag{2.10}$$

Für $k = 0$ sollen beide Seiten (und allgemein V^0) die Einheitsmatrix E bedeuten. Für die Elemente von M^k ergeben sich für $k > 1$, wie oben betont, keine recht übersichtlichen Formeln. Doch zeigten schon W. A. Hurwitz und L. L. Silverman [1], sowie später und unabhängig von ihnen F. Hausdorff [1], daß die Matrix M (und übrigens alle mit ihr vertauschbaren, aber auch nur diese) mit Hilfe der die Folge der Differenzen liefernden Matrix $D = (-1)^\nu \binom{n}{\nu}$, die zu sich selbst invers ist $(D^{-1} = D)$, in eine Diagonalmatrix übergeführt werden kann. Es ist, wie man auch leicht direkt verifiziert,

$$DMD = M', \quad M = DM'D,$$

wenn M' die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$ bezeichnet. Für ganze $k \geqq 1$ ist also

$$M^k = DM'^k D, \tag{2.11}$$

wo nun M'^k die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $1, \frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{1}{(n+1)^k}, \ldots$ bedeutet. Hiernach versteht es sich von selbst, daß man M^k und damit H_k für beliebige (auch komplexe) k durch (2.11) erklärt. Rechnet man gemäß (2.9) das Produkt $DM'^k D$ aus, so erhält man für die Elemente von M^k bei beliebigem k die explizite Darstellung

$$(H_k)_{n\nu} = (M^k)_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^{\mu+\nu} \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{(\mu+1)^k}, \qquad (0 \leqq \nu \leqq n), \tag{2.12}$$

während für $\nu > n$ die Elemente $= 0$ sind.

Zur weiteren Illustration sei daran erinnert, wie man zur Matrix C_k gelangt. Man geht von der Dreiecksmatrix $S = 1$ (d. h. $S_{n\nu} = 1$ für $0 \leqq \nu \leqq n$,

sonst $S_{n\,r} = 0$) aus, die eine Folge s, in die Folge der Summen $(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$ überführt, bildet ihre Potenzen

$$S^2 = \sum_{\mu=\nu}^{n} 1 = \binom{n-\nu+1}{1}, \quad S^3 = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{n-\mu+1}{1} = \binom{n-\nu+2}{2}, \ldots$$

$$S^k = \binom{n-\nu+k-1}{k-1} = \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \tag{2.13}$$

und dividiert durch das n-te „Gesamtgewicht", d. h. durch die n-te Zeilensumme, also durch $\binom{n+k}{n}$. Das liefert die in (1.6) gegebene Formel für C_k, die nun ohne weiteres als Definition von C_k für alle k genommen werden kann, für die sie sinnvoll ist, d. h. für alle (auch komplexen) $k \neq -1, -2, \ldots$.

Endlich sei noch gezeigt, daß die Matrix

$$N_p = \binom{\nu+p}{\nu} \Big/ \binom{n+p+1}{n}, \qquad (0 \leqq \nu \leqq n), \tag{2.14}$$

die die C_p-Mittel direkt in die C_{p+1}-Mittel überführt, dann und nur dann permanent ist, wenn $\Re(p) = \pi > -1$ ist. Gemäß VI. haben wir zu zeigen, daß (Zn), (Sp) und (Zs) für diese p erfüllt sind, und daß etwa (Sp) nur für diese p erfüllt ist. Nun ist aber, wie aus der Produkterklärung der Γ-Funktion folgt, für $\pi > -1$

$$\left|\binom{\nu+p}{\nu}\right| \simeq \frac{\Gamma(\pi+1)}{|\Gamma(p+1)|}\binom{\nu+\pi}{\nu} \tag{2.15}$$

und folglich, weil $\binom{\nu+\pi}{\nu} > 0$ ist und, über ν summiert, eine divergente Reihe liefert,

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left|\binom{\nu+p}{\nu}\right| \simeq \frac{\Gamma(\pi+1)}{|\Gamma(p+1)|}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+\pi}{\nu} = \frac{\Gamma(\pi+1)}{|\Gamma(p+1)|}\binom{n+\pi+1}{n}.$$

Also ist, wie eine nochmalige Anwendung von (2.15) lehrt, die Zeilennorm der Matrix N_p aus (2.14)

$$\simeq \frac{|p+1|}{\pi+1};$$

sie bleibt also gewiß für alle n unterhalb einer festen Schranke, (Zn) ist erfüllt. Daß (Sp) und (Zs) für $\pi > -1$ erfüllt sind und daß (Sp) nur für diese π erfüllt ist, ist ohne weiteres zu erkennen.

3. Die Integraltransformationen. Im wesentlichen entsprechend der eben erklärten Klasse von Matrixtransformationen grenzen wir nun eine solche für die Integraltransformationen (1.1) ab. Zunächst machen wir über

die zur Transformation zugelassenen Funktionen $s(t)$ die für alle Anwendungen hinreichend weiten Voraussetzungen:

$$\begin{cases} S_1. & \textit{Es ist } s(t) \textit{ für } t > 0 \textit{ definiert}^{11}). \\ S_2. & \textit{Für jedes } a > 0 \textit{ ist } s(t) \textit{ in } 0 < t \leqq a \textit{ beschränkt}. \\ S_3. & \textit{Für jedes } a > 0 \textit{ ist } s(t) \textit{ über } (0, a) \textit{ integrierbar}^{12}). \end{cases}$$

Die Klasse der Funktionen $s(t)$, die diese Voraussetzungen erfüllen, heiße $\mathfrak{S}$. Mit $s(t)$ gehört offenbar auch $|s(t)|$ zu $\mathfrak{S}$. Die Teilklasse derjenigen unter ihnen, die (jede für sich) beschränkt sind, nennen wir $\mathfrak{S}_b$. Mit $s(t)$ gehört auch $|s(t)|$ zu $\mathfrak{S}_b$.

Die Vermittlungsfunktionen $V(x, t)$, die in dem Quadranten $Q: \{x > 0,\ t > 0\}$ definiert und (flächenhaft) meßbar sein müssen, sollen nun wieder die drei folgenden Voraussetzungen erfüllen, bei denen wir für festes x

$$\int_0^\infty V(x, t)\, dt = v(x), \quad \int_0^\infty |V(x, t)|\, dt = \varphi(x) \tag{3.1}$$

setzen und $v(x)$ die *Zeilensumme*, $\varphi(x)$ die *Zeilennorm* der Nummer x nennen:

(Zn). *Die Zeilennorm $\varphi(x)$ ist für (fast) alle x vorhanden und gehört zur Klasse $\mathfrak{S}_b$, ist also insbesondere beschränkt*: $\varphi(x) \leqq K = K_V$.

(Sp). *Für festes $a > 0$ strebt*

$$\varphi_a(x) = \int_0^a |V(x, t)|\, dt \to 0 \quad \textit{für} \quad x \to +\infty.$$

(Zs). *Die Zeilensummen $v(x)$*[13]) *haben für $x \to +\infty$ einen Grenzwert v*:

$$v(x) = \int_0^\infty V(x, t)\, dt \to v \quad \textit{für} \quad x \to +\infty.$$

---

[11]) Nötigenfalls denken wir uns $s(0) = 0$ gesetzt.

[12]) „Integrierbar" bedeutet im folgenden stets: (absolut) L-integrierbar, sowohl bei einer wie bei mehreren Veränderlichen. Im Sinne der Theorie der L-Integrale sehen wir eine Funktion in einem Bereiche als definiert an, wenn sie für fast alle Punkte dieses Bereiches definiert ist. Ebenso betrachten wir zwei Funktionen als nicht (wesentlich) verschieden, wenn sie sich höchstens auf einer Nullmenge ihres Definitionsbereiches unterscheiden. Wird von einer Funktion irgendeine Eigenschaft vorausgesetzt oder behauptet (z. B. Beschränktheit, Integrierbarkeit usw.), so bedeutet dies stets, daß unter den zu ihr äquivalenten Funktionen mindestens eine die betreffende Eigenschaft besitzt. Dies ist auch schon bei S_1 und S_2 zu berücksichtigen.

Bei den nachfolgenden konkreten Anwendungen zeigt sich meist ganz unmittelbar, daß die betreffenden Nullmengen leer sind oder nur aus Randpunkten bestehen. Für die allgemeinen Betrachtungen aber ist es nötig, mit jeder Funktion zugleich auch die zu ihr äquivalenten ins Auge zu fassen.

[13]) Wegen (Zn) sind sie für (fast) alle x vorhanden.

Die Gesamtheit der Funktionen V, die diese drei Bedingungen erfüllen, sollen die schon in Nr. 1 genannte Klasse $\mathfrak{V}$ bilden mit der Teilklasse $\mathfrak{V}_\Delta$ der Dreiecksfunktionen unter ihnen. Mit $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_{\Delta 1}$ bezeichnen wir wieder die Gesamtheit derjenigen Funktionen aus $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{V}_\Delta$, für die $v = 1$ ist.

Über die Funktionen V gelten nun die folgenden Sätze:

I. *Erfüllt $V(x,t)$ wenigstens die Voraussetzung (Zn), so existiert für jedes $a > 0$ das über den Halbstreifen $Q_a: \{0 < x \leqq a,\ t > 0\}$ genommene Doppelintegral*

$$(3.2) \qquad {}^{(Q_a)}\!\iint V(x,t)\,dx\,dt$$

und ist $= \int_0^a \varphi(x)\,dx$. Und umgekehrt: *Wenn das Doppelintegral (3.2) für jedes $a > 0$ existiert, so sind die Zeilennormen $\varphi(x)$ von V für (fast) alle x vorhanden, und $\varphi(x)$ gehört zur Klasse $\mathfrak{S}$. Insbesondere gehört V zur Klasse $\mathfrak{V}$, falls $\varphi(x)$ sich als beschränkt erweist.*

Das ist eine unmittelbare Folge aus dem Satz von Fubini (s. Fubini [1], Montel-Rosenthal [1], Hobson [1] und besonders eingehend bei Carathéodory [1]), welcher folgendes besagt: Die (nicht notwendig beschränkte) Funktion $f(x,t)$ sei in dem Quadranten Q definiert[14]) und (flächenhaft) meßbar. Ist dann $f(x,t)$ über Q integrierbar, so existieren auch die Integrale

$$\int_0^\infty f(x,t)\,dt = g(x) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty f(x,t)\,dx = h(t)$$

für fast alle $x > 0$ bzw. $t > 0$ und sind (unter Vernachlässigung aller Stellen x bzw. t, für die diese Integrale etwa nicht existieren) wiederum über die positive Halbachse integrierbar. Überdies ist

$$(3.3) \qquad {}^{(Q_a)}\!\iint f(x,t)\,dx\,dt = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x,t)\,dt\right\} dx = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x,t)\,dx\right\} dt.$$

Umgekehrt ist die Existenz (und Endlichkeit) eines der iterierten Integrale der Funktion $|f(x,t)|$ hinreichend für die Existenz des Doppelintegrals von $f(x,t)$ über Q und somit der Gültigkeit der Formel (3.3).

Für später sei gleich angemerkt, daß ein entsprechender Satz für Funktionen von 3 Veränderlichen gilt und die Zurückführung eines räumlichen Integrals auf drei einfache Integrale oder auf ein einfaches und ein Doppelintegral in beliebiger Reihenfolge.

II. *Erfüllt $V(x,t)$ wenigstens die Voraussetzung (Zn), so sind die Zeilensummen $v(x)$ für (fast) alle x vorhanden und $v(x)$ gehört zur Klasse $\mathfrak{S}_b$.* Das folgt sofort aus (Zn) und $|v(x)| \leqq \varphi(x)$.

---

[14]) Ist f nur in einer (meßbaren) Teilmenge von Q definiert, so denke man sich in den übrigen Punkten von Q überall $f = 0$ gesetzt.

III. *Genügt $V(x,t)$ wenigstens der Voraussetzung (Zn), so ist das Integral $\int_0^a V(x,t)\,dx$ für jedes $a>0$ und fast alle $t>0$ vorhanden.* Das folgt wieder unmittelbar aus dem Satz von Fubini.

IV. *Erfüllt $V(x,t)$ wenigstens die Voraussetzung (Zn), so ist die V-Transformation $\sigma(x)$ einer Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}_b$ für (fast) alle $x>0$ vorhanden und gehört wieder zu $\mathfrak{S}_b$. Das gleiche gilt von der $|V|$-Transformation.*

Beweis. Da $V(x,t)$ für jedes $a>0$ über Q_a integrierbar ist und da $s(t)$, wenn es als Funktion von x und t aufgefaßt wird, in Q_a definiert, flächenhaft meßbar und beschränkt ist, so existiert auch

$$^{(Q_a)}\!\iint V(x,t)\,s(t)\,dx\,dt$$

und nach dem Satze von Fubini auch

$$\int_0^\infty V(x,t)\,s(t)\,dt=\sigma(x)$$

für fast alle x in $0\ldots a$. Da $a>0$ beliebig war, so existiert $\sigma(x)$ für fast alle $x>0$. Ist nun $|s(t)|\leqq M_s$ für alle $t>0$, so ist weiter

$$|\sigma(x)|\leqq M_s\cdot\int_0^a|V(x,t)|\,dt=M_s\cdot\varphi(x)\leqq M_s\cdot K_V=M_a,$$

also beschränkt. Endlich existiert, wieder nach dem Satz von Fubini, auch $\int_0^a\sigma(x)\,dx$ für jedes $a>0$ und ist gleich dem zuerst hingeschriebenen Doppelintegral. Also gehört $\sigma(x)$ zu $\mathfrak{S}_b$. Der gleiche Beweis gilt, wenn V durch $|V|$ ersetzt wird.

V. *Erfüllt V wenigstens die Voraussetzungen (Zn) und (Sp) und strebt die zu $\Im$ gehörige Funktion $s(t)\to 0$ für $t\to+\infty$ (so daß sie sogar zu $\mathfrak{S}_b$ gehört), so strebt auch ihre V-Transformation $\sigma(x)\to 0$ für $x\to+\infty$. Das gleiche gilt für die $|V|$-Transformation.*

Beweis. Bestimmt man nach Wahl von $\varepsilon>0$ ein $a>0$, so daß für $t\geqq a$ stets $|s(t)|\leqq\frac{\varepsilon}{2K_V}$ ist, so ist für alle $x>a$

$$|\sigma(x)|\leqq\int_0^a|V(x,t)|\cdot|s(t)|\,dt+\frac{\varepsilon}{2K_V}\int_a^\infty|V(x,t)|\,dt.$$

Das letzte Integral ist $\leqq K_V$; und ist in $0<t\leqq a$ noch $|s(t)|\leqq M_a$, so ist für $x>a$ also

$$|\sigma(x)|\leqq M_a\cdot\int_0^a|V(x,t)|\,dt+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach (Sp) kann man nun $x_0 > a$ so bestimmen, daß für $x > x_0$ auch der erste Summand rechts $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann ist für $x > x_0$ stets $|\sigma(x)| < \varepsilon$. Es strebt also $\sigma(x) \to 0$ für $x \to +\infty$.

VI. *Gehört V zu $\mathfrak{V}$, so ist die V-Transformation der Funktionen $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ konvergenzerhaltend, d. h. wenn $s(t) \to s$ für $t \to +\infty$ [so daß $s(t)$ sogar zu $\mathfrak{S}_b$ gehört], so strebt auch ihre V-Transformation $\sigma(x)$ gegen einen Grenzwert σ für $x \to +\infty$. Überdies ist $\sigma = s \cdot v$. Gehört V zu $\mathfrak{V}_1$, so ist die Transformation permanent, d. h. sie führt jede (für $t \to +\infty$) konvergente Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ in eine für $x \to +\infty$ zum gleichen Grenzwert konvergierende Funktion $\sigma(x)$ über.*

Beweis. Es ist

$$\sigma(x) - s \cdot v(x) = \int_0^\infty V(x,t)\,(s(t) - s)\,dt.$$

Da V zu $\mathfrak{V}$ gehört und $s(t) - s$ zu $\mathfrak{S}_b$, so strebt nach V. wegen $s(t) - s \to 0$ auch $\sigma(x) - s \cdot v(x) \to 0$, wegen $v(x) \to v$ also

$$\sigma(x) \to s \cdot v,$$

was den ersten Teil des Satzes beweist. Für $v = 1$ ergibt sich die zweite Behauptung.

Wegen der Beziehung $\sigma = s \cdot v$ nennt man die Transformationen V aus $\mathfrak{V}$ auch *multiplikativ* und v ihren *Multiplikator*.

Während bei den Matrixtransformationen die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Permanenz durch die Sätze von Toeplitz [1] und Schur [2] einfach und vollständig erledigt ist (vgl. 2, VI.), ist die entsprechende Frage für die Integralverfahren sehr viel schwieriger (vgl. Rey Pastor [1], [2], sowie Raff [1] und die dort angegebenen Schriften). Doch ist hier, wie sich schon bei der Transformation von $s(t) \equiv 1$ zeigt, für die Permanenz wieder notwendig, daß die Zeilensummen $v(x)$ existieren und $\to 1$ streben für $x \to +\infty$.

Es seien jetzt A und B zwei Verfahren aus $\mathfrak{V}$. Man kann dann eine Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}_b$ zuerst durch B und dann die Ergebnisfunktion $\sigma(x) = B(x; s(t))$, die nach IV. wieder zu $\mathfrak{S}_b$ gehört, durch A transformieren. Die erhaltene Funktion $\tau(x) = A(x;\ \sigma(t))$ wird dann durch

$$\tau(x) = \int_0^\infty A(x,u)\left\{\int_0^\infty B(u,t)\,s(t)\,dt\right\}du \tag{3.4}$$

gegeben. Vertauscht man hier die Reihenfolge der Integrationen (die Berechtigung dazu wird sogleich erwiesen werden), so erhält man

$$\tau(x) = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty A(x,u)\,B(u,t)\,du\right\} s(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Die Ergebnisfunktion $\tau(x)$ ist also die C-Transformation von $s(t)$, wenn unter C die durch das Integral

$$C(x,t) = \int_0^\infty A(x,u)\, B(u,t)\, du, \qquad (x > 0,\ t > 0), \tag{3. 6}$$

erklärte Funktion verstanden wird, deren Existenz sogleich bewiesen werden wird. Diese durch Komposition der beiden Funktionen A und B aus $\mathfrak{V}$ entstandene und, wie wir sehen werden, wieder zu $\mathfrak{V}$ gehörige Funktion C wollen wir auch hier kurz das „Produkt" von A und B, in Zeichen

$$C = AB \tag{3. 7}$$

nennen[15]). Die Funktion $\tau(x)$ darf dann durch $(AB)\,s$ oder $AB(x; s(t))$ bezeichnet werden, und es ist

$$(AB)\,s = A(Bs). \tag{3. 8}$$

Über diese, der Matrizenmultiplikation entsprechende Verknüpfung beweisen wir nun die folgenden Sätze.

VII. *Gehören A und B zu $\mathfrak{V}$, so existiert die durch* (3. 6) *gegebene Funktion $C(x,t)$ für fast alle (x,t) in Q, d. h. für alle (x,t) in Q mit möglicher Ausnahme einer (flächenhaften) Nullmenge, und gehört wieder zur Klasse $\mathfrak{V}$. Der Multiplikator c dieser Funktion $C = AB$ ist gleich dem Produkt $c = ab$ der Multiplikatoren von A und B. Sind insbesondere A und B permanent, so ist es auch AB.*

Beweis. Die Zeilensummen, die Zeilennormen und die Schranken für diese bezeichnen wir für die Funktionen A, B, ... ganz entsprechend wie bei 2. VII.

1. Da die Zeilennorm $\beta(u)$ von $B(u,t)$ zu $\mathfrak{S}_b$ gehört, so existiert nach IV. das iterierte Integral

$$\int_0^a \left\{ \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot \beta(u)\, du \right\} dx.$$

---

[15]) In der VOLTERRAschen Theorie der vertauschbaren Funktionen (s. VOLTERRA [1], VOLTERRA-PÉRÈS [1]) wird das durch (3. 6) erklärte Produkt (3. 7) von A und B durch $\overset{\bullet}{A}\overset{\bullet}{B}$ bezeichnet, um die natürlich mögliche Verwechslung mit dem gewöhnlichen Produkt der Funktionswerte $A(x,t)$ und $B(x,t)$ zu vermeiden. Da aber diese Verwechslung bei einiger Aufmerksamkeit kaum zu befürchten ist und um die Analogie zur Matrizenrechnung stärker hervortreten zu lassen, benutzen wir die obige kurze Bezeichnung AB.

Die Bildung (3. 6) des Produktes $C = AB$ entspricht natürlich genau der Multiplikation (2. 4) der (unendlichen) Matrizen bzw. der (HILBERTschen) Faltung der zugehörigen Bilinearformen. Ebenso entsprechen die Sätze VII. und VIII. in dieser Nr. 3 und der vorangehenden Nr. 2 dem 1. und 2. HILBERTschen Faltungssatz (vgl. HELLINGER-TOEPLITZ [1], S. 1427 f.).

Setzt man für $\beta(u)$ seinen Wert ein, so erkennt man, daß das dreimal iterierte Integral

$$\int_0^a \left\{ \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot \left[\int_0^\infty |B(u,t)|\, dt \right] du \right\} dx$$

vorhanden ist. Nach dem Satz von Fubini existiert also auch das über das räumliche Gebiet $\{0 < x \leqq a,\ u > 0,\ t > 0\}$ genommene räumliche Integral der Funktion $A(x,u) \cdot B(u,t)$ der drei Veränderlichen x, u, t, sowie deren einfaches Integral

$$\int_0^\infty |A(x,u) \cdot B(u,t)|\, du$$

für alle (x,t) aus Q, höchstens mit Ausnahme einer (flächenhaften) Nullmenge. Also existiert die durch (3. 6) gegebene Funktion $C(x,t)$ in dem behaupteten Umfange und ist für jedes $a > 0$ über den Halbstreifen Q_a integrierbar. Nach I. ist daher die Zeilennorm $\gamma(x)$ von C für fast alle x vorhanden. Wegen

$$\gamma(x) = \int_0^\infty |C(x,t)|\, dt \leqq \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot |B(u,t)|\, du \right\} dt$$

und weil im letzten Integral wieder die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden darf, ist aber sogar

$$\gamma(x) \leqq \int_0^\infty |A(x,u)| \left\{ \int_0^\infty |B(u,t)|\, dt \right\} du = \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot \beta(u)\, du$$

$$\leqq K_B \cdot \int_0^\infty |A(x,u)|\, du \leqq K_A \cdot K_B = K_C,$$

d. h. beschränkt. Also erfüllt C die Voraussetzung (Zn).

2. Bei festem $a > 0$ ist nun weiter

$$\gamma_a(x) = \int_0^a |C(x,t)|\, dt \leqq \int_0^a \left\{ \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot |B(u,t)|\, du \right\} dt$$

$$\leqq \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot \left\{ \int_0^a |B(u,t)|\, dt \right\} du = \int_0^\infty |A(x,u)| \cdot \beta_a(u)\, du,$$

wenn wir das innere Integral beim vorletzten Ausdruck mit $\beta_a(u)$ bezeichnen. Weil aber B die Voraussetzung (Sp) erfüllt, so strebt $\beta_a(u) \to 0$ für $u \to \infty$; daher tut es auch deren $|A|$-Transformation, d. h. der letzte Ausdruck, für $x \to +\infty$. Also erfüllt C auch die Voraussetzung (Sp).

3. Endlich ergibt sich analog der in 1. durchgeführten Rechnung, daß

$$c(x) = \int_0^\infty A(x,u) \left\{ \int_0^\infty B(u,t)\, dt \right\} du = \int_0^\infty A(x,u)\, b(u)\, du,$$

also gleich der A-Transformation der Zeilensummen $b(u)$ von B ist. Weil $b(u) \to b$ strebt und A den Multiplikator a hat, strebt also $c(x) \to ab$. Es ist (Zs) erfüllt mit $c = ab$. Damit ist VII. in allen Teilen bewiesen.

Der Beweis lehrt noch, daß die Existenz von $C(x,t)$ in dem behaupteten Umfange schon gewährleistet ist, wenn A und B wenigstens die Voraussetzung (Zn) erfüllen, und C erfüllt dann ebenfalls diese Voraussetzung. Erfüllen dann A und B weiter die Voraussetzung (Sp), so tut dies auch C. Erfüllen schließlich A und B auch die Voraussetzung (Zs), so tut es auch C.

Da die Produkte zweier Funktionen A und B aus $\mathfrak{B}$ wieder zu $\mathfrak{B}$ gehören, so können nun (und wegen des nachfolgenden Satzes VIII.) ohne weiteres Produkte von mehr Faktoren aus $\mathfrak{B}$ und also auch Potenzen solcher Funktionen gebildet werden. Sie gehören immer wieder zu $\mathfrak{B}$. Hierüber gilt nun weiter:

VIII. *Die durch* (3. 6) *und* (3. 7) *erklärte Multiplikation der Funktionen aus* $\mathfrak{B}$ *ist assoziativ. Doch genügt es dazu auch hier schon, wenn die Faktoren die Voraussetzung* (Zn) *erfüllen.*

Beweis. Es seien A, B, C drei beliebige Funktionen, welche die Voraussetzung (Zn) erfüllen. Dann hat $(AB)C$ für fast alle (x,t) den Wert

$$(AB)C = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty A(x,u)\, B(u,v)\, du \right\} C(v,t)\, dv,$$

während $A(BC)$ für fast alle (x,t) den Wert

$$A(BC) = \int_0^\infty A(x,u) \left\{ \int_0^\infty B(u,v)\, C(v,t)\, dv \right\} du$$

hat. Da für die Verknüpfung der Funktionen $|A|, |B|, |C|$ die entsprechenden Formeln gelten, so darf man in jedem der beiden Integrale die Reihenfolge der Integrationen vertauschen. Da es dann in das andere übergeht, so gilt, wie behauptet, die Gleichung

$$(AB)C = A(BC). \tag{3. 9}$$

Ist $AB = BA$, so sollen A und B wieder *vertauschbar* heißen. Die Multiplikation mit einem Zahlenfaktor α, also die Bildung von αA, und die Addition $A + B$ zweier Verfahren A und B definieren sich wie üblich, d. h. wie bei Funktionen. Diese Addition ist distributiv zur Multiplikation.

Unter den Integraltransformationen existiert bekanntlich keine, welche die Identität liefert[16]). Diese selbst soll, als Transformation oder Operator, mit E bezeichnet werden, so daß für jede Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$

$$E(x; s(t)) = s(x) \tag{3. 10}$$

zu setzen ist. Dies E ist also keine Vermittlungsfunktion $V(x, t)$, insbesondere keine solche aus der Klasse $\mathfrak{V}$, ist aber, wie eine jede von diesen, ein Operator oder eine Transformation, die auf jede Funktion $s(t)$ angewendet werden kann und diese gemäß (3. 10) in sich selbst überführt. Mit dieser Identität können wir nun Aggregate der Form $E + A$ oder allgemeiner der Form $\alpha E + \alpha' A$ bilden, die, als Transformation auf $s(t)$ angewendet, die Funktionen $\alpha\, s(x) + \alpha' A(x; s(t))$ liefern. Man überzeugt sich sofort, daß man mit diesen Aggregaten gemäß

$$(\alpha E + \alpha' A) + (\beta E + \beta' B) = (\alpha + \beta) E + \alpha' A + \beta' B$$

und

$$(\alpha E + \alpha' A)(\beta E + \beta' B) = \alpha\beta E + \alpha'\beta A + \alpha\beta' B + \alpha'\beta AB$$

rechnen darf, d. h. wie mit hyperkomplexen Zahlen $(\gamma + \gamma' j)$, für die $jj = j$ ist. Diese erweiterte Multiplikation ist natürlich auch assoziativ.

Da es keine Identität gibt, entfällt der Begriff des zu einem Verfahren V inversen Verfahrens. Doch kann es zu einer Transformation der Form $(E - A)$ eine Inverse der gleichen Form $(E - B)$ geben (Beispiele s. u. und später in Nr. 4, 5 und 6). Wir nennen $(E - B)$ *rechtsseitig invers* zu $(E - A)$ oder die letzte *linksseitig invers* zur ersten, falls

$$(E - A)(E - B) = E \tag{3. 11}$$

ist (und entsprechend, falls noch Zahlenfaktoren auftreten). Letzteres ist, genau wie bei Matrizen, ersichtlich dann und nur dann der Fall, wenn

$$A + B = AB \tag{3. 12}$$

---

[16]) Das lehrt schon die Transformation der Funktionen $s(t) = s(t, a)$, die bei gegebenem $a > 0$ in $0 < t \leqq a$ den Wert 1, für $t > a$ den Wert 0 haben. Denn für ein Verfahren V, das die Identität lieferte, wäre

$$\int_0^\infty V(x, t)\, s(t, a)\, dt = \int_0^a V(x, t)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 < x \leqq a, \\ 0 \text{ für } x > a. \end{cases}$$

Die erste Feststellung liefert für $x = a$, daß

$$\int_0^x V(x, t)\, dt = 1 \quad \text{für alle } x > 0,$$

die zweite für ein gegen x wachsendes a, daß

$$\int_0^x V(x, t)\, dt = 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

sein müßte. Eine solche Funktion $V(x, t)$ kann es nicht geben.

ist[17]). Sind A und B vertauschbar, so ist offenbar $(E - B)$ auch links invers zu $(E - A)$, diese rechts invers zu jener. Ist umgekehrt $(E - B)$ beiderseits invers zu $(E - A)$, so sind A und B vertauschbar. Es kann höchstens eine solche beiderseitige Inverse zu $(E - A)$ geben. Denn hat $(E - B')$ die gleiche Eigenschaft, so folgt, da unsere Multiplikation assoziativ ist (s. o. und VIII.),

$$E - B' = [(E - B)(E - A)](E - B')$$
$$= (E - B)[(E - A)(E - B')] = (E - B),$$

also $B' = B$. Wir schreiben dann

$$(E - B) = (E - A)^{-1}, \quad (E - A) = (E - B)^{-1} \tag{3.13}$$

und nennen $(E - A)$ und $(E - B)$ und natürlich für $\alpha \neq 0$ auch $(\alpha E - \alpha A)$ und $\left(\frac{1}{\alpha} E - \frac{1}{\alpha} B\right)$ *invers zueinander.*

Die Betrachtungen dieser Nr. 3 vereinfachen sich wieder erheblich, wenn man sich auf die Dreiecksfunktionen $V(x, t)$ aus $\mathfrak{V}_J$ beschränkt, die in den Anwendungen besonders häufig auftreten. In Ergänzung des bisherigen gelten dann die folgenden Zusätze, deren Richtigkeit unmittelbar einzusehen ist:

IX. *Gehört V zu $\mathfrak{V}_J$, so ist die Transformation sogar jeder Funktion aus $\mathfrak{S}$ vorhanden und gehört wieder zu $\mathfrak{S}$. Das gleiche gilt von der $|V|$-Transformation.*

X. *Das Produkt $AB = C$ zweier Funktionen aus $\mathfrak{V}_J$ gehört wieder zu $\mathfrak{V}_J$, und man hat [an Stelle von (3. 6)] einfacher*

$$C(x, t) = \int_t^x A(x, u)\, B(u, t)\, du, \qquad (0 < t < x). \tag{3.14}$$

Auch die Klasse $\mathfrak{V}_J'$ der Verfahren, die nur in dem anderen Halbquadranten $\Delta' : \{0 < x < t\}$ von 0 verschieden sein können, hat die in X. genannte Eigenschaft, daß mit zwei Funktionen A und B auch ihr Produkt $AB = C$ wieder zu $\mathfrak{V}_J'$ gehört. An Stelle von (3. 14) tritt dann die Kompositionsregel

$$C(x, t) = \int_x^t A(x, u)\, B(u, t)\, du, \qquad (0 < x < t). \tag{3.15}$$

Die in (1. 5) genannten Verfahren M, C_k, H_k gehören zu $\mathfrak{V}_J$ und sind permanent, die beiden letzten für alle k mit $\Re(k) > 0$, aber auch nur für diese

[17]) Man erkennt in dieser Beziehung (3. 12) die klassische Beziehung zwischen dem gegebenen und dem lösenden Kern einer Integralgleichung (s. HELLINGER-TOEPLITZ [1], S. 1372).

$k \neq 0$, weil sonst die Zeilensummen gar nicht existieren. Als weiteres Beispiel eines Verfahrens aus $\mathfrak{B}_J$ sei die Vermittlungsfunktion

$$N_p = (p+1)\frac{t^p}{x^{p+1}}, \qquad (0 < t < x;\ p \neq -1), \tag{3.16}$$

genannt, die, wie sich später zeigen wird [s. Fußnote [25])] und wie man auch leicht direkt verifiziert, die C_p-Transformation unmittelbar in die C_{p+1}-Transformation überführt. Sie ist [vgl. (2.14)] dann und nur dann permanent, wenn $\Re(p) = \pi > -1$ ist. Denn wegen

$$\int_0^\infty |N_p|\,dt = \int_0^x |N_p|\,dt = \frac{|p+1|}{\pi+1}$$

ist (Zn) erfüllt. Wegen

$$\int_0^a |N_p|\,dt = \frac{|p+1|}{\pi+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{\pi+1} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty N_p\,dt = \int_0^x N_p\,dt = 1$$

$(a > 0,\ x > 0)$ ist auch (Sp) und (Zs) erfüllt. Die letztere Bedingung ist es aber nur für $\pi > -1$, da andernfalls die Zeilensummen gar nicht vorhanden sind.

Berechnet man [nach (3.14)] die Potenzen der Dreiecksfunktion $M = \frac{1}{x}$, $(0 < t < x)$, so erhält man

$$M^2 = \frac{1}{x}\int_t^x \frac{du}{u} = \frac{1}{x}\log\frac{x}{t}, \quad M^3 = \frac{1}{x}\int_t^x \log\frac{u}{t}\cdot\frac{du}{u} = \frac{1}{2!\,x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^2, \ldots$$

und allgemein für ganzes $k > 0$

$$M^k = \frac{1}{\Gamma(k)}\cdot\frac{1}{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}, \qquad (0 < t < x). \tag{3.17}$$

Es versteht sich von selbst, daß man diese Formel (3.17) wie in (1.5) geschehen, zur Definition von M^k und damit von H_k für alle k benutzt, für die die rechts stehende Funktion brauchbar ist. Das ist aber nur genau dann der Fall, wenn $\Re(k) > 0$ ist; denn für die anderen $k \neq 0$ sind nicht einmal die Zeilensummen vorhanden.

Auch die C_k können ähnlich gewonnen werden, indem man erst die Potenzen der Dreiecksfunktion $S \equiv 1$ bildet [vgl. (2.13)], was

$$S^2 = \int_t^x du = (x-t), \qquad S^3 = \int_t^x (x-u)\,du = \frac{1}{2!}(x-t)^2, \ldots$$

und allgemein für ganzes $k > 0$

$$S^k = \frac{1}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}, \qquad (0 < t < x), \tag{3.18}$$

liefert[18]), und durch die Zeilensummen (das „Gesamtgewicht"), also durch $\frac{1}{k!}x^k$ dividiert. Das liefert die unter (1. 5) gegebene Formel, die man dann wieder als Definition von C_k für alle k nimmt, für die diese Funktion brauchbar ist, was aus denselben Gründen wie eben nur genau für $\Re(k) > 0$ der Fall ist.

Unter den Verfahren, die zu $\mathfrak{B}$, aber nicht zu $\mathfrak{B}_1$ gehören, ist das wichtigste dasjenige, das in der Funktionalanalysis als LAPLACE-Transformation, in der Limitierungstheorie als ABELsche Transformation bezeichnet wird und die Vermittlungsfunktion

$$A = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}, \qquad (x > 0,\ t > 0), \tag{3. 19}$$

hat. Es bedeutet den Übergang von $s(t)$ zu

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} s(t)\, dt.$$

Die sämtlichen bisher genannten Verfahren sind untereinander vertauschbar; denn es gilt allgemein:

XI. *Alle Verfahren der Form*

$$V(x, t) = \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) \tag{3. 20}$$

$\left\{\text{oder } \frac{1}{t} f\left(\frac{t}{x}\right), \text{ was wegen } \frac{1}{t} f\left(\frac{t}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{t} f\left(\frac{t}{x}\right) \text{ auf dasselbe hinauskommt}\right\}$, *sind untereinander vertauschbar.* Ist nämlich

$$W(x, t) = \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right)$$

ein zweites Verfahren dieser Form, so ist

$$V W = \frac{1}{x} \int_0^\infty f\left(\frac{u}{x}\right) \cdot g\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u}$$

und

$$W V = \frac{1}{x} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{u}\right) g\left(\frac{u}{x}\right) \frac{du}{u}.$$

Ersetzt man in einem dieser Integrale u durch $\frac{xt}{u}$, so geht es in das andere über. Es ist also

$$VW = WV. \tag{3. 21}$$

---

[18]) Diese Integraltransformation S^k spielt bekanntlich bei der Erklärung der Differentiation gebrochener Ordnung eine Rolle; vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, A 2, S. 116ff.

Zu diesen Verfahren gehören auch die beiden folgenden aus der Klasse $\mathfrak{B}_{\mathcal{J}}$, die für ein $p \neq 0$ und $0 < x < t$ durch

$$V(x,t) = p\frac{x}{t^2}, \qquad W(x,t) = p\frac{x^{p+1}}{t^{p+2}} \tag{3.22}$$

gegeben sind und sonst in Q gleich 0 sind. Wir zeigen noch, daß $(E + V)$ und $(E - W)$ im Sinne von (3. 13) zueinander invers sind. Da die Verfahren vertauschbar sind, genügt es gemäß (3. 12) zu zeigen, daß $VW = V - W$ ist. Für $0 < x < t$ ist aber tatsächlich [s. (3. 15)]

$$V\,W = p^2 \frac{x}{t^{p+2}} \int_x^t \frac{u^{p+1}}{u^2}\,du = p\,\frac{x}{t^{p+2}}\,[u^p]_x^t = V - W.$$

Andere Paare zueinander inverser Verfahren der Form $(E + V)$ werden in den Nrn. 4, 5 und 6 auftreten.

Schließlich sei noch betont, daß sich alles Wesentliche von den allgemeinen Betrachtungen dieser Nummern auch auf Transformationen der Formen

$$\int_{-\infty}^{0} V(x,t)\,s(t)\,dt \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} V(x,t)\,s(t)\,dt$$

übertragen läßt. Auch der Fall, daß bei den Transformationen die Zeilennummer durch eine stetige Veränderliche, die Spaltennummer durch die ganzen Zahlen (oder umgekehrt) bezeichnet wird (Beispiele s. Nr. 7), erledigt sich in derselben Weise.

4. Der Äquivalenzsatz[19]. Beide Äquivalenzsätze ergeben sich in wenigen Schritten aus der folgenden Identität

$$(p+1)\,M\,C_p - p\,M\,C_{p+1} = C_{p+1}, \qquad (\Re(p) > 0), \tag{4.1}$$

bei der M und C_k (und später H_k) die in (1. 5), (1. 6) und (1. 7) angegebene Bedeutung haben. Sie wurde von I. Schur für den matrizialen Fall und ganzzahlige $p \geqq 0$ schon 1913 aufgestellt [1]; doch hat er die entscheidende Folgerung für die *beiden* Behauptungen des Äquivalenzsatzes erst in der Note [4] von 1930 daraus gezogen.

Beweis von (4. 1). a) Die Integralverfahren M und C_k (und H_k) sind nach (3. XI) für $\Re(k) > 0$ untereinander vertauschbar. Für $\Re(p) > 0$ ist also

$$C_p M = M C_p \tag{4.2}$$

[19]) In den Nr. 4, 5 und 6 treten nur Verfahren aus $\mathfrak{B}_{\mathcal{J}}$ auf. Die Vermittlungsfunktionen und -matrizen brauchen daher nur für $0 < t < x$ bzw. $0 \leqq \nu \leqq n$ angegeben zu werden.

und nach (3. 14) sind beide

$$= \frac{p}{x}\int_t^x \left(1-\frac{u}{x}\right)^{p-1}\frac{du}{u}.$$

Hiernach ist also

$$(p+1)\,M\,C_p - p\,M\,C_{p+1} = \frac{p(p+1)}{x}\int_t^x \left\{\left(1-\frac{u}{x}\right)^{p-1} - \left(1-\frac{u}{x}\right)^{p}\right\}\frac{du}{u}$$

$$= \frac{p(p+1)}{x}\int_t^x \left(1-\frac{u}{x}\right)^{p-1} d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{p+1}{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{p} = C_{p+1},$$

womit (4. 1) für diesen Fall schon bewiesen ist.

b) Auch im matrizialen Fall sind M und C_p, sogar für alle $p \neq -1, -2, \ldots$ vertauschbar[20]). Der direkte Beweis ergibt sich am leichtesten, wenn man statt (4. 2) die dasselbe besagende Beziehung $M^{-1}C_p = C_pM^{-1}$ beweist. Da nämlich M^{-1} die Matrix

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & & & \\ 0 & -2 & 3 & & \\ 0 & 0 & -3 & 4 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

hat, so hat für eine beliebige Dreiecksmatrix $A = (a_{n\nu})$ die Matrix $M^{-1}A$ an der Stelle (n, ν) das Element

$$-n a_{n-1,\nu} + (n+1)\,a_{n\nu},$$

AM^{-1} dagegen das Element

$$(\nu+1)\,a_{n\nu} - (\nu+1)\,a_{n,\nu+1}.$$

Beide sind also dann und nur dann einander gleich, wenn

$$(n-\nu)\,a_{n\nu} = n a_{n-1,\nu} - (\nu+1)\,a_{n,\nu+1}$$

ist. Setzt man hier $A = C_p$, also $a_{n\nu} = \binom{n-\nu+p-1}{n-\nu} \Big/ \binom{n+p}{n}$, und multipliziert mit $\binom{n+p}{n}$, so lautet diese Gleichung

$$(n-\nu)\binom{n-\nu+p-1}{n-\nu} = (n+p)\binom{n-\nu-1+p-1}{n-\nu-1} - (\nu+1)\binom{n-\nu-1+p-1}{n-\nu-1},$$

---

[20]) Das ist auf mannigfache Art, aber immer auf Umwegen, bewiesen worden; s. Schur [1], Hurwitz-Silverman [1], Knopp [4].

die man sofort als richtig nachprüft. Also gilt auch hier (4. 2) in dem behaupteten Umfange. Nun ist weiter

$$(p+1)\,C_p - p\,C_{p+1} = (p+1)\binom{n-\nu+p-1}{n-\nu}\Big/\binom{n+p}{n} - p\binom{n-\nu+p}{n-\nu}\Big/\binom{n+p+1}{n}$$

$$= (\nu+1)\binom{n-\nu+p-1}{n-\nu}\Big/\binom{n+p+1}{n}.$$

Also ist nach (2. 1)

$$((p+1)\,C_p - p\,C_{p+1})\,M = \frac{1}{\binom{n+p+1}{n}}\sum_{\mu=\nu}^{n}\binom{n-\mu+p-1}{n-\mu}(\mu+1)\cdot\frac{1}{\mu+1}\,.$$

$$= \frac{1}{\binom{n+p+1}{n}}\sum_{\lambda=0}^{n-\nu}\binom{\lambda+p-1}{\lambda} = \frac{\binom{n-\nu+p}{n-\nu}}{\binom{n+p+1}{n}} = C_{p+1}.$$

Wegen (4. 2) ist hiermit (4. 1) auch für Matrizen und jedes $p \neq -1, -2, \ldots$ bewiesen.

Beweis des Äquivalenzsatzes für ganzzahlige $k \geqq 2$[21]). Für die integralen und die matrizialen Verfahren ist nun gemeinsam

$$M\,C_p = \frac{1}{p+1}\,(E + p\,M)\,C_{p+1}. \tag{4. 3}$$

Für $p = 1$ liefert dies

$$M\,C_1 = M^2 = \tfrac{1}{2}\,(E + M)\,C_2$$

und wegen der Vertauschbarkeit von M mit $(E + pM)$ oder mit C_p weiter

$$M^3 = \tfrac{1}{2}\,(E + M)\,M\,C_2.$$

Nach (4. 3) für $p = 2$ ist also

$$M^3 = \frac{1}{3!}\,(E + M)\,(E + 2\,M)\,C_3.$$

Fährt man so fort, so ergibt sich für jedes ganze $k \geqq 2$

$$H_k = M^k = \frac{1}{k!}\,(E + M)\,(E + 2\,M)\ldots(E + \overline{k-1}\,M)\,C_k. \tag{4. 4}$$

In

$$P_k = \frac{1}{k!}\,(E + M)\,(E + 2\,M)\ldots(E + \overline{k-1}\,M) \tag{4. 5}$$

ist also die in der Einleitung genannte Transformation, die die C_k in die H_k überführt, explizit und in übersichtlicher Darstellung gewonnen[22]). Es ist

$$H_k = P_k C_k, \tag{4. 6}$$

[21]) Für $k = 0$ und $k = 1$ ist der Satz trivial. — Dieser Abschnitt folgt dem Beweisgang von I. SCHUR in den Arbeiten von 1913 [1] und 1930 [4].

[22]) I. SCHUR [1] beweist (4. 1) für Matrizen und ganzzahlige $p \geqq 1$ auf etwas anderem Wege direkt, ohne die Vertauschbarkeit von M und C_p zu benutzen, folgert

und da mit M offenbar auch $\frac{1}{p+1}(E + pM)$ für jedes p permanent ist, so ist es auch P_k. Damit hat man schon die erste Hälfte des Äquivalenzsatzes: Aus (1. 8) folgt (1. 9) und aus (1. 10) folgt (1. 11), ($k \geqq 2$ ganz)[23]).

Für den umgekehrten Schluß genügt es zu zeigen, daß $(E + pM)$ eine linksseitige Inverse besitzt und daß diese wiederum permanent ist. Nun verifiziert man aber sofort, daß

$$(4.7) \qquad \left(E - \frac{p}{p+1} N_p\right)(E + pM) = E$$

ist, wenn N_p die Vermittlungsfunktion

$$(4.8)\ N_p = (p+1)\frac{t^p}{x^{p+1}} \quad \text{bzw. die Matrix} \quad N_p = \binom{\nu+p}{\nu} \Big/ \binom{n+p+1}{n}$$

bedeutet. Nach (3. 12) hat man dazu nur zu zeigen, daß

$$(4.9) \qquad \frac{p^2}{p+1} N_p M = pM - \frac{p}{p+1} N_p$$

ist. Im integralen Fall ist aber [sogar für alle p[24])] tatsächlich

$$\frac{p^2}{p+1} N_p M = \frac{p^2}{x^{p+1}} \int_t^x u^p \frac{du}{u} = \frac{p}{x^{p+1}}[x^p - t^p] = pM - \frac{p}{p+1} N_p,$$

---

sodann (4. 4) wie oben und kann daraus rückwärts die Vertauschbarkeit von M und C_p für ganze $p \geqq 1$ folgern. Denn multipliziert man (4. 4) einmal linksseitig, ein andermal rechtsseitig mit M, so erhält man, da links beidemal M^{k+1} entsteht und auf der rechten Seite die Faktoren $(E + pM)$ gewiß mit M vertauschbar sind,

$$(E + M) \ldots (E + \overline{k-1}\, M)\, M C_k = (E + M) \ldots (E + \overline{k-1}\, M)\, C_k M.$$

Da nun nach der Bemerkung zu (2. 9) und wie im Text sogleich gezeigt wird [s. (4. 7)], $(E + pM)^{-1}$ für jedes $p = 1, 2, \ldots$ existiert, so folgt hieraus in der Tat $M C_k = C_k M$, wenigstens für ganze $k \geqq 1$.

[23]) Multipliziert man die rechte Seite in (4. 5) aus, so ergibt sich eine Darstellung von P_k als Polynom $(k-1)$-ten Grades in M:

$$(4.5') \qquad P_k = \frac{1}{k!}\left(E + a_{k1} M + a_{k2} M^2 + \ldots + a_{k,k-1} M^{k-1}\right),$$

in der die $a_{k\nu}$ positive ganze Zahlen (mit der Summe $k! - 1$) sind. P_k ist also eine „echte" Transformation (näheres s. KNOPP [5], S. 102), und es folgt genauer: Für jede Funktion $s(t)$ bzw. Folge s_ν liegt der H_k-Kern im C_k-Kern. Für reelles $s(t)$ bedeutet dies z. B., daß für $x \to \infty$

$$\underline{\lim}\, C_k(x; s(t)) \leqq \underline{\lim}\, H_k(x; s(t)) \leqq \overline{\lim}\, C_k(x; s(t))$$

ist — und entsprechend im matrizialen Fall.

[24]) Für $p = 0$ ist die Behauptung trivial; für $p = -1$ ist $\frac{p}{p+1} N_p = -\frac{1}{t}$ zu setzen.

womit (4. 9) schon bewiesen ist. Und fast ebenso leicht ergibt sich im matrizialen Fall für jedes $p \neq -1, -2, \ldots$

$$\binom{n+p+1}{n} N_p M = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu+p}{\mu} \frac{1}{\mu+1} = \frac{1}{p} \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu+p}{\mu+1}$$
$$= \frac{1}{p}\left[\binom{n+p+1}{n+1} - \binom{\nu+p}{\nu}\right],$$

also

$$\frac{p^2}{p+1} N_p M = \frac{p}{p+1} \frac{1}{\binom{n+p+1}{n}} \left[\binom{n+p+1}{n+1} - \binom{\nu+p}{\nu}\right]$$
$$= pM - \frac{p}{p+1} N_p,$$

womit (4. 9) auch für diesen Fall und folglich (4. 7) für beide Fälle bewiesen ist[25]). Doch gehört in beiden Fällen N_p dann und nur dann wieder zur Klasse $\mathfrak{B}$, wenn $\Re(p) > -1$ ist.

Nunmehr ergibt sich aus (4. 4) ohne weiteres

$$C_k = k!\left(E - \frac{k-1}{k} N_{k-1}\right) \ldots \left(E - \frac{1}{2} N_1\right) H_k. \tag{4.10}$$

In

$$Q_k = (kE - \overline{k-1}\, N_{k-1}) \ldots (2E - N_1) \tag{4.11}$$

ist also auch die in der Einleitung genannte Transformation, die die H_k in die C_k überführt, explizit und wieder in sehr übersichtlicher Form gewonnen[26]):

$$C_k = Q_k H_k. \tag{4.12}$$

---

[25]) In Nr. 5 wird die Inverse zu $(E + pM)$ noch auf anderem Wege gewonnen. I. SCHUR gewinnt sie in seiner Note aus 1930 [4] im matrizialen Falle so: Da die Matrix C_p ganz offenbar eine Inverse C_p^{-1} besitzt, so kann (4. 1) in der Form

$$C_{p+1} = \{(p+1)E - p\, C_{p+1}\, C_p^{-1}\}\, M\, C_p \tag{4.1'}$$

geschrieben werden. Der Vergleich mit (4. 3) zeigt, daß die in der geschweiften Klammer stehende Matrix (links-)invers zu $(E + pM)$ und insbesondere, daß

$$N_p = C_{p+1}\, C_p^{-1}$$

ist. Im integralen Fall kann nicht so geschlossen werden. Hat man jedoch erkannt, daß $C_{p+1} = N_p C_p$ ist [was man nach (3. 14) ganz leicht verifiziert], daß also durch N_p die C_p-Mittel direkt in die C_{p+1}-Mittel übergeführt werden, und daß alle hier auftretenden Verfahren untereinander vertauschbar sind [vgl. (3. XI)], so kann (4. 1) auch in diesem Falle in der Form

$$C_{p+1} = \{(p+1)E - pN_p\}\, M\, C_p \tag{4.1''}$$

geschrieben und nun durch Vergleich mit (4. 3) derselbe Schluß gezogen werden.

[26]) Da sich, wie man leicht nachrechnet, $N_p N_q$ für $p \neq q$ linear durch N_p und N_q darstellt, so ergibt sich für Q_k eine lineare Verbindung von $E, N_1, N_2, \ldots, N_{k-1}$ oder also eine Transformation der Form

$$Q_k = E + \frac{1}{x} q_k\left(\frac{t}{x}\right),$$

in der $q_k(z)$ ein Polynom $(k-1)$-ten Grades ohne konstantes Glied bedeutet $(k \geqq 2)$. Für dieses Polynom gab GARTEN [2] eine rekursive Erzeugung an.

Um nun aus (4. 10) auch die zweite Hälfte des Äquivalenzsatzes [„Aus (1. 9) folgt (1. 8)" bzw. „Aus (1. 11) folgt (1. 10)"] abzulesen, bedarf es nur noch der Feststellung, daß die N_p für $p = 1, 2, \ldots$ permanent sind. Für diese p ist aber die Permanenz von N_p ohne weiteres zu erkennen, die bei (2. 14) und (3. 16) sich sogar schon für beliebige p mit $\Re(p) > -1$ ergeben hat[27]).

5. Zusammenhang mit Volterraschen Integralgleichungen. Nach (4. 7) ist $\left(E - \frac{p}{p+1} N_p\right)$ linksseitig invers zu $(E + pM)$. Sie ist aber auch rechts invers zur letzten. Um dies zu erkennen, genügt es [vgl. die Bemerkung zu (3. 12)], die Vertauschbarkeit von N_p und M zu beweisen. Im integralen Fall folgt sie aus (3. XI), im matrizialen ist

$$M N_p = \frac{1}{n+1} \binom{\nu + p}{\nu} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\binom{\mu + p + 1}{\mu}},$$

$$N_p M = \frac{1}{\binom{n + p + 1}{n}} \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu + p}{\mu} \frac{1}{\mu + 1}.$$

Beide Produkte sind aber $= \frac{p+1}{p} M - \frac{1}{p} N_p$. Für das zweite sahen wir dies schon bei (4. 9), und für das erste folgt es aus der Bemerkung, daß

$$\frac{1}{\binom{\mu + p}{\mu}} - \frac{1}{\binom{\mu + 1 + p}{\mu + 1}} = \frac{p}{p+1} \frac{1}{\binom{\mu + p + 1}{\mu}}$$

und folglich die in MN_p auftretende Summe $= \frac{p+1}{p} \left| \frac{1}{\binom{\nu + p}{\nu}} - \frac{1}{\binom{n + 1 + p}{n+1}} \right|$ ist, so daß wieder $MN_p = \frac{p+1}{p} M - \frac{1}{p} N_p$ wird.

Schreibt man nun die Tatsache, daß die beiden eingangs genannten Transformationen zueinander invers sind, für Funktionen auf, so hat man das reziproke Paar von Gleichungen

$$f(x) + \frac{p}{x} \int_0^x f(t)\, dt = g(x) \tag{5. 1}$$

$$g(x) - \frac{p}{x^{p+1}} \int_0^x t^p g(t)\, dt = f(x) \tag{5. 2}$$

vor sich, von denen jede aus der anderen folgt, wofern wir uns auf Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ der Klasse $\mathfrak{S}$ beschränken und $\Re(p) > -1$ ist. Betrachten wir

[27]) Nach der in der vorigen Fußnote genannten Bedeutung von N_p ist die Permanenz von N_p mit dem Permanenzsatz des C_p-Verfahrens gleichbedeutend, d. h. mit der Tatsache, daß aus der C_p-Limitierbarkeit stets die C_{p+1}-Limitierbarkeit folgt.

in (5. 1) $g(x)$ als gegeben und $f(t)$ als gesucht, so haben wir, wenn wir noch wie hier üblich, p durch λ ersetzen, die VOLTERRAsche Integralgleichung 2. Art

$$f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{x} f(t)\, dt = g(x) \tag{5.3}$$

vor uns, die für $\lambda = p$ durch (5. 2) gelöst wird. Da ihr Kern

$$K(x,t) = M = \frac{1}{x}$$

in Δ nicht beschränkt ist, ist die Integralgleichung singulär. Wegen (5. 2) hat der zugehörige lösende Kern $\Gamma(x,t;\lambda)$ für $\lambda = p$ den Wert

$$\Gamma(x,t;p) = \frac{p}{x}\left(\frac{t}{x}\right)^p. \tag{5.4}$$

Diese Tatsache und damit ein methodischer Weg zur Auffindung der Inversen zu $(E + pM)$ ergibt sich nun auch aus der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen. Die Gleichung (5. 3), d. h. $(E + \lambda M) f = g$ hat formal die Lösung

$$f = \frac{1}{E + \lambda M} g = (E - \lambda M + \lambda^2 M^2 - + \cdots) g. \tag{5.5}$$

Die hier auftretende Reihe $\sum (-\lambda M)^\varrho$ ist aber in unserem Falle wegen $M^{\varrho+1} = H_{\varrho+1} = \frac{1}{\varrho!}\frac{1}{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^\varrho$ in Δ (d. h. für $0 < t < x$) und für alle λ tatsächlich konvergent und liefert eine Transformation $E - \Gamma$ mit der für $\Re(\lambda) > -1$ wieder zu $\mathfrak{B}$ gehörigen, in λ ganzen Funktion

$$\Gamma = -\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-\lambda M)^{\varrho+1} = \frac{\lambda}{x}\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(-1)^\varrho}{\varrho!}\left(\lambda \log\frac{x}{t}\right)^\varrho \tag{5.6}$$

$$= \frac{\lambda}{x} e^{-\lambda \log\frac{x}{t}} = \frac{\lambda}{x}\left(\frac{t}{x}\right)^\lambda.$$

Überdies ist

$$\lambda M \left\{\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-\lambda M)^\varrho\right\} = -\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-\lambda M)^{\varrho+1} = -\sum_{\varrho=1}^{\infty} (-\lambda M)^\varrho,$$

weil bei festem $0 < t < x$ die links geforderte Integration

$$\frac{\lambda}{x}\int_t^x \left\{\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-\lambda)^\varrho M^\varrho(u,t)\right\} du$$

offenbar gliedweise ausgeführt werden darf und dann die rechts stehende Reihe liefert. Also ist

$$(E + \lambda M)\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-\lambda M)^\varrho = \sum_{\varrho=0}^{\infty} - \sum_{\varrho=1}^{\infty} = E,$$

d. h. $(E - \Gamma)$ für jedes λ rechtsinvers zu $(E + \lambda M)$. Für $\lambda = p$ ist $\Gamma = \frac{p}{p+1} N_p$ und man hat für $\Re(p) > -1$ in $\left(E - \frac{p}{p+1} N_p\right) g = f$, d. h. in (5. 2) die Lösung von (5. 1)[28]).

Ebenso leicht liefert natürlich der allgemeine Ansatz auch umgekehrt die durch (5. 1) gegebene Funktion $g(x)$ also Lösung von (5. 2), d. h. genauer als Lösung der Volterraschen Integralgleichung

$$g(x) - \frac{\lambda}{x^{p+1}} \int_0^x t^p g(t)\, dt = f(x), \qquad (\Re(p) > -1), \tag{5. 7}$$

[$f(x)$ gegeben, $g(x)$ gesucht] für $\lambda = p$. Denn diese Gleichung oder also mit der Bezeichnung aus (4. 8) die Gleichung $\left(E - \frac{\lambda}{p+1} N_p\right) g = f$ hat formal die Lösung

$$g = \frac{1}{E - \frac{\lambda}{p+1} N_p} f = \left\{ \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p+1} N_p\right)^{\varrho} \right\} f. \tag{5. 8}$$

Für die Potenzen von N_p hat man jetzt

$$N_p^2 = (p+1)^2 \frac{t^p}{x^{p+1}} \int_t^x u^p \frac{du}{u^{p+1}} = (p+1)^2 \frac{t^p}{x^{p+1}} \log \frac{x}{t}$$

und allgemein für $\varrho \geqq 1$

$$N_p^{\varrho} = \frac{(p+1)^{\varrho}}{(\varrho-1)!} \frac{t^p}{x^{p+1}} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\varrho-1}$$

Die in (5. 8) auftretende Reihe ist daher wieder für alle (x, t) in Δ und für jedes λ konvergent und liefert die Transformation $E + \Gamma^*$ mit der wieder zu $\mathfrak{P}$ gehörigen, in λ ganzen Funktion

$$\Gamma^* = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p+1} N_p\right)^{\varrho} = \lambda \frac{t^p}{x^{p+1}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\varrho}}{\varrho!} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\varrho} = \frac{\lambda}{x} \left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda-p}.$$

---

[28]) Im Falle stetiger Funktionen f und g kann man (5. 1) natürlich auch als die Differentialgleichung

$$F' + \frac{\lambda}{x} F = g$$

für die Funktion $F = \int_0^x f(t)\, dt$ auffassen, was für $\Re(\lambda) > -1$ zu

$$F(x) = \frac{1}{x^{\lambda}} \int_0^x t^{\lambda} g(t)\, dt$$

und damit wieder zu der Darstellung (5. 2) von $f(x)$ führt.

Für $\lambda = p$ erhalten wir also die erwartete Funktion $\Gamma^* = \frac{p}{x} = pM$. Aus den entsprechenden Gründen wie vorhin bedeutet dies aber, daß auch umgekehrt (5. 2) durch (5. 1) gelöst wird.

Im matrizialen Falle kann man nicht so schließen. Denn weil die Potenzen von M an der Stelle (0, 0) sämtlich das Element 1 haben, ist die Reihe $\sum_{\varrho} (-\lambda M)^\varrho$ höchstens für $|\lambda| < 1$ konvergent; für diese λ aber konvergiert sie tatsächlich, da alle Elemente von M^ϱ nicht negativ und $\leqq 1$ sind. Aber selbst für $|\lambda| < 1$ führt dieser Weg, wegen der verwickelten Form der Matrix M^ϱ nicht ohne weiteres zu der Inversen von $(E + \lambda M)$[29]).

Setzt man die Darstellung (5. 6) von Γ oder also die Darstellung

$$N_p = (p+1) \sum_{\varrho=0}^{\infty} (-p)^\varrho M^{\varrho+1}$$

in (4. 11) ein und denkt sich die dortigen Faktoren ausmultipliziert, so erhält man, als Gegenstück zu (4. 5'), auch die für $0 < t < x$ konvergente Entwicklung von Q_k (im integralen Falle) nach Potenzen von M:

$$Q_k = E + \sum_{\varrho=0}^{\infty} b_{k\varrho} M^{\varrho+1}, \tag{5. 9}$$

in der die $b_{k\varrho}$ wieder ganze Zahlen sind, jetzt aber nicht sämtlich mit demselben Vorzeichen.

6. Zusammenhang mit den reversiblen und den konvergenzgleichen Verfahren. Gilt für zwei vertauschbare Verfahren A und B aus $\mathfrak{B}$, wie im Vorangehenden für $A = -pM$ und $B = \frac{p}{p+1} N_p$, die Beziehung

$$(E - A)(E - B) = (E - B)(E - A) = E, \tag{6. 1}$$

---

[29]) Unter Benutzung der bei (2. 10) gemachten Bemerkung läßt sich dieser Weg weiter verfolgen. Denn nach ihr ist $D\Gamma D$ eine Diagonalmatrix, deren n-tes Diagonalelement den Wert

$$-\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-\lambda)^{\varrho+1} \left(\frac{1}{(n+1)^{\varrho+1}}\right) = \frac{\lambda}{n+1} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{n+1}} = \frac{\lambda}{n+1+\lambda}$$

hat. Daher hat Γ selbst an der Stelle (n, ν) das Element [vgl. (2. 12)]

$$\Gamma_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^{\mu+\nu} \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{\nu} \frac{\lambda}{n+1+\lambda},$$

für das man nach einiger Rechnung den Wert $\frac{p}{p+1} \binom{\nu+p}{\nu} \Big/ \binom{n+p+1}{n}$, für Γ also die Matrix $\frac{1}{p+1} N_p$ mit N_p aus (4. 8) findet. Damit ist auch auf diesem Wege die Beziehung (4. 7) für $|p| < 1$ bewiesen. Da es sich aber hier um algebraische Identitäten handelt, so erstreckt sich ihre Gültigkeit sogleich auf alle p, für die die Ausdrücke sinnvoll sind, d. h. auf alle $p \neq -1, -2, \ldots$.

so sollen die Transformationen $E - A$ und $E - B$ und allgemeiner die Transformationen $\alpha E - \alpha A$ und $\frac{1}{\alpha} E - \frac{1}{\alpha} B$, $\alpha \neq 0$, *formal umkehrbar* genannt werden. Bei gegebenem $\sigma(t)$ aus $\mathfrak{S}$ gibt es dann ein und nur ein $s(t)$ in $\mathfrak{S}$, für das

$$(E - A)\, s = \sigma \tag{6.2}$$

ist. Denn $s = (E - B)\,\sigma$ erfüllt diese Gleichung; und täte es auch $\bar{s} = \bar{s}(t)$, so wäre

$$(E - A)\,(\bar{s} - s) = 0, \tag{6.3}$$

d. h. $\bar{s}(t) - s(t)$ wäre eine Lösung der zu (6. 2) gehörigen homogenen Gleichung. Eine solche ist aber, außer der trivialen, in $\mathfrak{S}$ nicht vorhanden; denn aus (6. 3) folgt, weil die Funktion 0 zu $\mathfrak{S}$ gehört, durch linke Multiplikation mit $(E - B)$, daß $\bar{s} - s \equiv 0$, also $\bar{s} \equiv s$ ist.

In der Limitierungstheorie nennt man ein konvergenzerhaltendes Verfahren *reversibel* (s. Schur [1], S. 450, und [2], S. 96), wenn aus der Konvergenz der Ergebnisfunktion $\sigma(x) \to \sigma$ rückwärts die Konvergenz der Ausgangsfunktion $s(x) \to s$ folgt[30]). Weil nun A und B zu $\mathfrak{P}$ gehören sollen, also konvergenzerhaltend sind, so gilt: *Ein formal umkehrbares Verfahren $E - A$ ist stets reversibel.*

Im Falle der Gleichungen (5. 1) und (5. 2) liegen aber, wenn wir noch auf Gleichheit der Grenzwerte normieren, die Dinge genauer so: Strebt $s(x) \to s$ für $x \to +\infty$, so strebt auch

$$\sigma(x) = \frac{1}{p+1}\left\{s(x) + \frac{p}{x}\int_0^x s(t)\,dt\right\}. \tag{6.4}$$

gegen s[31]). Aus dieser der Gleichung (5. 1) entsprechenden Gleichung folgt aber

$$s(x) = (p+1)\left\{\sigma(x) - \frac{p}{x^{p+1}}\int_0^x t^p\,\sigma(t)\,dt\right\}. \tag{6.5}$$

Die in (6. 4) und (6. 5) rechts stehenden Transformationen sind aber *beide* permanent, wenn nur $\Re(p) > -1$ ist, und sind auch nur in diesem Falle *beide* permanent. Dies lehrt, daß $\sigma(x)$ *nur* für konvergente $s(x)$ selbst konvergent ausfällt. Ein solches Verfahren, also ein permanentes Limitierungsverfahren, welches jedoch nur konvergente Funktionen[30]) (bzw. Folgen) zu limitieren vermag, wird nach dem Vorschlag von J. Karamata *konvergenzgleich* genannt. Mit dieser Bezeichnung können wir sagen:

[30]) Wir lassen weiterhin nur Funktionen aus $\mathfrak{S}$ zur Transformation zu.

[31]) Die folgenden Grenzübergänge sind stets für $x \to +\infty$ bzw. $n \to +\infty$ zu verstehen.

Ein Verfahren der Form $\alpha E + (1-\alpha)A$, $\alpha \neq 0$, *mit permanentem* A *aus* $\mathfrak{B}$ *(also* A *aus* $\mathfrak{B}_1$*) ist konvergenzgleich, wenn es formal umkehrbar ist und wenn bei seiner Inversen, sobald sie in der Form* $\frac{1}{\alpha} E - \frac{1-\alpha}{\alpha} B$ *geschrieben wird, das Verfahren* B *wieder zu* $\mathfrak{B}_1$ *gehört. Und ein formal umkehrbares Verfahren der genannten Form ist auch nur in diesem Falle konvergenzgleich.* Denn unter den Bedingungen dieses Satzes folgt in der Tat aus

$$(\alpha E + (1-\alpha)A)\, s \equiv \sigma(x) \to s,$$

daß umgekehrt

$$s(x) = \left(\frac{1}{\alpha} E - \frac{1-\alpha}{\alpha} B\right)(\alpha E + (1-\alpha)A)\, s = \left(\frac{1}{\alpha} E - \frac{1-\alpha}{\alpha} B\right)\sigma$$

ist; und aus $\sigma(x) \to s$ folgt nun $s(x) \to s$ dann und nur dann stets, wenn B permanent ist. Insbesondere sind also die durch (6. 4) und (6. 5) gegebenen Verfahren, oder — wir setzen $\frac{1}{p+1} = \alpha$ —, die Verfahren

$$\alpha E + (1-\alpha) M \quad \text{und} \quad \frac{1}{\alpha} E - \frac{1-\alpha}{\alpha} N_p, \qquad \left(p = \frac{1-\alpha}{\alpha}\right),$$

für $\Re(\alpha) > 0$, aber nur für diese α, konvergenzgleich und zueinander invers.

Sind $\alpha_\varrho E + (1-\alpha_\varrho) A_\varrho$ für $\varrho = 0, 1, \ldots, r$ konvergenzgleiche Verfahren der eben betrachteten Form, ist für diese ϱ also $\alpha_\varrho \neq 0$ und A_ϱ aus $\mathfrak{B}_1$, und ist jedes der Verfahren formal umkehrbar, etwa mit der Inversen $\frac{1}{\alpha_\varrho} E - \frac{1-\alpha_\varrho}{\alpha_\varrho} B_\varrho$ mit B_ϱ in $\mathfrak{B}_1$, so sind auch die Verfahren

$$(6.6) \qquad \prod_{\varrho=0}^{r} (\alpha_\varrho E + (1-\alpha_\varrho) A_\varrho) \quad \text{und} \quad \prod_{\varrho=0}^{r} \left(\frac{1}{\alpha_{r-\varrho}} E - \frac{1-\alpha_{r-\varrho}}{\alpha_{r-\varrho}} B_{r-\varrho}\right)$$

konvergenzgleiche Verfahren derselben Form und zu einander invers. Ist insbesondere $c_0 + c_1 z + \cdots + c_r z^r = c_0 \prod_{\varrho=1}^{r} (1 + \omega_\varrho z)$ ein beliebiges Polynom, für das $c_0 \neq 0$ und $\Re(\omega_\varrho) > -1$ ist, $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$, so ist die Transformation

$$(6.7) \qquad c_0 \prod_{\varrho=1}^{r} (E + \omega_\varrho M) = c_0 + c_1 M + \cdots + c_r M^r$$

konvergenzgleich. Ihre Inverse kann wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in der Form

$$(6.8) \qquad \frac{1}{c_0} \prod_{\varrho=1}^{r} \left(E - \frac{\omega_\varrho}{\omega_\varrho + 1} N_{\omega_\varrho}\right)$$

geschrieben werden; sie liefert ebenfalls ein konvergenzgleiches Verfahren.

Die Betrachtungen dieser Nummer können ohne weiteres auch so gelesen werden, als wären sie für den matrizialen Fall geschrieben, wofern man nur an Stelle der Funktionen $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ beliebige Zahlenfolgen s_ν verwendet.

Wir heben nur besonders hervor, daß

$$\sigma_n = \frac{1}{p+1} s_n + \frac{p}{p+1} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \tag{6.9}$$

und

$$s_n = (p+1)\sigma_n - \frac{p}{\binom{n+p+1}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+p}{\nu} \sigma_\nu \tag{6.10}$$

für alle $p \neq -1, -2, \ldots$ Umkehrungen voneinander, und daß sie für $\Re(p) > -1$, aber nur für diese p, beide konvergenzgleich sind.

Bezüglich (6. 9) ist dies der von I. Schur bei seinem ersten Beweise des Äquivalenzsatzes benutzte Umkehrsatz (s. [1], S. 453), der eine Variante und Verallgemeinerung eines schon früher von J. Mercer [1] bewiesenen Satzes darstellt; bezüglich (6. 4) ist es der analoge Satz für Funktionen, der im Anschluß an J. Mercer zuerst von G. H. Hardy [1] aufgestellt wurde und von E. Landau [1] beim Beweis des Äquivalenzsatzes für Integralmittel benutzt wurde. Daß (6. 7) im matrizialen Falle ein konvergenzgleiches Verfahren liefert, findet sich schon bei W. A. Hurwitz und L. L. Silverman [1], S. 14, und I. Schur [4], S. 11.

7. Übergang zur A-Transformation. Der Vollständigkeit halber seien nun noch die Transformationen explizit angegeben, die von den C_k- oder H_k-Mitteln direkt zu den Abelschen oder A-Mitteln überführen, die die Vermittlungsfunktion (3. 19) bzw. die Vermittlungsmatrix

$$(1-z)z^\nu \quad \text{mit} \quad z = e^{-\frac{1}{x}}, \qquad (x > 0), \tag{7.1}$$

haben. Bei dieser durchläuft also die Zeilennummer x alle positiven, die Spaltennummer ν nur die nichtnegativen ganzen Zahlen (vgl. die Schlußbemerkung von Nr. 3). Es gilt:

I. *Der Übergang von C_k zu A wird durch die Transformation R_k vermittelt, die im integralen Falle durch*

$$R_k = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{t}{x}\right)^k e^{-\frac{t}{x}}, \quad (0 < x, 0 < t; \Re(k) > 0), \tag{7.2}$$

und im matrizialen Falle durch

$$R_k = (1-z)^{k+1} \binom{\nu+k}{\nu} z^\nu, \quad (x > 0, \nu = 0, 1, 2, \ldots; k \neq -1, -2, \ldots), \tag{7.3}$$

gegeben ist. In beiden Fällen ist also

$$A = R_k C_k. \tag{7.4}$$

Beweis. Gemäß (3. 6) ist

$$R_k C_k = \frac{k}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{1}{x^{k+1}} \int_t^\infty u^k e^{-\frac{u}{x}} \left(1 - \frac{t}{u}\right)^{k-1} \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{x^{k+1}} \int_t^\infty e^{-\frac{u}{x}} (u-t)^{k-1}\, du.$$

Ersetzt man u durch $xu + t$, so hat man

$$R_k C_k = \frac{1}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{x}\, e^{-\frac{t}{x}} \int_0^\infty e^{-u} u^{k-1}\, du = \frac{1}{x}\, e^{-\frac{t}{x}} = A.$$

Da R_k für die k mit positivem Realteil offenbar permanent ist [es ist $\int_0^\infty R_k(x,t)\, dt = 1$ für alle $x > 0$], für reelle $k > 0$ sogar echt [s. Fußn. 23)], so folgen hieraus für den integralen Fall die Beziehungen des C_k- zum A-Verfahren, die im matrizialen Falle wohlbekannt sind. In diesem letzten Falle hat man ganz entsprechend

$$R_k C_k = (1-z)^{k+1} \cdot \sum_{\mu=\nu}^\infty \binom{\mu+k}{\mu} z^\mu \frac{\binom{\mu-\nu+k-1}{\mu-\nu}}{\binom{\mu+k}{\mu}}$$

$$= (1-z)^{k+1} \cdot z^\nu \sum_{\mu=0}^\infty \binom{\mu+k-1}{\mu} z^\mu = (1-z)\, z^\nu = A.$$

II. *Der Übergang von H_k zu A wird durch die Transformation*

$$S_k = R_k Q_k \tag{7.5}$$

gegeben, bei der Q_k die Bedeutung aus (4. 11) *hat. Es ist also*

$$A = S_k H_k. \tag{7.6}$$

Das ist nach dem Vorangehenden ohne weiteres klar, weil nach (4. 12) $Q_k H_k = C_k$ und also $S_k H_k = R_k C_k = A$ ist. Da auch S_k für $\Re(k) > 0$ permanent ist, so folgt aus (7. 6) unmittelbar der Hölldersche Satz für beide Arten von Transformationen. Die Vermittlungsfunktion S_k in (7. 5) hat die Form $\frac{1}{x}\, e^{-\frac{t}{x}}$, multipliziert mit einem Polynom $(k-1)$-ten Grades in $\frac{t}{x}$ ohne konstantes Glied. Für dies Polynom gab Garten [1] ebenfalls eine rekursive Herleitung an [vgl. Fußn. 26)].

Schriftenverzeichnis.

A. F. Andersen.

[1] Om Ækvivalensen af Cesàros og Hölders Summabilitets metoder, Matematisk Tidskrift B, Kopenhagen 1923, S. 1—6.

[2] Om nogle nyere Sætninger vedrørende Cesàro- og Hölder-Summabilitet, Matematisk Tidskrift B, Kopenhagen 1925, S. 84—94.

[3] Bemerkung zum Beweis des Herrn Knopp für die Äquivalenz der Cesàro- und Hölder-Summabilität, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 356—359.

C. Carathéodory.

[1] Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, S. 621 ff.

S. Dobrowolski.

[1] Sur les valeurs limites de moyennes de Cesàro et de Hölder, Bull. internat. Acad. Polonaise (A), Cracovie 1925, S. 259—264.

G. C. Evans.

[1] L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili, Rendiconti del circ. mat. Palermo **34** (1912), S. 1—28.

G. Faber.

[1] Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte, Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wissensch., Jahrg. 1913, S. 519—531.

W. B. Ford.

[1] On the relations between the sum-formulas of Hölder and Cesàro, American Journ. of Mathem. **32** (1910), S. 315—326.

G. Fubini.

[1] Sugli integrali multipli, Rendic. della R. Acad. Lincei (5) **16 I** (1907), S. 608—614.

V. Garten.

[1] Über die Beziehungen zwischen den Hölderschen und den Laplace-Abelschen Mittelbildungen und den Satz von O. Hölder, Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 86—103.

[2] Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen, Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 111—124.

H. Hahn.

[1] Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel, Monatsh. f. Math. u. Phys. **33** (1923), S. 135—143.

G. H. Hardy.

[1] Generalisations of a limit theorem of Mr. Mercer, The quarterly Journ. of pure and appl. Math. **43** (1912), S. 143—150.

G. H. Hardy und J. E. Littlewood.

[1] Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 67—96, bes. S. 76—77.

F. Hausdorff.

[1] Summationsmethoden und Momentfolgen I, Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 74—109, bes. S. 88—90.

E. HELLINGER und O. TOEPLITZ.

[1] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Encykl. d. math. Wissensch. II C 13 (1927), S. 1335–1601.

E. W. HOBSON.

[1] The theory of functions of a real variable, Bd. I, 3. Aufl., Cambridge 1927, S. 626ff.

W. A. HURWITZ and L. L. SILVERMAN.

[1] On the consistency and equivalence of certain definitions of summability, Transactions of the Americ. Math. Soc. **18** (1917), S. 1–20.

M. JACOB.

[1] Über die Äquivalenz der CESÀROschen und der HÖLDERschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 672–682.

J. KARAMATA.

[1] Sur quelques inversions d'une proposition de CAUCHY et leurs généralisations. Tohoku math. Journ. **36** (1932), S. 22–28.

K. KNOPP.

[1] Grenzwerte bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Inaug.-Dissert. Berlin 1907, S. 19–22.

[2] Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn I. SCHUR, Math. Annalen **74** (1913), S. 459–461.

[3] Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit, Math. Zeitschr. **19** (1923), S. 97–113.

[4] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin, 2. Aufl. (1924), S. 481ff.; 3. Aufl. (1931), S. 498ff.

[5] Zur Theorie der Limitierungsverfahren I, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 97–127; II, ebenda, S. 276–305.

G. KOETHE und O. TOEPLITZ.

[1] Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **165** (1931), S. 116–127.

E. KOGBETLIANTZ.

[1] Sur la sommation des séries divergentes par les moyennes simples et doubles, Annales d'Éc. Normale Sup. (3) **42** (1925), S. 193–216.

E. LANDAU.

[1] Die Identität des CESÀROschen und HÖLDERschen Grenzwertes für Integrale, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Leipzig (math.-phys. Kl.) **65** (1913), S. 131–138.

J. MERCER.

[1] On the limits of real variants, Proc. Lond. math. Soc. (2) **5** (1907), S. 206–224.

P. MONTEL und A. ROSENTHAL.

[1] Integration und Differentiation, Encykl. d. math. Wissensch. II C 9b (1924), S. 1031–1135.

N. OBRESCHKOFF.

[1] Über die CESÀROschen und HÖLDERschen Mittelwerte für Integrale. Ber. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. Leipzig (math.-phys. Kl.) **82** (1930), S. 209–215.

B. Ottolenghi.

[1] Coesistenza e identità dei limiti di Hölder e di Cesàro, Padova (Prosperini) 1911, 16 S.

H. Raff.

[1] Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 605–629.

J. Rey Pastor.

[1] Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación, Trabajos del Sem. Matem. Argentino B **12**, Nr. 5, 174 S.

[2] Aplicaciones de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación, Rendic. del Sem. Mat. e Fis. Milano **7** (1934), S. 191–222.

W. Schnee.

[1] Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes, Math. Annalen **67** (1909), S. 110–125.

I. Schur.

[1] Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Annalen **74** (1913), S. 447–458.

[2] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **151** (1921), S. 79–111.

[3] Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 391–407.

[4] Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Reihen, Sitzungsber. Berlin Math. Ges. **29** (1930), S. 3–13.

O. Toeplitz.

[1] Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. **22** (1911), S. 113–119.

V. Volterra.

[1] Leçons sur les fonctions de lignes (Collection Borel), Paris 1913.

V. Volterra und J. Pérès.

[1] Leçons sur la composition et les fonctions permutables (Collection Borel), Paris 1925.

M. Watanabe.

[1] On the identity of Cesàros and Hölders limits, Tohoku Math. Journ. **5** (1914), S. 21–28.

(Eingegangen am 3. Januar 1941.)

Neuer Beweis eines Satzes von Wirtinger und Blaschke.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In der vorliegenden Arbeit soll ein einfacher, induktiver Beweis für einen Satz von WIRTINGER [1]) und BLASCHKE gegeben werden, welcher in der Theorie der konvexen Körper mehrfache Anwendung findet. Für den n-dimensionalen Raum lautet dieser Satz folgendermaßen:

Ist $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine auf der Einheitskugel* $\mathfrak{S}_n$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{1.1}$$

eindeutige, stetig differenzierbare Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ *und gilt dort*

$$\int u \, d\omega_n = 0 \text{ [2])}, \tag{1.2}$$

so ist

$$\int \{(n-1)\, u^2 - \nabla_n u\} \, d\omega_n \leqq 0. \tag{1.3}$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur für die Funktion

$$u = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n \tag{1.4}$$

ein, wenn die C_i *willkürliche Konstanten sind und die* x_i *Koordinaten eines Punktes von* $\mathfrak{S}_n$ *darstellen.*

Ferner bedeutet in (1.3) $d\omega_n$ das Oberflächenelement von $\mathfrak{S}_n$ und ∇_n den ersten BELTRAMIschen Operator auf $\mathfrak{S}_n$, welcher später an geeigneterer Stelle genauer definiert wird.

Der einzige bis jetzt bekannte Beweis dieses Satzes arbeitet mit der Entwicklung von u in eine Reihe von Kugelfunktionen und operiert dann mit dem sogenannten Vollständigkeitssatz.

---

[1]) Der Satz wurde zuerst von BLASCHKE in seinem Buch, Kreis und Kugel (Leipzig, Teubner, 1916) als Lemma von WIRTINGER veröffentlicht und von WIRTINGER selbst für $n = 2$ bewiesen. Der Beweis für $n = 3$ wurde von BLASCHKE erbracht und für ein beliebiges n vom Verfasser (vgl. Fußnote 4 dieser Arbeit).

[2]) Die Integration ist hier über die ganze Oberfläche der Kugel $\mathfrak{S}_n$ zu erstrecken. Es wird im folgenden verabredet, daß überall, wo ein Flächenelement $d\omega_k$ vorkommt, die Integration über die ganze Oberfläche einer später zu erklärenden Einheitskugel $\mathfrak{S}_k$ zu erstrecken ist.

Es war mir in einer früheren Arbeit[3]) gelungen, für den relativ einfachen Fall $n = 3$ einen von der Theorie der Kugelfunktionen freien Beweis zu erbringen, der sich von dem WIRTINGER-BLASCHKEschen Satz nur durch eine schärfere Voraussetzung als die in (1. 2) unterscheidet.

Angeregt durch eine Bemerkung von ERHARD SCHMIDT, wonach mein dortiger Beweisgang den Beweis des WIRTINGER-BLASCHKEschen Satzes für $n = 3$ ohne jene schärfere Voraussetzung enthält, versuchte ich ein allgemeines Induktionsverfahren aufzustellen, mit Hilfe dessen man von $n = 2$ zu einem beliebigen n gelangen kann.

Zum Schluß der Arbeit gebe ich noch einige Anwendungen des Satzes in der Theorie der konvexen Körper, besonders bei dem Beweis einer linearen MINKOWSKISCHEN Ungleichung, die ich an anderer Stelle[4]) mit Hilfe von Hyperkugelfunktionen begründet habe.

2. *Vorbereitende Tatsachen. Aufstellung einer Induktionsformel für* J_n. Im n-dimensionalen Raum R_n betrachten wir ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem O und bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Koordinaten eines Punktes P von R_n in bezug auf O.

Zum Beweis des WIRTINGERschen Satzes durch Induktion ist es zweckmäßig, die Kugelscharen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n = \mathfrak{S}_n$ einzuführen. Die Kugelschar $\mathfrak{K}_k$ definieren wir durch die Gleichung

$$(2.1)\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = 1 - (x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2) = q_k^2 \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

wobei jedesmal die Koordinaten $x_{k+1}, \ldots, x_n$ fest gedacht werden. Nach dieser Definition ist also die Kugel $\mathfrak{K}_k$ nichts anderes als der Schnitt von $\mathfrak{S}_n$ mit den $n - k$ $(n-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten,

$$(2.2)\qquad x_{k+1} = C_{k+1}, \ \ldots, \ x_n = C_n,$$

wo $C_{k+1}, \ldots, C_n$ willkürliche Konstante mit $C_{k+1}^2 + \cdots + C_n^2 \leqq 1$ sind.

Wir führen jetzt Polarkoordinaten ein,

für $\mathfrak{K}_2$:

$$x_1 = q_2 \sin \vartheta_1,$$
$$x_2 = q_2 \cos \vartheta_1,$$

für $\mathfrak{K}_3$:

$$x_1 = q_3 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1,$$
$$x_2 = q_3 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1,$$
$$x_3 = q_3 \cos \vartheta_3,$$

---

[3]) Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Abh. Preuß. Akad. Wiss., Math.-phys. Klasse, Nr. 11 (1939).

[4]) Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss., Math.-phys. Klasse, Nr. 4 (1939).

und allgemein für $\mathfrak{R}_k$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} x_1 &= q_k \sin \vartheta_{k-1} \sin \vartheta_{k-2} \ldots \sin \vartheta_1, \\ x_2 &= q_k \sin \vartheta_{k-1} \sin \vartheta_{k-2} \ldots \cos \vartheta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= q_k \cos \vartheta_{k-1}. \end{aligned} \tag{2. 3}$$

Die spezielle Kugel, die man aus dem Schnitt von $\mathfrak{R}_n$ mit den Mannigfaltigkeiten

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0 \tag{2. 4}$$

erhält, nennen wir $\mathfrak{S}_k$.

Für die Kugel $\mathfrak{S}_k$ haben wir dann die Darstellung

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin \vartheta_{k-1} \sin \vartheta_{k-1} \ldots \sin \vartheta_1, \\ y_2 &= \sin \vartheta_{k-1} \sin \vartheta_{k-1} \ldots \cos \vartheta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k &= \cos \vartheta_{k-1}. \end{aligned} \tag{2. 5}$$

Durch eine leichte Rechnung ergibt sich für das Oberflächenelement $d\omega_k$ von $\mathfrak{S}_k$

$$d\omega_k = \sin^{k-2} \vartheta_{k-1} \sin^{k-3} \vartheta_{k-2} \ldots \sin \vartheta_2 \, d\vartheta_1 \, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{k-1}. \tag{2. 6}$$

Der Beltramische Operator Δ_k auf der Kugel $\mathfrak{S}_k$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ wird nun durch

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_{k-1}^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_{k-1}} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_{k-2}^2} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_{k-1} \cdots \sin^2 \vartheta_2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_1^2} \tag{2. 7}$$

definiert. Durch eine leichte Rechnung ergibt sich dann die Rekursionsformel

$$\Delta_{k+1} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_k^2} + (1 + \cot^2 \vartheta_k) \Delta_k, \tag{2. 8}$$

welche für $k = 2, 3, \ldots, n$ gilt.

Ist jetzt $U^*(x_1, \ldots, x_n)$ eine auf der Kugel $\mathfrak{S}_n$ eindeutige, stetige und stetig differenzierbare Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$[5]), so schreiben wir

$$U^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}), \tag{2. 9}$$

und betrachten dann U als Funktion der unabhängigen Veränderlichen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$[6]).

---

[5]) Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit wurde hier aus Vereinfachungsgründen gemacht. Es ist aus der Beweismethode unmittelbar zu ersehen, daß es vollständig genügt, wenn für jedes k $\Delta_k U^*$ (auf der zugehörigen Kugel $\mathfrak{S}_k$) integrierbar ist und $\bar{u} = \frac{1}{\omega_k} \int U \, d\omega_k$ auf $\mathfrak{S}_{k+1}$ eine totalseitige Funktion von ϑ_k ist.

[6]) Vgl. Fußnote 3.

Um für das Integral

$$J_n(u) = \int \{(n-1)\,u^2 - \nabla_n u\}\, d\omega_n \tag{2.10}$$

eine Rekursionsformel aufzustellen, betrachten wir die Kugel $\mathfrak{S}_{k+1}$ $(1 < k < n-1)$ und setzen

$$A_{k+1} = \int u\, d\omega_{k+1}, \tag{2.11}$$

und

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega_k} \int u\, d\omega_k. \tag{2.12}$$

Dann ist offenbar

$$u = \bar{u} + (u - \bar{u}) = \bar{u} + v, \tag{2.13}$$

mit

$$\int v\, d\omega_k = 0. \tag{2.14}$$

Setzt man ferner

$$u - A_{k+1} = U, \quad \bar{u} - A_{k+1} = \bar{U}, \tag{2.15}$$

so ist wieder

$$U = \bar{U} + v \tag{2.16}$$

mit

$$\int U\, d\omega_{k+1} = 0, \quad \int \bar{U}\, d\omega_{k+1} = 0, \quad \int v\, d\omega_{k+1} = 0. \tag{2.17}$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$J_{k+1}(U) = \int (k U^2 - \nabla_{k+1} U)\, d\omega_{k+1} \tag{2.18}$$

und führen mit Hilfe von (2. 16) die Größen $\bar{U}$ und v ein. Wir erhalten sodann nach einigen Rechnungen

$$J_{k+1}(U) = J_{k+1}(\bar{U}) + J_{k+1}(v). \tag{2.19}$$

Ferner wird mit Rücksicht auf (2. 8)

$$J_{k+1}(v) = \int \{(k-1)\,v^2 - \nabla_k v\}\, d\omega_{k+1} + \int (v^2 - \nabla_k v \cot^2 \vartheta_k - v_{\vartheta_k}^2)\, d\omega_{k+1}, \tag{2.20}$$

oder noch

$$J_{k+1}(v) = \int J_k(v)\,(1 + \cot^2 \vartheta_k) \sin^{k-1} \vartheta_k\, d\vartheta_k + \int (v^2 - v_{\vartheta_k}^2 - (k-1)\, v^2 \cot^2 \vartheta_k)\, d\omega_{k+1}. \tag{2.21}$$

Mit

$$M = \int (v^2 - v_{\vartheta_k}^2 - (k-1)\, v^2 \cot^2 \vartheta_k)\, d\omega_{k+1}$$

und

$$N = \int (v_{\vartheta_k}^2 - v \cot \vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1}$$

wird jetzt, wegen

$$d\omega_{k+1} = \sin^{k-1}\vartheta_k\, d\vartheta_k\, d\omega_k,$$

$$M+N = -\int\{v_{\vartheta_k}^2 + (k-1)v^2\cot^2\vartheta_k - v^2(1+\cot^2\vartheta_k)\}\sin^{k-1}\vartheta_k\, d\vartheta_k d\omega_k$$

(2.22)

$$= -\int \frac{\partial}{\partial\vartheta_k}(v^2\cot^2\vartheta_k \sin^{k-1}\vartheta_k)\, d\vartheta_k\, d\omega_k.$$

Ist nun $k > 2$, so ist es leicht zu sehen, daß $M + N = 0$, also $M = -N$ ist. Für $k = 2$ trifft dies ebenso zu, da, wegen $\int v\, d\omega_2 = 0$, die Werte von v auf dem Nordpol und dem Südpol von $\mathfrak{K}_3$ gleich Null sein müssen.

Es gilt also für alle

$$M = -\int (v_{\vartheta_k} - v\cot\vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1} \leqq 0. \tag{2.23}$$

Zur Umformung von $J(\bar{U})$ setzen wir $U^* = \bar{U} - \bar{U}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und drücken $J_{k+1}(U)$ durch $J_{k+1}(\bar{U}^*)$ aus. Es wird mit $\bar{U}\left(\frac{\pi}{2}\right) = d_k$

$$J_{k+1}(U) = -k\omega_{k+1}d_k^2 + \int (k\bar{U}^{*2} - \bar{U}_{\vartheta_k}^{*2})\, d\omega_{k+1}. \tag{2.24}$$

Durch partielle Integration, in bezug auf ϑ_k, ergibt sich nun

$$\int (kU^{*2} - U_{\vartheta_k}^{*2})\sin^{k-1}\vartheta_k\, d\vartheta_k\, d\omega_k - \int (\bar{U}_{\vartheta_k}^* + \bar{U}^*\operatorname{tg}\vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1}, \tag{2.25}$$

und man erhält die gewünschte Rekursionsformel für J_n

$$J_{k+1}(U) = -k\omega_{k+1}d_k^2 - \int (\bar{U}_{\vartheta_k}^* + \bar{U}^*\operatorname{tg}\vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1} - \tag{2.26}$$

$$- \int (v_{\vartheta_k} - v\cot\vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1} + \int J_k(v)(1+\cot^2\vartheta_k)\sin^{k-1}\vartheta_k\, d\vartheta_k.$$

3. *Beweis des* Wirtinger-Blaschkeschen *Satzes.* Die vorher aufgestellte Formel lehrt uns, daß es genügt, den Wirtinger-Blaschkeschen Satz nur für $k = 2$ zu beweisen, nämlich für $v = v(\vartheta)$

$$J_2(v) = \int_0^{2\pi} (v^2 - v'^2)\, d\vartheta \leqq 0, \tag{3.1}$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^{2\pi} v\, d\vartheta = 0. \tag{3.2}$$

Wegen (3.2) existiert ein α derart, daß

$$v(\pi + \alpha) + v(\alpha) = 0\ ^7) \tag{3.3}$$

wird. Setzt man jetzt $v(\alpha) = a$, so ist, wie man leicht feststellt,

$$J_2(v - a\cos(\vartheta - \alpha)) = J_2(v).$$

---

7) Vgl. Fußnote 3.

Es genügt also, (3. 1) für die Funktion $v^* = v - a\cos(\vartheta - \alpha)$ nachzuweisen. Durch Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α wird nun mit $\bar{\vartheta} = \vartheta - \alpha$, $\bar{v}(\bar{\vartheta}) = \bar{v} = v^*(\bar{\vartheta} + \alpha)$,

$$J_2(v) = J_2(\bar{v}) = \int_0^{2\pi} (\bar{v}^2 - \bar{v}'^2)\, d\vartheta, \tag{3. 4}$$

während $\bar{v}$ noch den Bedingungen

$$\bar{v}(0) = \bar{v}(\pi) = 0 \tag{3. 5}$$

genügt. Nun kann man sofort durch partielle Integration feststellen, daß

$$\int_0^{2\pi} (\bar{v}^2 - \bar{v}'^2)\, d\vartheta = -\int_0^{2\pi} (\bar{v}' - \bar{v}\cot\bar{\vartheta})^2\, d\bar{\vartheta} \text{ [8]} \tag{3. 6}$$

ist, es wird also

$$J_2(v) = -\int_0^{2\pi} (\bar{v}' - \bar{v}\cot\bar{\vartheta})^2\, d\bar{\vartheta} \leqq 0, \tag{3. 7}$$

womit der Wirtingersche Satz für $k = 2$ bewiesen ist. Wie man aus (3. 7) abliest, tritt das Gleichheitszeichen nur für $\bar{v} = C\sin\bar{\vartheta}$ ein, also für

$$v = C_1 \sin\vartheta + C_2\cos\vartheta \tag{3. 8}$$

mit konstantem C_1, C_2.

Schreibt man nun $u - \int u\, d\omega_{k+1}$ an Stelle von U, so folgt aus (2. 26)

$$J_{k+1}(u - \int u\, d\omega_{k+1}) \leqq \int J_k(v)\,(1 + \cot^2\vartheta_k)\sin^{k-1}\vartheta_k\, d\vartheta_k, \tag{3. 9}$$

wobei v der Bedingung

$$\int v\, d\omega_k = 0 \tag{3. 10}$$

genügt.

Setzt man hier $k = 2$, so folgt daraus, wegen (3. 7),

$$J_3(u - \int u\, d\omega_3) \leqq 0. \tag{3. 11}$$

Ist nun $J_k(u - \int u\, d\omega_k) \leqq 0$ einmal bewiesen, so folgt aus der Zerlegung (2. 13), wegen (2. 14),

$$J_k(v) \leqq 0 \tag{3. 12}$$

und wir erhalten aus (3. 9)

$$J_{k+1}(u - \int u\, d\omega_{k+1}) \leqq 0. \tag{3. 13}$$

---

[8]) Damit der integrierte Teil verschwindet, genügt es, daß für kleine $\bar{\vartheta}$ bzw. $\pi - \bar{\vartheta}$, $\bar{v} = o(\sqrt{\bar{\vartheta}})$, $\bar{v} = o(\sqrt{\pi - \bar{\vartheta}})$ ist.

Somit ist der WIRTINGER-BLASCHKEsche Satz vollständig bewiesen. Für $k = n - 1$ erhalten wir daraus, mit Rücksicht auf (1. 2),

$$J_n(u) \leqq 0. \tag{3. 14}$$

4. *Feststellung der Extremalfunktion.* Damit in

$$J_{k+1}(u - \int u\, d\omega_{k+1}) = -k\,\omega_k\, d_k^2 - \int (\bar{U}^* + \bar{U}^* \operatorname{tg} \vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1} - \\ - \int (v_{\vartheta_k} - v \cot \vartheta_k)^2\, d\omega_{k+1} - \int J_k(v)\,(1 + \cot^2 \vartheta_k) \sin^{k-1} \vartheta_k\, d\vartheta_k \leqq 0 \tag{4. 1}$$

für $k + 1$ das Gleichheitszeichen eintritt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$1)\ d_k = 0, \qquad 2)\ \bar{U}^* + \bar{U} \operatorname{tg} \vartheta_k = 0,$$
$$3)\ v_{\vartheta_k} - v \cot \vartheta_k = 0 \quad \text{und} \quad 4)\ J_k(v) = 0.$$

Aus 1) folgt $\bar{U}^* = \bar{U}$, aus 2) $\bar{U} = C \cos \vartheta_k$ und aus 3) $v = \Phi(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_{k-1}) \sin \vartheta_k$. Die Bedingung 4) verlangt ferner, wie man leicht sieht, $J_k(\Phi) = 0$. Dabei ist noch $\int \Phi\, d\omega_k = 0$. Ist nun $k = 2$, so muß, wie dies schon vorher festgestellt wurde, $u = C_1 \sin \vartheta_1 + C_2 \cos \vartheta_1$ sein, oder, was dasselbe ist,

$$n = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{4. 2}$$

wo y_1, y_2 die Koordinaten eines Punktes von $\mathfrak{S}_2$ sind. Es wird nun allgemein behauptet: Das Gleichheitszeichen in (3. 14) tritt nur dann ein, wenn

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{4. 3}$$

ist, wenn $y_1, \ldots, y_n$ die Koordinaten eines Punktes von $\mathfrak{S}_n$ darstellen. Wir nehmen den Satz für $k \geqq 2$ als richtig an. Dann folgt aus der Bedingung 4), daß

$$\Phi = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_k y_n \tag{4. 4}$$

mit konstanten A_ν und

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin \vartheta_{k-1} \ldots \sin \vartheta_1, \\ y_2 &= \sin \vartheta_{k-1} \ldots \cos \vartheta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k &= \cos \vartheta_{k-1} \end{aligned} \tag{4. 5}$$

ist.

Wegen $U = \bar{U} + v$, $\bar{U} = C \cos \vartheta_k$, $v = \Phi \sin \vartheta_k$ folgt nun

$$U = \sin \vartheta_k \cdot \sum_1^k C_\nu y_\nu + C \cos \vartheta_k, \tag{4. 6}$$

d. h.

$$U = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{k+1} y_{k+1} \tag{4. 7}$$

mit

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin\vartheta_k \dots \sin\vartheta_1, \\ y_2 &= \sin\vartheta_k \dots \cos\vartheta_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_{k+1} &= \cos\vartheta_k. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Führt man nun die Induktion bis zu $k = n$ durch, so folgt, wegen (1.2)

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{4.9}$$

mit

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1, \tag{4.10}$$

wodurch auch die Behauptung für das Eintreten des Gleichheitszeichens bewiesen ist.

5. *Anwendung auf die konvexen Körper.* Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in R_n und $\mathfrak{K} + h\,\mathfrak{S}$ der Parallelkörper von $\mathfrak{K}$ in der Entfernung $h \geqq 0$, so gilt bekanntlich für das Volumen $V(\mathfrak{K} + h\,\mathfrak{S})$

$$V(\mathfrak{K} + h\,\mathfrak{S}) = W_0 + \binom{n}{1} W_1 h + \cdots + \binom{n}{n} W_n h^n, \tag{5.1}$$

wobei W_i $(i = 1, \dots, n)$ die sogenannten Quermaße von $\mathfrak{K}$ sind. Für die drei letzten Quermaße, die uns hier interessieren werden, findet man, wenn p die Stützfunktion von $\mathfrak{K}$ bedeutet,

$$\begin{aligned} W_{n-2} &= \frac{1}{n(n-1)} \int \{(n-1)\,p^2 - \nabla_n(p, p)\}\, d\omega_k, \\ W_{n-1} &= \frac{1}{n} \int p\, d\omega_n, \\ \text{und} \qquad W_n &= \frac{1}{n} \int d\omega_n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei wurde $\nabla_n(p, p)$ an Stelle von $\nabla_n(p)$ geschrieben. Man betrachte nun die lineare Kombination

$$p_\lambda = (1 - \lambda)\, p_1 + \lambda p_2 \tag{5.3}$$

und bilde das Quermaß W_{n-2} von p_λ. Eine leichte Rechnung gibt

$$W_{n-2}(\lambda) = (1 - \lambda)^2 V_{11} + 2(1 - \lambda)\lambda V_{12} + \lambda^2 V_{22} \tag{5.4}$$

mit

$$V_{ik} = \frac{1}{n} \int \left\{ p_i p_k - \frac{1}{n-1} \nabla_n(p_i, p_k) \right\} d\omega_n. \tag{5.5}$$

Dabei ist $\nabla_n(p_i, p_k)$ für $i \neq k$ die polare Bildung von $\nabla_n(p, p)$ für die Stützfunktionen p_i, p_k.

Ein MINKOWSKI-KUBOTAscher Satz behauptet:

Es ist

$$V_{12}^2 \geqq V_{11} V_{22}, \tag{5.6}$$

und das Gleichheitszeichen kann nur für homothetische $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *eintreten.* Ist speziell $p_2 = 1$, so ist

$$W_{n-2}^2 \geqq W_{n-1} W_n. \tag{5.7}$$

Die Behauptung (5.6) ist allerdings wegen (5.5) mit folgender Behauptung gleichwertig: *Es ist*[9])

$$\sqrt[n]{W_{n-2}(\lambda)} \geqq (1-\lambda)\sqrt[n]{V_{11}} + \lambda \sqrt[n]{V_{22}}, \tag{5.8}$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur für homothetische $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *ein.*

Zum Beweis von (5.6) setzen wir in (1.3)

$$u = \frac{p_1}{W_1} - \frac{p_2}{W_2}, \tag{5.9}$$

mit

$$W_1 = \int p_1 \, d\omega_n, \quad W_2 = \int p_2 \, d\omega_n.$$

Dann ist ersichtlich (1.2) erfüllt und es folgt aus (1.3)

$$\frac{J_n(u)}{n(n-1)} = \frac{V_{11}}{W_1^2} - 2\frac{V_{12}}{W_1 W_2} + \frac{V_{22}}{W_2^2} \leqq 0 \tag{5.10}$$

oder noch, mit Rücksicht auf den Satz vom arithmetisch-geometrischen Mittel,

$$V_{12} \geqq \frac{1}{2}\left(V_{11}\frac{W_2}{W_1} + V_{22}\frac{W_1}{W_2}\right) \geqq \sqrt{V_{11} V_{22}}, \tag{5.11}$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist. Da nun das Gleichheitszeichen nur für

$$u = \frac{p_1}{W_1} - \frac{p_2}{W_2} = \sum_1^n C_\nu y_\nu$$

gilt, so folgt daraus auch die letzte Behauptung unmittelbar[10]).

6. *Eine lineare Ungleichung zwischen* W_{n-2}, W_{n-1} *und* W_n. Setzt man in (13)

$$u = p - \bar{p}, \tag{6.1}$$

wobei

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int p \, d\omega_{n-1} \tag{6.2}$$

[9]) Vgl. z. B. BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, S. 109. Berlin, Jul. Springer, 1935.

[10]) Mit Hilfe von Hyperkugelfunktionen wurde dieser Satz zuerst von KUBOTA bewiesen. Sci. Rep. Tohoku Univ. **14** (1925), S. 85.

ist, so ist (1. 2) identisch erfüllt, und es folgt unmittelbar

$$J_n(p - \bar{p}) \leqq 0. \tag{6. 3}$$

Eine leichte Rechnung gibt nun

$$J_n(p) = J_n(\bar{p}) + J_n(p - \bar{p}), \tag{6. 4}$$

also wenn man den Körper, der der Stützfunktion $\bar{p}$ entspricht, mit $\overline{\mathfrak{K}}$ bezeichnet,

$$W_{n-2}(\mathfrak{K}) \leqq W_{n-2}(\overline{\mathfrak{K}}). \tag{6. 5}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ ein zu $\overline{\mathfrak{K}}$ kongruenter Rotationskörper ist.

Nun kann man für den Rotationskörper $\overline{\mathfrak{K}}$, durch eine nur partielle Integrationen erfordernde Methode, die Ungleichung

$$\overline{W}_{n-2} - 2\overline{W}_{n-1}d + W_n d^2 = -\frac{1}{n(n-1)} \int_0^{\pi} (\bar{p}' + (\bar{p} - d) \operatorname{tg} \vartheta_{n-1})^2 \, d\omega_n \tag{6. 6}$$

beweisen, wenn die gestrichenen Größen die Quermaßintegrale von $\overline{\mathfrak{K}}$ sind und W_n das Volumen von $\mathfrak{S}_n$ darstellt. Ferner ist $d = \bar{p}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gesetzt. Wegen (6. 5) und $W_{n-1} = \overline{W}_{n-1}$ gilt nun für jeden konvexen Körper

$$W_{n-2} - 2W_{n-1}d + W_n d^2 \leqq 0. \tag{6. 7}$$

Dabei wird das Gleichheitszeichen nur für die Kugel erreicht. Ich habe diese Tatsache früher (vgl. Fußnote 4) unter Heranziehung von Hyperkugelfunktionen bewiesen.

(Eingegangen am 6. Januar 1941.)

Kurvenkongruenzen und volumentreue Transformationen.

Von

H. Beck in Bonn.

Im folgenden wird der Satz bewiesen:

Jede analytische Kongruenz analytischer Kurven bleibt bei einer gemischten, im Sinne von Lie *unendlichen Gruppe volumentreuer Transformationen kurvenweise stehen.*

Das ist ein Satz einer noch ganz unentwickelten Theorie, die im Sinne des Erlanger Programms als Geometrie der volumentreuen Punkttransformationen zu bezeichnen ist.

Der Beweis des allgemeinen Falles (§ 20) erfordert nur wenige Zeilen, der des Sonderfalles bedarf umfangreicher Vorbereitungen (§ 1—19), die sich auf Kongruenzen gerader Linien beziehen und affinen Charakter tragen. Dabei kommt eine ganze Reihe von (affin-verschiedenen) Typen volumentreuer Transformationen zum Vorschein, die durch römische Ziffern gekennzeichnet sind.

Der Schluß (§ 21, 22) bringt auch die Lehre von den gleichsinnig flächentreuen Transformationen der Ebene mit gewissen Geradenkongruenzen in Zusammenhang und bestimmt die der bisherigen Bearbeitung entgangenen Transformationen dieser Art.

§ 1.

Eine eigentliche Gerade soll durch einen beliebigen ihrer eigentlichen Punkte p und ihren uneigentlichen Punkt H dargestellt werden. Legt man dem Punkte p die homogenen Koordinaten $1 : p_1 : p_2 : p_3$ bei, so hat der durch den Vektor $H \neq 0$ bestimmte uneigentliche Punkt die homogenen Koordinaten $0 : H_1 : H_2 : H_3$. So erscheint die Gerade als Mannigfaltigkeit von ∞^1 Linienelementen, und eine Relation zwischen den p und H bedeutet eine Aussage über die Gerade (p, H) dann und nur dann, wenn sie alle Substitutionen der Gruppe verträgt

$$p^* = p + \sigma H, \quad H^* = \varrho H, \qquad (\varrho \neq 0). \tag{1}$$

Die Plückerschen Strahlenkoordinaten der Geraden (p, H) sind

$$P^{0i} = H_i, \quad P^{kl} = p_k H_l - p_l H_k, \quad (i, k, l) = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Diese sollen im selben Bereich als eindeutige analytische Funktionen der beiden Parameter u und v angesetzt werden. Wenn dann der Rang der (dreispaltigen, sechsreihigen) Matrix $((P P_u P_v))$ nicht überall kleiner als drei ist, so durchläuft die veränderliche Gerade P eine analytische Geradenkongruenz. Wenn diese nicht ganz aus uneigentlichen Geraden besteht, so läßt sich die Kongruenz auch durch die p und H ausdrücken, allerdings nicht nur auf eine Art. Um so wichtiger ist es, ein Kriterium dafür zu haben, wenn das System $(p(u, v), H(u, v))$ eine Kongruenz liefert:

Die beiden Determinanten

$$(p_u p_v H) \quad \text{und} \quad (H H_u H_v)$$

und die ternäre bilineare Vektorform

$$(Y H H_u)(Z p_v H) - (Y H H_v)(Z p_u H)$$

dürfen nicht gleichzeitig identisch verschwinden[1]).

§ 2.

Für die Betrachtung der analytischen Geradenkongruenz sind die Formeln (1) etwas zu modifizieren:

$$p^* = p + \sigma(u, v) H, \quad H^* = \varrho(u, v) H. \qquad (\varrho(u, v) \neq 0). \tag{2}$$

Gegenüber allen Substitutionen dieser Gruppe erweist sich der Rang r der Determinante $(H H_u H_v)$ als invariant. Auch gegenüber Affinitäten bleibt r invariant, und unempfindlich gegen Parameterwechsel.

Der Fall $r = 0$ ist geometrisch bedeutungslos. Ist $r < 3$, so lassen sich die Geraden der Kongruenz auf (unebene oder ebene) Zylinder verteilen, und nur dann. Eine sachgemäße Terminologie ist daher die folgende:

$r = 3$: Nichtzylindrische Kongruenzen.

$r = 2$: Eigentlich zylindrische Kongruenzen.

$r = 1$: Uneigentlich zylindrische Kongruenzen.

Die letzte Klasse besteht nur aus den Parallelenbündeln[2])

---

[1]) Die 20 dreireihigen Determinanten von $((P P_u P_v))$ lassen sich durch mechanische Umrechnung auf 11 unabhängige Ausdrücke zurückführen, von denen 2 ebenfalls dreireihige Determinanten sind; die übrigen 9 bilden die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe, der im Text als Bilinearform auftritt. Das Kriterium ist bequem, erfüllt aber nicht alle Invarianzforderungen. Man braucht sonst 2 Kovarianten, die nicht gleichzeitig identisch verschwinden dürfen; beide sind quaternäre quadratische Formen (in kontragredienten Veränderlichen). Jede von ihnen hat 16 der 20 dreireihigen Determinanten zu Koeffizienten, beide zusammen alle 20.

[2]) Zylindrische Kongruenzen sind m. W. erst von W. Haack eingehender behandelt [Math. Zeitschr. **35** (1932)]. Dort wird aber nur ein Teil der eigentlichen zylindrischen Kongruenzen der Terminologie des Textes betrachtet.

§ 3.

Kürzt man die vier Determinanten ab

(3) $$A \equiv (p_u H H_u), \quad B_1 \equiv (p_u H H_v), \quad B_2 \equiv (p_v H H_u), \quad C \equiv (p_v H H_v)$$

und setzt weiterhin

(4) $$2B \equiv B_1 + B_2,$$

so ist

$$A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2$$

die eine (projektiv invariante) der beiden Differentialformen, deren man sich bei metrischer Behandlung der Lehre von den Kongruenzen bedient. Der Rand R der Matrix

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\right)$$

ist gleichfalls invariant gegenüber Substitutionen (2), Affinitäten und Parameterwechsel.

Aus $r = 1$ folgt $R = 0$; davon abgesehen sind r und R voneinander unabhängig. Das gibt folgende Klassifikation:

$r = 3$, $R = 2$. Nichtzylindrische Kongruenz mit getrennten Brennörtern.

$r = 3$, $R = 1$. Zusammenfallende Brennpunktsflächen oder Kurven.

$r = 3$, $R = 0$. Geradenbündel von eigentlichem Scheitel.

$r = 2$, $R = 2$. Zylindrische Kongruenzen mit Brennfläche (kurve).

$r = 2$, $R = 1$. Brennpunktlose Kongruenzen.

$r = 2$, $R = 0$. Ebene Geradenfelder.

$r = 1$, $R = 0$. Parallelenbündel.

§ 4.

Nichtzylindrische Kongruenzen.

Aus den beiden Formeln

$$(H H_v H_v)\, p_u \equiv (p_u H_u H_v)\, H - B_1 H_u + A H_v,$$
$$(H H_u H_v)\, p_v \equiv (p_v H_u H_v)\, H - C H_u + B_2 H_v$$

folgt

$$(H H_u H_v)\, (p_u p_v H) \equiv AC - B_1 B_2.$$

Auf jedem Kongruenzstrahl, für den nicht $r < 3$ ist, liegt der kovariante Punkt

(5) $$m = p + \frac{B_1 - B_2}{2\,(H H_u H_v)}\, H,$$

der als Mittelpunkt bezeichnet wird. Für ihn gelten die Beziehungen

$$(5a) \qquad (m_u H H_u) \equiv A, \quad (m_u H H_v) \equiv (m_v H H_u) = B, \quad (m_v H H_v) \equiv C;$$
$$(H H_u H_v)(m_u m_v H) \equiv AC - B^2.$$

Die relative Invariante

$$(B^2 - AC) : (H H_u H_v)^2$$

führt auf zwei weitere auf dem Kongruenzstrahl gelegene kovariante Punkte

$$(6) \qquad k = m + \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{(H H_u H_v)} H,$$

die Brennpunkte. Für jeden von ihnen gilt

$$(6a) \qquad (k_u H H_u) \equiv A, \qquad (k_v H H_v) \equiv C,$$
$$(k_u H H_v) \equiv B - \sqrt{B^2 - AC}, \quad (k_v H H_u) \equiv B + \sqrt{B^2 - AC}$$
$$(k_u k_v H) \equiv 0.$$

§ 5.

Mit jeder nichtzylindrischen Kongruenz ist eine *involutorische gegensinnig volumentreue* Punkttransformation verbunden. Sie besteht darin, daß man jede Kongruenzgerade an ihrem Mittelpunkt spiegelt. Die Kongruenz bleibt bei dieser Transformation, die als *Spiegelung an der Kongruenz* bezeichnet werden darf, *geradenweise* stehen.

Die Spiegelung an der Kongruenz läßt sich so darstellen

$$(I) \qquad x = m - wH, \quad x^* = m + wH.$$

Wegen (6a) wird

$$-(x_u x_v x_w) = +(x_u^* x_v^* x_w^*) = (m_u m_v H) + w^2 (H H_u H_v).$$

Singulär verhalten sich die Kongruenzstrahlen, für die $r < 3$ ist, und auf einem sonstigen Strahl nur die Brennpunkte. Das betrifft die vorliegende Parameterdarstellung; die Transformation $x \to x^*$ kann völlig singularitätenfrei sein. Das trifft z. B. für $r = 3$, $R = 0$ zu, wo sich die Spiegelung am Geradenbündel als die Spiegelung am Scheitel des Bündels erweist.

§ 6.

Wir stellen die Kongruenzen auf, deren Mittelgebilde eine Kurve ist. Diese setzen wir als $m \equiv m(u)$ an, $m' \not\equiv 0$. Aus (5a) folgt dann $B \equiv C \equiv 0$, also auch $AC - B^2 \equiv 0$, $(r = 3,\ R = 1)$, ferner

$$(m' H H_u) \equiv A \not\equiv 0, \quad (m' H H_v) \equiv 0.$$

(Die Annahme $A \equiv 0$ steht mit $m' \not\equiv 0$ im Widerspruch.) Daher ist $[m' H] \not\equiv 0$, $H_v = \lambda m' + \mu H$, $(H H_v H_{vv}) \equiv 0$, daher nach Parameterwechsel

$H \equiv P(u) + vQ(u)$. Die Kongruenz besteht daher aus Geradenbüscheln in Tangentialebenen der Mittelkurve. Der Beweis ergibt sich so: Wegen $(HH_u H_v) \equiv (PP'Q) - v(PQQ') \not\equiv 0$ ist $[PQ] \not\equiv 0$, wegen $B = 0$ ergibt sich $(m'PQ) \equiv 0$.

Aus der letzten Identität folgt $P = \alpha m' + \beta Q$ mit $\alpha \not\equiv 0$, also nach abermaligem Parameterwechsel

(7) $$p = m(u), \quad H = m'(u) + vQ(u).$$

Damit haben wir die *allgemeinste Kongruenz von der Mittelkurve* $m(u)$, wenn der Vektor $Q(u)$ so gewählt wird, daß nicht gleichzeitig

(7a) $$(m'm''Q) \equiv 0, \quad (m'QQ') \equiv 0.$$

Unter diesen beiden Bedingungen ist daher

(II) $$x = m(u) - w(m'(u) + vQ(u)), \quad x^* = m(u) + w(m'(u) + vQ(u))$$

eine *gegensinnig volumentreue involutorische Transformation, bei der jeder Punkt der Kurve* $m(u)$ *in Ruhe bleibt.*

§ 7.

Habe die Kongruenz eine *ebene Mittelfläche*. Diese geben wir als $m = (u, v, 0)$ vor. Wegen $(HH_u H_v) \not\equiv 0$ wird $H_3 \not\equiv 0$, so daß $H_3 \equiv 1$ gesetzt werden darf. Die Bedingung $B_1 - B_2 \equiv 0$ wird dann zu $\frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{\partial H_2}{\partial v} \equiv 0$. Daher ist jede Kongruenz von ebener Mittelfläche affin zur folgenden:

(8) $$p = (u, v, 0), \quad H = (f_v, -f_u, 1),$$

wenn die Funktion $f(u, v)$ gemäß

(8a) $$f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 \not\equiv 0$$

gewählt wird.

Ist der Ausdruck auf der linken Seite von (8a) konstant, etwa gleich $1 : c^2$, so hat die Kongruenz (8) zwei ebene Brennkurven in den Ebenen $z = \pm ci$, eine Bemerkung, auf die wir zurückkommen werden (§ 8, § 22). Jetzt erhalten wir in

(III) $$x = (u - wf_v, v + wf_u, -w), \quad x^* = (u + wf_v, v - wf_u, +w)$$

eine *involutorische gegensinnig volumentreue Transformation, die jeden Punkt der Ebene* $(u, v, 0)$ *stehenläßt.*

Die Schar dieser Transformationen besteht aber nicht bloß aus den Spiegelungen an der Kongruenz (8). Vielmehr hat man

$$-(x_u x_v x_w) = +(x_u^* x_v^* x_w^*) = 1 + w^2(f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2),$$

so daß die Transformation auch noch für den Fall gilt, daß die Bedingung (8a) nicht erfüllt wird. Darüber wird später im Zusammenhang zu reden sein (§ 21, 22).

§ 8.

An dieser Stelle geben wir zu späterer Benutzung eine Einschaltung über die Lösung der partiellen Differentialgleichung $f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 = 1 : c^2$.

Wir kehren zuerst ein Ergebnis von § 7 um: Alle Kongruenzen von vorgegebener Mittelebene, die zwei Brennkurven haben, erhält man, wenn man diese beiden Kurven in zwei äquidistanten Ebenen beliebig annimmt; nur dürfen sie nicht als parallele Gerade gewählt werden. Den einfachen Beweis unterdrücken wir.

Setzt man demgemäß die beiden Brennkurven so an:

$$\begin{aligned} k &= (2\,c i g_1(\alpha), \quad 2\,c i g_2(\alpha), \quad c i), \\ k^* &= (2\,c i h_1(\beta), \quad 2\,c i h_2(\beta), \quad -c i), \end{aligned} \qquad g_1'(\alpha)\, h_2'(\beta) - g_2'(\alpha)\, h_1'(\beta) \neq 0,$$

so erhält man den Anschluß an Formel (8), § 7 vermöge

$$u = c i\,(g_1(\alpha) + h_1(\beta)), \quad v = c i\,(g_2(\alpha) + h_2(\beta)),$$
$$H = (g_1(\alpha) - h_1(\beta),\ g_2(\alpha) - h_2(\beta),\ 1).$$

Setzt man das in (8) ein, so erfüllt die dortige Funktion $f(u, v)$ unsere partielle Differentialgleichung. Als Funktion von α und β genügt sie den beiden Forderungen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv c i\,(g_1 g_2' - g_2 g_1' + h_2 g_1' - h_1 g_2'),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} \equiv c i\,(h_2 h_1' - h_1 h_2' + g_1 h_2' - g_2 h_1').$$

Um diese beiden partiellen Differentialgleichungen integralfrei zu lösen, hat man nach dem Vorgang von Darboux zu setzen

$$g_1(\alpha) \equiv G'(\alpha), \quad g_2(\alpha) \equiv \alpha; \quad h_1(\beta) \equiv H'(\beta), \quad h_2(\beta) \equiv \beta,$$
$$G''(\alpha) - H''(\beta) \neq 0$$

und erhält die Darbouxsche Lösung

$$f = c i\,\{(2\,G(\alpha) - 2\,H(\beta) + (\beta - \alpha)\,(G'(\alpha) + H'(\beta))\} + \text{const}.$$

Bei diesem Ansatz sind aber Lösungen verlorengegangen, nämlich:

a) Für den Ansatz

$$g_1(\alpha) \equiv G'(\alpha), \quad g_2(\alpha) \equiv \alpha; \quad h_1(\beta) \equiv \beta, \quad h_2(\beta) \equiv c_1 = \text{const}$$

wird

$$f = c i\,\{2\,G(\alpha) + (c_1 - \alpha)\,(\beta + G'(\alpha))\} + \text{const}.$$

b) Der Ansatz

$$g_1(\alpha) \equiv \alpha, \quad g_2(\alpha) \equiv c_2 = \text{const}; \quad h_1(\beta) = H'(\beta), \quad h_2(\beta) \equiv \beta$$

gibt die restlichen Lösungen

$$f = ci\{-2H(\beta) + (\beta - c_2)(\alpha + H'(\beta))\} + \text{const.}$$

Die bei Darboux nicht vorkommenden Lösungen entsprechen Kongruenzen mit (nur) einer geradlinigen Brennkurve spezieller Lage.

§ 9.

Die Aufgabe, alle Kongruenzen von vorgegebener *unebener* Mittelfläche anzugeben, ist m. W. ungelöst. Es ist also bisher nicht möglich, die involutorischen gegensinnig volumentreuen Transformationen anzugeben, die eine *vorgegebene* Fläche punktweise stehenlassen. Aber die Gesamtheit *aller* Transformationen der genannten Eigenschaft läßt sich darstellen. Dazu hat man in (I) für m den Wert aus (5) einzusetzen. Die so gewonnenen Formeln umspannen auch die Formeln (II) und (III).

Da jede Kurve Mittelkurve, jede Fläche Mittelfläche von unendlich vielen Kongruenzen ist, ist der Satz bewiesen:

Zu jeder Fläche gibt es unendlich viele gegensinnig volumentreue involutorische Transformationen, bei der sie punktweise stehenbleibt; ebenso zu jeder Kurve.

§ 10.

Die allgemeinste Punkttransformation, welche die nicht-zylindrische Kongruenz (m, H) vom Mittelgebilde $m(u, v)$ *geradenweise* stehenläßt, ist

$$x = m + w H, \quad x = m + f(u, v, w) H. \tag{9}$$

Volumentreu ist sie dann und nur dann, wenn [nach (5a)]

$$f_w((AC - B^2) + f^2(HH_uH_v)^2) = \pm((AC - B^2) + w^2(HH_uH_v)^2),$$

wobei das obere Vorzeichen für gleichsinnig volumentreue Transformationen gilt. Daraus folgt

$$3(AC - B^2) f + (HH_uH_v)^2 f^3 = \pm\{3(AC - B^2) w + (HH_uH_v)^2 w^3 + \varphi(u, v)\}, \tag{9a}$$

so daß sich die Funktion $f(u, v, w)$ aus einer kubischen Gleichung ermittelt. Diese gestaltet sich etwas einfacher, wenn man die Transformation so ansetzt:

$$x = m + \frac{w}{(HH_uH_v)} H, \qquad x^* = m + \frac{f}{(HH_uH_v)} H. \tag{10}$$

Dann lautet die kubische Gleichung

$$f^3 + 3(AC - B^2) f = \pm\{w^3 + 3(AC - B^2) w + \varphi(u, v)\}, \tag{10a}$$

so daß man sogar zu expliziten Endformeln gelangen kann. Singulär verhalten sich außer den Kongruenzstrahlen, für die $r < 3$ ist, auf jedem sonstigen Strahl die Brennpunkte.

Alle diese Transformationen zu gegebener Kongruenz bilden eine gemischte sogenannte unendliche Gruppe. Zu beachten ist, daß für $\varphi(u, v) \equiv 0$ die Transformation die Identität, oder (unteres Vorzeichen) die Spiegelung an der Kongruenz *sein kann*.

Einfacher ist die kubische Gleichung für die Kongruenzen $R < 2$, d. i. für die Bündel von eigentlichem Scheitel ($R = 0$), für die Kongruenzen (7) und schließlich für die Haupttangentenkongruenzen von Flächen, die weder Torsen noch von zweiter Ordnung sind ($R = 1$).

Für das Geradenbündel durch den Nullpunkt erhält man für $\varphi(u, v) \equiv 0$ außer der Identität und der Spiegelung am Nullpunkt noch die beiden Streckungen $x^* = \varepsilon x$ und $x^* = -\varepsilon x$, wo ε eine dritte primitive Einheitswurzel ist. Für $\varphi(u, v) \not\equiv 0$ gibt es auf dem Strahl (u_0, v_0) entweder keinen Ruhepunkt, oder er bleibt punktweise stehen, bei gegensinnigen Transformationen drei getrennte Ruhepunkte!

§ 11.

Zylindrische Kongruenzen.

Für alle zylindrischen Kongruenzen ($r < 3$) gelten die beiden Beziehungen

$$(p_u H_u H_v) H - B_1 H_u + A H_v \equiv 0,$$
$$(p_v H_u H_v) H - C H_u + B_2 H_v \equiv 0.$$

Für den Fall

$$AC - B_1 B_2 \not\equiv 0$$

folgt daraus $r = 1$. Für *eigentlich* zylindrische Kongruenzen (§ 2) ist also

$$AC - B_1 B_2 \equiv 0, \quad \text{d. i.} \quad 4(B^2 - AC) \equiv (B_1 - B_2)^2. \tag{11}$$

Für die zylindrischen Kongruenzen $r = 2$, $R = 2$ gilt also

$$B_1 - B_2 \not\equiv 0.$$

Mit jedem Punkt einer solchen Kongruenz, für den $R = 2$ ist, ist kovariant verbunden der Punkt

$$k = p + \frac{(p_u p_v H)}{(B_1 - B_2)} H, \tag{12}$$

sein Brennpunkt. Für ihn gelten die Formeln

$$(k_u H H_u) = A, \quad (k_u H H_v) = B_1, \quad (k_v H H_u) = B_2, \quad (k_v H H_v) = C, \tag{12a}$$
$$(k_u k_v H) = 0.$$

§ 12.

Wegen $B_1 - B_2 \neq 0$ ist niemals $k_u \equiv k_v \equiv 0$: Das Brenngebilde kann nicht auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Dagegen kann es eine Kurve sein. Da bei jeder eigentlich zylindrischen Kongruenz die uneigentlichen Punkte der Kongruenzgeraden eine uneigentliche Kurve durchlaufen, darf man diese als $H(u)$ ansetzen. Wird die Brennkurve dann als $k = k(v)$ genommen, so hat man für die zylindrischen Kongruenzen ($r = 2$, $R = 2$) von (eigentlicher) Brennkurve die Darstellung

$$(13) \qquad p = k(v), \quad H = H(u), \quad (k_v H H_u) \neq 0.$$

Ist die Brennkurve $k(v)$ krumm und eben, so darf $H(u)$ nicht die uneigentliche Gerade der Kurvenebene sein. Ist $k(v)$ gerade, und ebenso $H(u)$, so dürfen beide nicht in derselben Ebene liegen.

Hat die Kongruenz eine Brennfläche, ist also $[k_u k_v] \neq 0$, so folgt aus der letzten Formel (12a) für $H(u)$ eine Darstellung

$$H(u) = \lambda k_u + \mu k_v,$$

so daß alle Kongruenzgeraden Tangenten der Brennfläche sind. Diese ist stets uneben. Jeder Zylinder der Kongruenz berührt die Brennfläche längs einer Lichtgrenzkurve. Daher gibt es zu jeder *unebenen* vorgegebenen Brennfläche unzählig viele zylindrische Kongruenzen.

§ 13.

Mit der zylindrischen Kongruenz (k, H) vom Brenngebilde k ist eine von der Identität verschiedene *involutorische volumentreue* Transformation verbunden

$$(IV) \qquad x = k - wH, \quad x^* = k + wH.$$

Sie kommt dadurch zustande, daß man jeden Kongruenzstrahl an seinem Brennpunkt spiegelt, und soll, da sie *gleichsinnig* volumentreu ist, als *Umwendung* um die Kongruenz bezeichnet werden. Bei ihr bleibt jeder Punkt des Brenngebildes in Ruhe. So folgt:

Für jede Kurve gibt es (unendlich viele) involutorische gleichsinnig volumentreue Transformationen, bei denen sie punktweise stehenbleibt. Für die Kurve $k(v)$ in (13) heißen diese:

$$(V) \qquad x = k(v) - wH(u), \quad x^* = k(v) + wH(u), \quad (k_v H H_u) \neq 0.$$

Ein entsprechender Satz gilt für jede Fläche (zunächst allerdings nur für jede unebene). Vgl. § 17.

§ 14.

Die allgemeinste Punkttransformation, die die Kongruenz (k, H) vom Brenngebilde k geradenweise stehenläßt, ist

$$x = k + wH, \quad x = k + f(u, v, w)\, H.$$

Volumentreu ist sie dann und nur dann, wenn

$$f^2 = \pm (w^2 + \varphi(u, v)),$$

wobei das obere Vorzeichen für gleichsinnig volumentreue Transformationen gilt. Hier ermittelt sich im Gegensatz zu § 10 die Funktion $f(u, v)$ bereits aus einer *quadratischen* Gleichung. Für $\varphi(u, v) \equiv 0$ ergeben sich außer der Identität die Umwendung um die Kongruenz, an gegensinnigen Transformationen zwei solche von der Periode vier. Für $\varphi(u_0, v_0) \neq 0$ gibt es auf dem Kongruenzstrahl (u_0, v_0) keinen Ruhepunkt bei gleichsinnigen Transformationen, zwei getrennte bei gegensinnigen.

§ 15.

Die zylindrischen Kongruenzen ($r = 2$, $R = 1$) können nach § 11 so charakterisiert werden:

$$(H H_u H_v) \neq 0, \quad B_1 - B_2 \equiv 0, \quad A, B, C$$

nicht gleichzeitig identisch Null, ebenso nicht H_u und H_v.

Man muß mit der Möglichkeit rechnen, daß alle Kongruenzgeraden zur Ebene $(u, v, 0)$ parallel sind (der Fall kommt wirklich vor). Das läßt sich durch affine Transformation beseitigen, so daß man ohne Schaden $H_3 \equiv 1$ setzen darf. Beim Ansatz

$$p = (u, v, 0)$$

reduziert sich dann die Bedingung $B_1 - B_2 \equiv 0$ auf

$$\frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{\partial H_2}{\partial v} \equiv 0,$$

so daß man ansetzen darf

$$H = (f_v, -f_u, 1).$$

Die noch fehlenden Bedingungen ergeben

$$f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 \equiv 0,$$

aber nicht $f_{uu} \equiv f_{uv} \equiv f_{vv} \equiv 0$ (sonst $R \equiv 0$).

Alle affinen Typen der brennpunktlosen Kongruenzen ($r = 2$, $R = 1$) erhält man daher aus der Darstellung (8) von § 7, wenn man die dortige Bedingung (8a) abändert:

(8b) $$f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 \equiv 0, \quad \text{ohne daß } f_{uu} \equiv f_{uv} \equiv f_{vv} \equiv 0.$$

(Für

(8c) $$f_{uu} \equiv f_{uv} \equiv f_{vv} \equiv 0$$

liegt ein Parallelenbündel vor.)

Man kann die brennpunktlose Kongruenz so vorgeben, daß man sie von vornherein als zylindrisch erkennt, das ist mit $H = H(u)$. Das kommt natürlich letzten Endes auf die Integration von $f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 = 0$ hinaus. Es genügt der Ansatz

(14) $$p = (v, g(u) + v f'(u), 0), \quad H = (u, f(u), 1),$$

wobei $g'(u)$ und $f''(u)$ nicht gleichzeitig identisch verschwinden. Setzt man nämlich H gemäß dieser Formel an, so gibt $B_1 - B_2 \equiv 0$ eine partielle Differentialgleichung für die p, die sich sofort integrieren läßt. Dann läßt sich vermöge einer Substitution (2). § 2 erreichen, daß $p_3 = 0$ wird.

§ 16.

Die allgemeinste Punkttransformation, welche die brennpunktlose Kongruenz (14) geradenweise stehenläßt,

$$x = p + wH, \quad x^* = p + f(u, v, w) H,$$

gibt wegen $(p_u p_v H) \neq 0$ als Bedingung für Volumentreue eine *lineare* Gleichung für f (vgl. dagegen § 10 und 14):

$$f = \pm (w - 2\varphi(u, v)).$$

Unter den gleichsinnig volumentreuen Transformationen (oberes Vorzeichen) kommt außer der Identität keine involutorische vor. *Die gegensinnigen Transformationen sind sämtlich involutorisch.* Das Ruhegebilde für sie,

$$x = x^* = p + \varphi(u, v) H,$$

ist stets eine Fläche, die man erhält, wenn man jeder Kongruenzgeraden einen beliebigen ihrer eigentlichen Punkte zuordnet. Sie bleibt punktweise stehen.

Diese gegensinnig volumentreuen Transformationen sollen als *Spiegelungen an der brennpunktslosen Kongruenz* bezeichnet werden. Ist diese durch (14) gegeben, so erhält man alle Spiegelungen an ihr durch:

(VI)
$$\begin{aligned} x &= (v + wu, g(u) + v f'(u) + w f(u), w), \\ x_1^* &= v \qquad\qquad + (2\varphi(u, v) - w) u, \\ x_2^* &= g(u) + v f'(u) + (2\varphi(u, v) - w) f(u), \\ x_3^* &= \qquad\qquad + (2\varphi(u, v) - w) \cdot 1. \end{aligned}$$

wobei $g'(u)$ und $f''(u)$ nicht gleichzeitig identisch verschwinden.

§ 17.

Die zylindrischen Kongruenzen $r = 2$, $R = 0$ sind die ebenen Geradenfelder. Die Feldebene soll als $(u, v, 0)$ genommen werden. Soll sie geradenweise stehenbleiben, so muß sie auch punktweise stehenbleiben. Nimmt man irgendeine der Kongruenzen (8) (vgl. § 7, 15), und spiegelt jeden Kongruenzstrahl an seinem Schnittpunkt mit der Feldebene, so erhält man eine *gegensinnig* volumentreue *involutorische* Transformation, die das Feld geradenweise in Ruhe läßt:

$$\text{(VII)} \quad x = (u - wf_v,\ v + wf_u,\ -w), \quad x^* = (u + wf_v,\ v - wf_u,\ w).$$

Neu gegen die äußerlich ebenso aussehenden Formeln (III), § 7 ist, daß f nicht mehr an die Bedingung (8a) gebunden ist, vielmehr keiner Beschränkung unterliegt; es darf sogar als $f(u, v, w)$ gewählt werden. Für $f \equiv 0$ erhält man die Spiegelung an der Feldebene üblichen Sprachgebrauches. Durch Zusammensetzung mit dieser erhält man aus (VII)

$$\text{(VIII)} \quad x = (u - wf_v,\ v + wf_u,\ w), \quad x^* = (u + wf_v,\ v - wf_u,\ w),$$

d. i. damit ist die im letzten Satze von § 13 enthaltene Einschränkung behoben; es gibt auch für jede Ebene gleichsinnig volumentreue Transformationen, bei denen sie punktweise stehenbleibt.

Zugleich sieht man, daß es angebracht ist, einem ebenen Geradenfeld die Feldebene als Brennfläche beizulegen. Dann ist jede Fläche Brennfläche (wenigstens) einer Kongruenz.

§ 18.

Die Parallelenbündel ($r = 1$, $R = 0$) verhalten sich wie die brennpunktlosen Kongruenzen. Für das Parallelenbündel

$$p = (u, v, 0), \quad H = (0, 0, 1)$$

hat man folgende volumentreue Transformationen, bei denen es geradenweise stehenbleibt:

$$\text{(IX)} \qquad x = (u, v, w), \quad x^* = (u, v, w - 2\,\varphi(u, v)),$$

$$\text{(X)} \qquad x = (u, v, w), \quad x^* = (u, v, -w + 2\,\varphi(u, v)).$$

Die Transformationen (IX) sind gleichsinnig, die gegensinnigen Transformationen (X) sind sämtlich involutorisch und lassen die Fläche $(u, v, \varphi(u, v))$ punktweise stehen.

§ 19.

Zusammenfassung.

Satz 1. *Jede analytische Geradenkongruenz bleibt geradenweise stehen bei einer unendlichen Gruppe von gleichsinnig volumentreuen Transformationen.* Vgl. § 10, 14, 16, 17, 18.

Ist die Kongruenz kein ebenes Geradenfeld, so hängt die Gruppe von einer Funktion $\varphi(u, v)$ ab, für ein Geradenfeld ist sie noch umfassender.

Satz 2. *Jede analytische Geradenkongruenz bleibt geradenweise bei einer unendlichen Schar gegensinnig volumentreuer Transformationen stehen.*

Satz 3. *Jede analytische Geradenkongruenz bleibt geradenweise stehen bei mindestens einer involutorischen volumentreuen, von der Identität verschiedenen Transformation.* Vgl. § 5, 13, 16, 17, 18.

Satz 4. *Jede analytische Kurve bleibt punktweise stehen bei unendlich vielen gleichsinnigen und unendlich vielen gegensinnigen volumentreuen involutorischen Transformationen.* Vgl. § 6, 13.

Satz 5. *Jede analytische Fläche bleibt punktweise stehen bei unendlich vielen gegensinnigen und unendlich vielen gleichsinnigen volumentreuen involutorischen Transformationen.* Vgl. § 9, 13, 17.

§ 20.

Seien

$$x_i = x_i(u, v, w), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

eindeutige regulär-analytische Funktionen für das Argument w, für die der Vektor $x_w \not\equiv 0$ ist, und seien in den Entwicklungen

$$x_i = a_{i0}(u, v) + a_{i1}(u, v)(w - w_0) + \cdots$$

die Koeffizienten $a_{ik}(u, v)$ regulär-analytische Funktionen von u und v. Dann stellt das System $x(u_0, v_0, w)$ eine analytische Kurve dar. Ist weiter $[x_u x_v] \not\equiv 0$, so gibt das System $x(u, v, w)$ eine analytische Kongruenz analytischer Kurven. Es ist also w der Parameter eines Punktes der Kongruenzkurve (u, v).

Die allgemeinste Punkttransformation, die diese Kurvenkongruenz kurvenweise stehenläßt, ist

$$x = x(u, v, w), \quad x^* = x(u, v, f(u, v, w)).$$

Sie ist volumentreu dann und nur dann, wenn

$$f_w(x_u x_v x_f) = \pm (x_u x_v x_w) \not\equiv 0.$$

Links fehlen die partiellen Ableitungen f_u und f_v. Die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung hat daher die Gestalt

$$f(u, v, w) = \pm (F(u, v, w) + \varphi(u, v)).$$

Damit ist bewiesen:

Jede analytische Kongruenz analytischer Kurven bleibt kurvenweise stehen bei einer unendlichen Gruppe gleichsinniger und gegensinniger volumentreuer Transformationen.

Der Beweis erstreckt sich nicht auf den Fall $(x_u x_v x_w) \equiv 0$. Dann liegen aber alle Kurven der Kongruenz auf einer Fläche. Nach Satz 5 bleibt diese bei einer unendlichen Gruppe volumentreuer Transformationen punktweise stehen, und damit auch die Kurvenkongruenz kurvenweise.

§ 21.

Sei $(x, y) \to (x^*, y^*)$ eine *gleichsinnig flächentreue* Punkttransformation der Ebene. Dann loten wir die beiden Punkte in die Ebenen $z = -k$ und $z = k$, $(k \neq 0)$. Das soll natürlich die elementare affine Konstruktion sein, die den Punkt (x, y) nach $(x, y, -k)$, und den Punkt (x^*, y^*) nach $(x^*, y^*, +k)$ bringt, und die sich recht schwerfällig beschreiben läßt. Durch Verbinden der neu gewonnenen Punkte erhalten wir die zur Transformation gehörige k-Kongruenz, wie wir sagen wollen. Für sie wird nach § 3 wegen

$$p = (x, y, -k), \quad H = (x^* - x, y^* - y, 2k)$$
$$B_1 - B_2 \equiv 2k(2(xy) - (xy^*) - (x^* y))$$
$$(H H_u H_v) \equiv (B_1 - B_2),$$

wobei $(pq) = p_u q_v - p_v q_u$ abgekürzt ist.

Das gibt drei Fälle:

a) $B_1 - B_2 \not\equiv 0$: Die k-Kongruenz ist nichtzylindrisch, und der Mittelpunkt des Kongruenzstrahls [(5), § 4] wird

$$m = (\tfrac{1}{2}(x + x^*), \tfrac{1}{2}(y + y^*), 0),$$

gehört also der Ebene $z = 0$ an.

b) $B_1 - B_2 = 0$. Die Kongruenz ist zylindrisch und brennpunktlos. Sie ist nicht etwa ein Geradenfeld, denn:

c) Ist außerdem

$$A = B_1 = B_2 = C = 0,$$

so folgt, daß die Transformation eine Schiebung ist, und die zugehörige k-Kongruenz ein Parallelenbündel.

In den beiden Fällen b) und c) läuft kein Kongruenzstrahl zur Ebene $z = 0$ parallel.

Notwendig für die Kenntnis aller gleichsinnig flächentreuen Transformationen der Ebene ist danach die Kenntnis aller Kongruenzen der Familien a), b), c). Sie ist auch hinreichend, d. i. jede der genannten Kongruenzen bestimmt umgekehrt eine gleichsinnige flächentreue Transformation.

§ 22.

Die Mehrzahl dieser Kongruenzen ist durch (8), § 7 gegeben. Das sind alle Kongruenzen b) und c), von a) dagegen nur diejenigen, die eine Mittel*ebene* haben. Es fehlen nur noch die mit ebener Mittelkurve — sie ergeben sich aus (7), § 6 — und endlich die, deren Mittelgebilde ein Punkt von $z = 0$ ist, d. i. Bündel.

Der letzte Fall gibt, unabhängig von k, also etwa für $k = 1$ die Umwendungen. Im vorletzten Fall erfüllen die Mitten $(\frac{1}{2}(x + x^*), \frac{1}{2}(y + y^*))$ eine Kurve, etwa $m(u)$. Die Transformation kann dann die Spiegelung an der *krummen* Kurve sein:

$$(x, y) = (m_1 - v m_1', m_2 - v m_2'), \quad (x^*, y^*) = (m_1 + v m_1', m_2 + v m_2').$$

Alle übrigen hergehörigen Transformationen kommen bei Scheffers[1]) vor. Eine affin invariante Konstruktion, die den Raum nicht zu Hilfe nimmt, hat Verfasser an anderer Stelle gegeben[2]).

Die Kongruenzen (8) ergeben die noch ausstehenden gleichsinnig flächentreuen Transformationen der Ebene

$$(x, y) = (u - k f_v, v + k f_u), \quad (x^*, y^*) = (u + k f_v, v - k f_u).$$

Hier hat man

$$x_u y_v - x_v y_u = x_u^* y_v^* - x_v^* y_u^* = 1 + k^2 (f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2).$$

Bei Scheffers wird nun $k = 1$ gesetzt, und dadurch gehen Transformationen verloren. Diese Spezialisierung ist unerlaubt, wenn

$$f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 = -1,$$

wenn also die Kongruenz zwei Brennkurven in den Ebenen $z = \pm 1$ hat (§ 7). In den Formeln von § 8 ist daher zu setzen $ci = 1$ (der Fall $ci = -1$ gibt eine zur vorigen Kongruenz zentrisch symmetrische).

---

[1]) Math. Zeitschr. **2** (1918).

[2]) Crelle **183** (1941).

Den Scheffersschen Formeln sind daher noch die nachstehenden hinzuzufügen (vgl. § 8):

$$(x, y) = ((1-k)G'(\alpha) + (1+k)H'(\beta),\ (1-k)\alpha + (1+k)\beta),$$
$$(x^*, y^*) = ((1+k)G'(\alpha) + (1-k)H'(\beta),\ (1+k)\alpha + (1-k)\beta),$$
$$k^2 \neq 1,\quad G''(\alpha) - H''(\beta) \not\equiv 0,$$

ferner

$$(x, y) = ((1-k)G'(\alpha) + (1+k)\beta,\ (1-k)\alpha + (1+k)c_1),$$
$$(x^*, y^*) = ((1+k)G'(\alpha) + (1-k)\beta,\ (1+k)\alpha + (1-k)c_1),$$
$$k^2 \neq 1,\quad c_1 \text{ konstant},$$

und endlich

$$(x, y) = ((1-k)\alpha + (1+k)H'(\beta),\ (1-k)c_2 + (1+k)\beta),$$
$$(x^*, y^*) = ((1+k)\alpha + (1-k)H'(\beta),\ (1+k)c_2 + (1-k)\beta),$$
$$k^2 \neq 1,\quad c_2 \text{ konstant}.$$

Damit sind dann alle gleichsinnig flächentreuen Transformationen der Ebene aufgezählt.

Bonn, den 31. Dezember 1940.

(Eingegangen am 7. Januar 1941.)

Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Von

K. Brauner und Hans Robert Müller in Graz.

In speziellen Fällen der Ebene wurden die im Titel erwähnten Kurven schon öfters untersucht. In allen diesen Arbeiten wird eine Charakterisierung des Kreises auf Grund seiner Eigenschaft versucht, daß zu gleich langen Sehnen auch solche Bögen gehören[1]). So wurde auch versucht, den Kreis bereits durch das Bestehen der obigen Eigenschaft für Sehnen einer bestimmten Länge $2L$ zu kennzeichnen. Der Beweis basiert auf dem Schluß, daß die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \alpha'(s) + \alpha'(s+S) = \frac{1}{L}\left|\sin\alpha(s+S) - \sin\alpha(s)\right|$$

nur Lösungen

$$\text{(Ia)} \qquad \alpha'(s) + \alpha'(s+S) = 0$$

besitzen kann[2]). Dies wird jedoch in § 2 der vorliegenden Arbeit widerlegt. Es werden dort Lösungen von (I) angegeben, die sogar eine willkürliche Funktion enthalten und die stetig in ihren Ableitungen bis zu einer vorgegebenen Ordnung sind. Aber selbst wenn $\alpha(s)$ *analytisch* vorausgesetzt wird, kann man nicht ohne weiteres von (I) auf (Ia) schließen, wie das einfache Beispiel

$$\text{(II)} \qquad \alpha'(s) + \alpha'(s+2) = \operatorname{sh}\alpha(s+2) - \operatorname{sh}\alpha(s)\ ^{3})$$

zeigt. Es ist

$$\alpha(s) = \lg\frac{s+1}{s-1} \qquad \text{für} \qquad 1 < s < \infty,$$

eine analytische Lösung von (II). Nun ergibt eine einfache Rechnung

$$\alpha'(s) + \alpha'(s+2) = -\frac{4}{s^2+2s-3} \neq 0.$$

Die Frage, ob eine periodische Lösung $\alpha(s)$ von (I) auch (Ia) erfüllt, bleibt jedoch offen.

---

[1]) Vgl. H. Geppert, Über einige Kennzeichnungen des Kreises. Math. Zeitschr. 46, S. 117. Wird im folgenden mit G. zitiert.

[2]) Vgl. G., S. 121, (8).

[3]) $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

In den weiteren Teilen der Arbeit liefern die Untersuchungen der erwähnten Bewegungen neue Kennzeichnungen von Geraden, Kreisen und Zindlerschen Kurven, im Raume ergeben sich interessante Eigenschaften der Striktionslinie von windschiefen Regelflächen und der Gratlinie von Torsen. Es gelingt so eine neue Definition der Striktionslinie im Reellen zu geben, bei der auf jede Limesbetrachtung verzichtet werden kann. Fast zwangsläufig gelangt man zu dem geometrisch interessanten Begriff der *Verwindung* von Regelflächen. Einige Beispiele und eine Kennzeichnung der Schraublinie unter den Raumkurven beschließen die Arbeit.

§ 1.

Bewegen wir eine Strecke von der Länge $2L$ in der Ebene, so beschreibe der eine ihrer Endpunkte eine Kurve, deren Parameterdarstellung in vektorieller Schreibweise

$$\mathfrak{x}(s) \tag{1}$$

sei. Als Parameter s wollen wir gleich die Bogenlänge dieser Kurve wählen, für den Ableitungsvektor von (1) können wir also ansetzen

$$\mathfrak{x}'(s) : (\cos\varphi, \sin\varphi). \tag{2}$$

Ist nun weiter

$$\mathfrak{r}(s) : (\cos\psi, \sin\psi) \tag{3}$$

ein Einheitsvektor in der obigen Strecke, so sei die vom zweiten Endpunkte der bewegten Strecke beschriebene Kurve durch

$$\mathfrak{y}(s) = \mathfrak{x}(s) + 2L\mathfrak{r}(s) \tag{4}$$

bestimmt.

Fordern wir, daß obige Bewegung so vor sich geht, daß beide Endpunkte gleiche Geschwindigkeit besitzen, so finden wir durch Ableitung von (1) und (4) als notwendige und hinreichende Bedingung

$$\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{r}' + L\mathfrak{r}'^2 = 0. \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung der durch (2) und (3) festgelegten Bezeichnungsweise finden wir, daß (5) nur dann erfüllt ist, wenn eine der beiden folgenden Gleichungen befriedigt wird

$$\psi' = 0, \tag{6a}$$

$$\sin(\varphi - \psi) + L\psi' = 0. \tag{6b}$$

Ist (6a) erfüllt, so ist $\mathfrak{r}(s) = \text{konst.}$ und (2) geht aus (1) durch Parallelverschiebung um den Vektor $2L\mathfrak{r}$ hervor. Von Interesse ist also nur der Fall $\psi' \neq 0$. Wir wollen zunächst nur diesen ins Auge fassen. Die Mittelpunkte der Strecke werden eine Kurve beschreiben, deren Parameterdarstellung

$$\mathfrak{z}(s) = \mathfrak{x}(s) + L\mathfrak{r}(s) \tag{7}$$

ist. Daraus folgt aber sofort

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{r}\cos(\varphi - \psi). \tag{8}$$

Aus (8) folgern wir aber unmittelbar: *Bewegt sich eine Strecke in der Ebene so, daß beide Endpunkte konstante Geschwindigkeit besitzen, so bewegt sich der Mittelpunkt dieser Strecke auf einer Kurve, deren Tangente mit der jeweiligen Lage der Strecke sich deckt, abgesehen von dem trivialen Fall der Translation.*

Eine einfache Rechnung zeigt aber sofort, wenn man umgekehrt von einer beliebigen, glatten Kurve ausgeht und diese als Ort der Mitten einer Strecke ansieht, deren Lage sich mit der jeweiligen Tangente an diese Kurve deckt, so beschreiben die Endpunkte dieser Strecke Kurven (1) *und* (4), *deren Bogenlängen gleich sind.*

Zur Vereinfachung bezeichnen wir $\measuredangle(\mathfrak{r}, \mathfrak{x}') = \alpha$ und in analoger Weise $\measuredangle(-\mathfrak{r}, \mathfrak{y}') = \alpha_1$, mit $k(s)$ bzw. $k_1(s)$ die Krümmungen der Kurven (1) bzw. (4). Wegen $\alpha = \varphi - \psi$ können wir nun die Gleichung (6b) ersetzen durch

$$L\alpha'(s) + \sin\alpha(s) - L\varphi'(s) = 0. \tag{9}$$

Aus (9) oder auch aus (5) folgern wir in einfachster Weise

$$\alpha_1(s) = \pi - \alpha(s) \tag{10}$$

und weiter

$$k(s) = \frac{1}{L}\sin\alpha(s) - \alpha'(s). \tag{11}$$

Aus (10) und (11) gewinnt man aber

$$k_1(s) = \frac{1}{L}\sin\alpha(s) + \alpha'(s).^{4}) \tag{12}$$

Bei der obigen Bewegung unserer Strecke werden die Kurven (1) *und* (4) *im allgemeinen zwei voneinander verschiedene Kurven ergeben. Wir fragen nun, ob es möglich ist, unsere Bewegung so einzurichten, daß bei gleicher Geschwindigkeit der Endpunkte* (1) *und* (4) *in ihrem Gesamtverlauf eine einzige Kurve ergeben.* Diese Fragestellung ist offenbar völlig gleichwertig mit der folgenden: *Man bestimme eine Kurve C so, daß eine Strecke von der konstanten Länge $2L$, deren beide Endpunkte auf der Kurve C verbleiben, stetig so bewegt werden kann, daß der Bogen, gemessen auf C, zwischen den Endpunkten jeder möglichen Lage unserer Strecke konstant $= \sigma$ verbleibt. Durch die eben beschriebene Bewegung muß C in seiner Gesamterstreckung von beiden Endpunkten der Strecke durchlaufen werden können*[5]).

Zur Ermittlung solcher Kurven C gehen wir zunächst von einem beliebigen Kurvenstück C_0, stetiger Krümmung aus, welches durch die Punkte P_0 und P_1 begrenzt wird (vgl. Fig. 1). Die Bogenlänge von C_0 wollen wir

[4]) Vgl. G., S. 120ff.

[5]) In G. ist σ mit S bezeichnet.

mit s bezeichnen, und zwar entspreche dem Punkte P_0 der Wert $s = 0$, dem Punkte P_1 $s = \sigma$, ferner wählen wir die Strecke $\overline{P_0 P_1} = 2L$. Wir führen nun die Bewegung unserer Strecke so durch, daß wir als deren Anfangslage $\overline{P_0 P_1}$ wählen und für (1), für $0 \leqq s \leqq \sigma$ das Kurvenstück C_0 nehmen. Da nach den eben getroffenen Voraussetzungen nach (2) die Funktion $\varphi(s)$, $0 \leqq s \leqq \sigma$, bestimmt ist, genügt $\alpha(s)$ der Differentialgleichung (9) und ist durch die bereits getroffene Wahl von $\alpha(0)$ eindeutig bestimmt. Durch die Substitution $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = u$ geht (9) in die Riccatische Differentialgleichung

$$2Lu'(s) + 2u(s) - L\varphi'(s)[1 - u^2(s)] = 0 \tag{13}$$

über. Daraus erkennen wir sofort, *daß durch Vorgabe einer Bewegungsmöglichkeit unserer Strecke längs des Kurvenstückes C_0 jede andere durch Quadraturen bestimmt sein wird, und durch Vorgabe drei voneinander verschiedener Möglichkeiten wird jede andere in der bekannt einfachen Weise konstruiert werden können.*

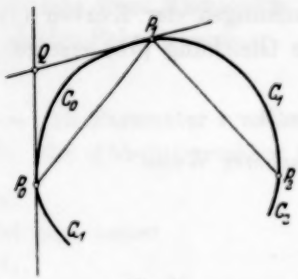

Fig. 1.

Wenn nun der eine Endpunkt unserer Strecke in der oben angegebenen Weise das Kurvenstück C_0 durchläuft, wird der andere Endpunkt eine Kurve C_1 von der gleichen Bogenlänge σ durchlaufen müssen. Da aber das Kurvenstück C_1 im Punkte P_1 beginnt, setzen sich C_0 und C_1 zu einem einzigen Stücke zusammen. Den Endpunkt des Kurvenstückes C_1 wollen wir mit P_2 bezeichnen (vgl. Fig. 1), es ist dann die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ die Endlage unserer Strecke nach der obigen Bewegung längs des Kurvenstückes C_0. Fassen wir nun die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ als die Anfangslage für eine Bewegung längs des Kurvenstückes C_1 auf, so beschreibt der zweite Endpunkt der Strecke ein Kurvenstück C_2, welches sich im Punkte P_2 an C_1 anschließt. Führt man in der gleichen Weise mit der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ eine Durchlaufung von P_1 nach P_0, also im entgegengesetzten Sinne wie früher durch, so beschreibt der andere Endpunkt ein Kurvenstück C_{-1}, welches sich in P_0 an C_0 anschließt. *Die aneinandergereihten Kurvenstücke* $\ldots C_{-2} C_{-1} C_0 C_1 C_2 \ldots$ *ergeben eine Kurve C von der verlangten Eigenschaft.* Ihr haftet allerdings ein leicht zu behebender Schönheitsfehler an, sie wird nämlich in den Punkten $\ldots P_{-2} P_{-1} P_0 P_1 P_2 \ldots$ im allgemeinen Knicke aufweisen, d. h. die Funktion $\alpha(s)$ wird für $s = \cdots, -2\sigma, -\sigma, 0, \sigma \ldots$ unstetig werden. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der beiden Tangenten von C_0 in den Punkten P_0 und P_1 mit Q und wählt man das Dreieck $P_0 Q P_1$ so, daß $\overline{P_0 Q} = \overline{P_1 Q}$ wird, was sich ja bei der Willkür des Kurvenstückes C_0 immer leicht erreichen läßt, so wird nach der Relation (10) C_1 sich stetig und glatt an C_0 anfügen, und das gleiche muß auch für alle

weiteren Kurvenstücke C_i und C_{i+1} in ihrem gemeinsamen Punkte P_{i+1} gelten. Damit *ist also erreicht, daß das so gewonnene C eine durchwegs glatte Kurve ergibt. Die so gewonnene Funktion* $\alpha(s)$ *ist also durchwegs stetig.* Die in der Relation (11) vorkommende Funktion $\alpha_1(s)$ ist in unserem Falle gleich $\alpha(s+\sigma)$ zu setzen; wir erhalten auf diese Weise die Krümmung im Punkte P_1 der Kurve C. Soll nun auch unsere Kurve C stetige Krümmung besitzen, so haben wir dem Kurvenstücke C_0 in P_1 eine Krümmung zu geben, wie die Relation (12) angibt. Dann ist aber auch die Stetigkeit der Krümmung in allen anderen Punkten P_i gesichert. Somit ist die so gewonnene Kurve C stetig gekrümmt und die Funktion $\alpha(s)$ besitzt eine stetige Ableitung. Ganz allgemein läßt sich sagen: *Das obige Verfahren ermöglicht uns Kurven C von der geforderten Eigenschaft zu finden, die stetige Ableitungen bis zu einer vorgegebenen Ordnung n besitzen, die zugehörige Funktion* $\alpha(s)$ *besitzt dann eine stetige Ableitung der Ordnung* $n-2$ *und befriedigt die eingangs erwähnte Gleichung* (I), *wenn wir darin für S* σ *setzen.* Hierzu ist nur erforderlich, daß unser Kurvenstück C_0 n-mal stetig differentiierbar angenommen wird und im Punkte P_1 die Krümmung und deren Ableitungen bis zur Ordnung n die Gleichung (12) bzw. deren Ableitungen für $s=\sigma$ befriedigen. *Für die so erhaltenen Funktionen wird im allgemeinen* $\alpha'(s)+\alpha'(s+\sigma) \neq 0$.

§ 2.

Unter den Kurven C des vorigen Abschnitts kommen als besondere Fälle auch die Kreise und Geraden der Ebene vor. *Eine Kennzeichnung dieser letzteren Kurven auf Grund der erwähnten Eigenschaft ist leicht möglich, wenn wir von unserer Kurve C verlangen, daß sie nicht nur die stetige Bewegung einer Strecke von der Länge* $2L$ *so ermöglicht, daß deren Endpunkte immer auf ihr zu liegen kommen und gleichzeitig gleiche Bogenstücke auf C begrenzen, sondern daß dies auch zutrifft für alle Längen* $2L$, *die einem Intervall angehören.* Der Beweis für diese Tatsache ergibt sich unmittelbar aus den Ergebnissen des Abschnittes § 7, und es erübrigt sich, auf diesen hier weiter einzugehen.

Im vorigen Abschnitt wurden die Kurven C unter der Bedingung ermittelt, daß unsere Strecke so bewegt wird, wie es den Differentialgleichungen (6b), (9) oder (13) entspricht; liegt nun im besonderen der Fall der Translation vor, so sind diese Differentialgleichungen durch die Gleichung (6a) zu ersetzen. Dann erkennt man aber sofort, daß die aus C_0 gewonnenen Kurvenstücke C_i ($i=\pm 1, \pm 2, \ldots$) einfach aus C_0 durch Translation um den Vektor $2Li\tau$ ($i=\pm 1, \pm 2, \ldots$) hervorgehen. Es gilt daher: *Alle Kurven C, die zu Streckenbewegungen gehören, die der Differentialgleichung* (6a) *genügen, sind daher periodische Kurven, d. h. sie gehen bei Translationen um den Vektor* $2L\tau$ *in sich über. Die zugehörige Funktion* $\alpha(s)$ *besitzt daher die Periode* σ *in* s.

Wir gehen zunächst von einer Kurve C aus, welche zu einer Streckenbewegung $\psi' \neq 0$ gehört. Den Ort der Streckenmitten wollen wir mit $\hat{C}$ bezeichnen. Nach den Ausführungen des Abschnitts 1 ergeben die Tangenten von C auch die einzelnen Lagen unserer Strecke. Sieht man daher von dem besonderen Fall der sogenannten *Zindlerschen Kurven*[6]), bei denen $\overline{P_0 P_1}$ mit $\overline{P_1 P_2}$ zur Deckung kommen, also auch jedes C_{2i} mit C_0 bzw. jedes C_{2i+1} mit C_1, *so besitzt* $\hat{C}$ *durch jeden Punkt von* C *zwei Tangenten von der gleichen Länge* L, wenn wir unter Länge der Tangente die Strecke von C bis zum Berührungspunkt auf $\hat{C}$ verstehen.

Aus diesen Überlegungen folgt zunächst, *daß unter den Kurven* C *im Sinne des Abschnitts* 1 *die Zindlerschen Kurven dadurch gekennzeichnet sind, daß durch jeden Punkt von* C *im allgemeinen nur eine einzige Strecke von der Länge* $2L$ *hindurchgeht, zu der ein Bogen von der Länge* σ *gehört*[7]).

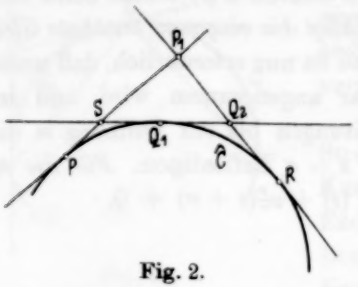

Fig. 2.

Gehen wir nun von einer $\hat{C}$ aus und tragen wir auf ihren Tangenten beiderseits von ihrem Berührungspunkte die Länge λ ab, so bilden diese Punkte ein Kurvenpaar (1) und (4). Gehört nun $\hat{C}$ zu einer Kurve C, so wird es einen Wert für $\lambda = L$ geben, für den diese Kurvenpaare in ihrer Gesamtheit eine einzige zusammenhängende Kurve ergeben. Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise wollen wir zwei Kurvenpaare, die sich mit Hilfe des gleichen λ-Wertes von der gleichen Kurve $\hat{C}$ ableiten lassen als *ein Paar von Abstandskurven* bezeichnen. Aus den obigen Ausführungen wissen wir, daß es recht allgemeine, beliebig oft stetig differentiierbare Kurven C gibt, die wenigstens für einen Wert λ ein zusammenfallendes Paar von Abstandskurven ergeben. Es liegt daher die Frage nach allen jenen Scharen von Abstandskurvenpaaren, die sich von einem C ableiten lassen und die sämtlich, also für alle Werte von λ zusammenfallen, nahe. Wir wissen, daß diese Forderung für jede Schar von Zindlerschen Kurven erfüllt ist. Sehen wir zunächst einmal von diesen Kurvenscharen ab, so erkennt man aus dem obigen sofort, daß von jedem Punkte irgendeiner Tangente an die zugehörige Kurve $\hat{C}$ eine zweite gleich lange gehen muß.

In Fig. 2 sind in den Punkten P und R von $\hat{C}$ die beiden Tangenten PP_1 und RP_1 eingezeichnet. Mit Q_1 werde ein weiterer Punkt von $\hat{C}$ bezeichnet,

[6]) Vgl. G., S. 122.

[7]) Über weitere Eigenschaften der Zindlerschen Kurven vgl. G., S. 122ff.

seine Tangente sei SQ_2. Wegen der eben gemachten Ausführungen muß bestehen

$$\overline{PP_1} = \overline{P_1R}, \quad \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2R} \quad \text{und} \quad \overline{PS} = \overline{SQ_1}. \tag{14}$$

Aus den Gleichungen (14) folgt sofort, daß durch P und Q_1 ein Kreis K_1 hindurchgeht, der in den Punkten P und Q_1 die Kurve $\dot{C}$ berührt, in gleicher Weise geht durch Q_1 und R ein Kreis K_2, welcher in diesen Punkten $\dot{C}$ berührt. Berücksichtigen wir nun, daß die Potenzlinie der Kreise K_1 und K_2 ihre gemeinsame Tangente SQ_2 ist, daß aber anderseits der Punkt P_1 in bezug beider Kreise gleiche Potenz nach (14) besitzt, so erkennt man, daß K_1 und K_2 zusammenfallen müssen, da aber SQ_2 eine beliebige Tangente an $\dot{C}$ war und $K_1 \equiv K_2$ bereits durch die Punkte P und R, sowie die dazugehörigen Tangenten eindeutig bestimmt ist, so ergibt sich unmittelbar, daß $\dot{C} \equiv K_1 \equiv K_2$ sein muß.

Es gilt also: *Jede glatte, ebene Kurve, bei der durch die Punkte zweier ihrer Tangenten noch eine weitere Tangente von gleicher Länge hindurchgeht, muß ein Kreis sein.*

Wir wollen noch rasch den Fall (6a), also den Fall von Parallelverschiebungen betrachten, unter der Voraussetzung, daß für jeden Wert des Parameters λ alle Paare von Abstandskurven eine einzige zusammenhängende Abstandskurve ergeben. Entsprechend den in diesem Abschnitt erzielten Ergebnissen zieht die obige Forderung nach sich, daß die zugehörige Funktion $\alpha(s)$ Perioden σ besitzt, welche ein ganzes Intervall erfüllen, *daher muß sie eine Konstante sein und unsere Kurve C wird eine Gerade parallel zum Vektor* $\mathfrak{r}$.

Zusammenfassend können wir also sagen: *Liegt in dem eben entwickelten Sinne eine Schar von zusammengehörigen Paaren von Abstandskurven vor, derart, daß jedes solche Paar eine einzige zusammenhängende Kurve bildet, so gilt, falls die zugehörige Streckenbewegung eine Translation ist, also die Differentialgleichung* (6a) *erfüllt wird, daß die ganze Schar von Abstandskurven in eine einzige Gerade ausartet, in jedem anderen Falle der Streckenbewegung, wenn also die Differentialgleichung* (6b) *oder* (9) *zu Recht besteht, sind sämtliche Abstandskurven geschlossen. Jede solche Abstandskurve bildet eine geschlossene Kurve C im Sinne des vorhergehenden Abschnitts, zu welcher Strecken von der Länge* 2λ *gehören. Gehen nun durch jeden Punkt einer solchen Kurve C der obigen Schar im allgemeinen zwei Lagen von zugehörigen Strecken, so ist unsere Schar von Abstandskurven eine Schar konzentrischer Kreise, im anderen Falle ergibt sich eine Schar von* Zindlerschen *Kurven.*

§ 3.

Denken wir uns eine Strecke von der konstanten Länge $2L$ *im Raume so bewegt, daß ihre Endpunkte jeweils gleiche Geschwindigkeit, die von ihnen beschriebenen Bahnkurven also gleiche Bogenlänge besitzen, so wollen wir die*

Bahnkurve der Streckenmittelpunkte ins Auge fassen, da schon bei der ebenen Bewegung einer Strecke diese Kurve eine besondere Rolle spielte.

Wir legen die Bewegung der Strecke analytisch dadurch fest, daß wir unter Verwendung vektorieller Schreibweise gleich ihre Mittelpunktskurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit der Bogenlänge s, sowie den auf den gleichen Parameter bezogenen Einheitsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$ in der bewegten Strecke annehmen. Dann ist die Bewegung der Endpunkte $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ gegeben durch[8]):

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s) = \mathfrak{x}(s) + L\mathfrak{r}(s),$$
$$\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{y}}(s) = \mathfrak{x}(s) - L\mathfrak{r}(s).$$

Die Übereinstimmung der Geschwindigkeiten, d. h. der Bogenelemente, führt zu:

$$\dot{\mathfrak{y}}^2 = (\mathfrak{x}' + L\mathfrak{r}')^2 = 1 + 2L\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' + L^2\mathfrak{r}'^2 = \dot{\bar{\mathfrak{y}}}^2 = (\mathfrak{x}' - L\mathfrak{r}')^2$$
$$= 1 - 2L\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' + L^2\mathfrak{r}'^2$$

oder

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' = 0. \tag{15}$$

Dies ist jedoch die analytische Bedingung dafür, daß die Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ die Striktionslinie der von der bewegten Strecke beschriebenen Regelfläche ist[9]).

Für gewöhnlich wird die Striktionslinie einer Regelfläche im Sinne von Gaspard Monge folgendermaßen definiert:

Werden zwei Erzeugende E und E_1 einer Regelfläche Φ betrachtet, so strebt der auf E liegende Fußpunkt des Gemeinlotes von E und E_1 beim stetigen Übergang von E_1 nach E einer Grenzlage zu, die als Zentralpunkt der Erzeugenden E bezeichnet wird. Die Zentralpunkte aller Erzeugenden von Φ erfüllen eine Kurve, die Striktionslinie der Regelfläche Φ.

Nun zeigt die Betrachtung des folgenden Grenzüberganges, daß wir dieser Definition eine etwas *allgemeinere Fassung* geben können:

Wir betrachten zwei Erzeugende E und E_1 einer dreimal stetig differentiierbaren Regelfläche Φ — im folgenden wollen wir, ohne dies jedesmal besonders hervorzuheben, unter Regelfläche immer eine windschiefe Regelfläche verstehen — *und suchen die auf E liegenden Fußpunkte jener beiden Geraden V_1 und V_2, die die Erzeugenden E und E_1 unter konstantem Winkel α schneiden. Beim stetigen Übergang von E_1 in E streben diese im allgemeinen getrennten Fußpunkte einer gemeinsamen Grenzlage zu, die unabhängig vom Winkel α ist und daher mit dem Zentralpunkt der Erzeugenden E zusammenfällt*, für dessen Definition ja speziell $\alpha = \frac{\Pi}{2}$ war.

---

[8]) Es gelten also die Beziehungen $\mathfrak{r}'^2 = 1$, $\mathfrak{r}'\mathfrak{r}'' = 0$ usw., $\mathfrak{r}^2 = 1$, $\mathfrak{r}\mathfrak{r}' = 0$, $\mathfrak{r}'^2 + \mathfrak{r}\mathfrak{r}'' = 0$ usw.

[9]) Vgl. etwa J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, S. 358.

Um dies einzusehen, geben wir die Regelfläche Φ durch eine Leitkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ und den auf deren Bogenlänge s bezogenen Einheitsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$ in Richtung der Erzeugenden vor[8]):

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s,t) = \mathfrak{x}(s) + t\mathfrak{r}(s). \tag{16}$$

Der Parameter t mißt auf der Erzeugenden die Entfernung des Punktes $\mathfrak{y}$ von der Leitlinie $\mathfrak{x}$. Wir suchen nun die auf E liegenden Fußpunkte der Geraden V_1 und V_2, die E und E_1 unter dem Winkel α schneiden: E und E_1 sind durch ihre Parameterdarstellungen $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + t\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}_1 + t\mathfrak{r}_1$ gegeben, wobei t als Parameter fungiert und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ feste Vektoren mit $|\mathfrak{r}| = |\mathfrak{r}_1| = 1$ sind. $\mathfrak{v}$ sei ein Einheitsvektor in Richtung einer E und E_1 unter dem Winkel α schneidenden Geraden V; wir spannen ihn auf $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_1$ auf:

$$\mathfrak{v} = A\mathfrak{r} + B\mathfrak{r}_1 + C(\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_1).$$

Die Bedingungen $\mathfrak{v}\mathfrak{r} = \mathfrak{v}\mathfrak{r}_1 = \cos\alpha$, $\mathfrak{v}^2 = 1$ liefern für die Koeffizienten A, B und C einfache Gleichungen, deren Auflösung ergibt:

$$A = B = \frac{\cos\alpha}{1 + \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}, \qquad C = \frac{1}{1 + \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}\sqrt{\frac{1 - 2\cos^2\alpha + \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}{1 - \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}}.$$

Hierbei erhalten wir entsprechend der Zweiwertigkeit der Quadratwurzel im allgemeinen zwei verschiedene Richtungen $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_2$ und daher auch zwei verschiedene Treffgerade V_1 und V_2 der gewünschten Eigenschaft.

Parallel zu $\mathfrak{v}$ legen wir nun durch E_1 eine Ebene; bedeutet $\mathfrak{z}$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes in ihr, so kann ihre Gleichung in Form einer Determinante geschrieben werden:

$$(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_1, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{v}) = 0.$$

Die Erzeugende E durchstößt diese Ebene in einem Punkt mit dem Parameterwert t, der sich aus

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_1, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{v}) = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 + t\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{v}) = 0$$

wie folgt ergibt:

$$t = \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{v})}{(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{v})} = \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_1, A\mathfrak{r} + C(\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_1))}{C(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_1))}$$

$$= \frac{A}{C} \cdot \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r})}{1 - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2} + \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_1)}{1 - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2},$$

$$t = \cos\alpha \cdot \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r})}{1 - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}{1 - 2\cos^2\alpha + \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}} + \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x})[\mathfrak{r} - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\mathfrak{r}_1]}{1 - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2}.$$

Die vorausgesetzte, dreimal stetige Differentiierbarkeit gestattet den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x}(s + h) = \mathfrak{x}(s) + \mathfrak{x}'(s)h + \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}''(s)h^2 + \cdots, \\ \mathfrak{r}_1 &= \mathfrak{r}(s + h) = \mathfrak{r}(s) + \mathfrak{r}'(s)h + \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}''(s)h^2 + \cdots, \end{aligned}\right\}^{10})$$

[10]) Der Kürze wegen wurde das in h bekanntlich kubische Restglied weggelassen.

daher also:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1 = 1 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}\mathfrak{r}''h^2 + \cdots,\quad (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2 = 1 + \mathfrak{r}\mathfrak{r}''h^2 + \cdots.$$

Gehen wir hiermit in die Darstellung von t ein, so ergibt sich für die auftretenden Ausdrücke:

$$\frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r})}{1 - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2} = \frac{(\mathfrak{x}' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}''h + \cdots, \mathfrak{r}' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}''h + \cdots, \mathfrak{r})}{-\mathfrak{r}\mathfrak{r}'' - h(\ldots)},$$

$$\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}{1 - 2\cos^2\alpha + \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}} = h\sqrt{\frac{-\mathfrak{r}\mathfrak{r}'' - h(\ldots)}{4\sin^2\alpha + h^2(\mathfrak{r}\mathfrak{r}'' + \cdots)}},$$

$$\frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x})[\mathfrak{r} - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)\mathfrak{r}_1]}{1 - (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1)^2} = \frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' + h(\tfrac{1}{2}\mathfrak{r}''\mathfrak{r}' + \cdots)}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'' + h(\ldots)}.$$

Vollziehen wir nun den Grenzübergang $E_1 \to E$, d. h. $h \to 0$, so streben der erste Summand gegen Null, der letzte jedoch gegen $\frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}''} = -\frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}'^2}$. Es ergibt sich somit in der Grenzlage $t = -\frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}'^2}$ unabhängig vom Winkel α, unter dem die beiden Geraden V_1 und V_2 unsere Erzeugenden E und E_1 geschnitten haben. Die Striktionslinie von Φ besitzt daher die Parameterdarstellung:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s) = \mathfrak{x}(s) - \frac{\mathfrak{x}'(s)\,\mathfrak{r}'(s)}{\mathfrak{r}'^2(s)}\,\mathfrak{r}(s). \tag{17}$$

Die Leitkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ der durch (16) dargestellten Regelfläche Φ wird dann und nur dann Striktionslinie sein, wenn

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' = 0. \tag{15}$$

Der Begriff des Zentralpunktes einer Erzeugenden E von Φ fußt daher *nicht wesentlich auf der Verwendung des Fußpunktes der gemeinsamen Normalen* zweier benachbarter Erzeugenden E und E_1, und es erscheint daher nicht unangebracht, auf *andere geometrische Definitionen* der Striktionslinie einer Regelfläche zurückzugreifen.

§ 4.

Zwei Kurven auf einer Regelfläche Φ mögen als Abstandskurven bezeichnet werden, wenn sie auf den einzelnen Erzeugenden Strecken konstanter Länge abschneiden. Von einem solchen Kurvenpaar können wir kurz sagen, die eine Kurve sei Abstandskurve der anderen. Wir finden zwei solche Kurven, wenn wir in (16) dem Parameter t zwei verschiedene Werte $t = t_1$ und $t = t_2$ erteilen. *Die Untersuchung der Abstandskurven der Striktionslinie einer Regelfläche* wird zu interessanten Eigenschaften der Regelflächen führen.

Wir sind in Abschnitt § 3 von denjenigen Bewegungen einer Strecke fester Länge ausgegangen, bei denen die Streckenendpunkte Kurven gleicher

Bogenlänge beschreiben, und haben gesehen, daß die Streckenmitten dann die Striktionslinie der durch diesen Bewegungsvorgang erzeugten Regelfläche erfüllen. Da auch umgekehrt zwei Kurven auf Φ, die von der Striktionslinie gleiche Abstände besitzen, von gleicher Bogenlänge sind, so können wir folgende Erklärung der Striktionslinie geben:

Die Striktionslinie einer Regelfläche ist der Ort der Halbierungspunkte der von zwei Abstandskurven gleicher Bogenlänge auf den Erzeugenden ausgeschnittenen Strecken.

Wir fassen nun ein Paar solcher Abstandskurven gleicher Bogenlänge ins Auge: Denken wir uns jede der beiden Kurven durch einen auf der Fläche gespannten Faden, der ideal biegsam, jedoch nicht dehnbar sei, ersetzt und realisieren beliebig viele Lagen der bewegten Strecke, also von Erzeugenden der Regelfläche durch starre Stäbchen, die in ihren Endpunkten mit den Fäden fest verknüpft werden, so können wir dieses Gebilde, das sich nun von der Fläche abheben läßt, aus naheliegenden Gründen als eine *Strickleiter* bezeichnen. *Ein Modell einer solchen Strickleiter besteht aus zwei ideal biegsamen Fäden, den Seitenholmen, zwischen denen Stäbchen fester Länge, die Sprossen, so eingeknüpft werden, daß zwischen den Endpunkten irgend zweier Sprossen gleiche Fadenlängen auftreten.* Wir wissen von der auf unserer Regelfläche Φ liegenden Strickleiter, *daß ihre Sprossenmitten Punkte der Striktionslinie darstellen.*

Auch die *Umkehrung* gilt: *Legen wir eine Strickleiter an irgendeine Regelfläche so an, daß die Fäden gespannt werden und die Sprossen auf Erzeugende zu liegen kommen, so bilden die Mittelpunkte der einzelnen Sprossen Punkte der Striktionslinie.*

Nach Darboux ist die Striktionslinie dadurch gekennzeichnet, daß die Erzeugenden der Regelfläche am Flächenstreifen der Striktionslinie (*Striktionsband*) *im Sinne von Levi-Civitá* durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, und umgekehrt hat man auf einem Streifen *im Sinne von Levi-Civitá* parallele Richtungen, so bilden diese eine Regelfläche, deren Striktionslinie die Streifenkurve ist[11]).

Aus diesem wunderschönen Darbouxschen Satze und den früheren Ergebnissen folgt unmittelbar: *Legen wir eine Strickleiter in irgendeiner zugelassenen Deformation, berührend in den Sprossenmitten, auf eine beliebige Fläche Φ, d. h. Streifen der Strickleiter längs der Sprossenmittenkurve und Streifen von Φ decken sich, so sind die Sprossen auf Φ im Sinne Levi-Civitàs parallel verschoben.*

---

[11]) Vgl. J. G. Darboux, Leçons sur la théorie gén. d. surfaces. Paris 1894, tome IV, S. 343–345 und A. Myller, C. R., Paris (1922), S. 997–999.

§ 5.

Wir wählen nun in der Darstellung (16) für unsere Regelfläche als Leitlinie $\mathfrak{x}(s)$ die Striktionslinie, es besteht also (15). Sind $\mathfrak{y}$ und $\overline{\mathfrak{y}}$ zwei Abstandskurven der Striktionslinie, die gleiche Bogenlänge besitzen, so ist:

$$\mathfrak{y}(s) = \mathfrak{x}(s) + t\mathfrak{r} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{y}}(s) = \mathfrak{x}(s) - t\mathfrak{r}.$$

Diese beiden Kurven, die wir als *ein Paar entsprechender Abstandskurven der Striktionslinie bezeichnen*, sind durch s punktweise aufeinander bezogen. Läßt man nun auch den Parameter t variabel, so erhalten wir *die involutorische Abbildung*:

$$P \longleftrightarrow \overline{P}, \quad (s, t) \longleftrightarrow (s, -t)$$

der Regelfläche auf sich. Für die zugehörigen Bogenelemente $d\sigma$ bzw. $d\overline{\sigma}$ gilt

$$\begin{aligned} d\sigma &= (1 + t^2\mathfrak{r}'^2)\, ds^2 + 2\,\mathfrak{x}'\mathfrak{r}\, ds\, dt + dt^2, \\ d\overline{\sigma} &= (1 + t^2\mathfrak{r}'^2)\, ds^2 - 2\,\mathfrak{x}'\mathfrak{r}'\, ds\, dt + dt^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Abbildung ist also im allgemeinen nicht isometrisch, trotzdem in entsprechenden Punkten P und $\overline{P}$ Übereinstimmung des Krümmungsmaßes stattfindet, man findet nämlich für dieses

$$K = \frac{-(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{x}')^2}{[1 + t^2\mathfrak{r}'^2 - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2]^2} = \overline{K}. \tag{19}$$

Für diese Abbildung findet man weiter, daß die Punkte der Striktionslinie einzeln in sich übergeführt werden und daß das Netz von Abstandskurven und Erzeugenden eine isometrische Abbildung erleidet. Für entsprechende Winkel dieses Netzes φ und $\overline{\varphi}$ gilt:

$$\overline{\varphi} = \pi - \varphi.$$

Dies, wie auch die Flächentreue der Abbildung sind einfache Folgerungen aus (18).

Dann und nur dann ist die betrachtete Abbildung eine Verbiegung der Fläche in sich, bei der der oberhalb der Striktionslinie befindliche Flächenteil um diese herum auf den unterhalb liegenden Teil geklappt werden kann, *wenn* $F = \mathfrak{x}'\mathfrak{r} = 0$. Dann ist aber $\mathfrak{t}\mathfrak{r} = 0$ sowie $\mathfrak{x}''\mathfrak{r} = \mathfrak{t}'\mathfrak{r} = \varkappa\mathfrak{h}\mathfrak{r} = 0$, wobei $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ den Tangentenvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor der Striktionslinie $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit der Krümmung $\varkappa$ und der Torsion τ bedeuten. Hier fallen also die Erzeugenden in die Richtungen der Binormalen der Striktionslinie ($\mathfrak{r} = \pm\mathfrak{b}$) und *die Regelfläche ist die Binormalenfläche ihrer Striktionslinie.*

In anderer Weise können wir *die Striktionslinie einer Regelfläche auch dadurch kennzeichnen, daß für sie die Bogenlänge als Funktion der auf den Erzeugenden stattfindenden Verschiebung t ein Minimum wird.* Es ist ja durch

$\mathfrak{y}^2 = 1 + 2t\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' + t^2\mathfrak{r}'^2 = f(s,t)$ eine Funktion von s und t gegeben, die für $\frac{\partial f(s,t)}{\partial t} = 2t\mathfrak{x}'\mathfrak{r}' + 2t\mathfrak{r}'^2 = 0$ ein Minimum besitzt: $\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial t^2} = 2\mathfrak{r}'^2 > 0$.

Aus (19) erkennen wir auch, daß der *Zentralpunkt einer Erzeugenden dadurch charakterisiert ist, daß in ihm das* Gaußsche *Krümmungsmaß dem Betrage nach seinen größten Wert annimmt.*

Betrachten wir nun den Flächenstreifen auf der Regelfläche längs einer Abstandskurve der Striktionslinie im (orientierten) Abstand t, so finden wir für das *begleitende Streifendreibein* ξ, η, ζ:

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}' + t\mathfrak{r}'}{\sqrt{E}}, \qquad \zeta = \frac{(\mathfrak{x}' + t\mathfrak{r}') \times \mathfrak{r}}{|(\mathfrak{x}' + t\mathfrak{r}') \times \mathfrak{r}|} = \frac{(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{r}) + t(\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r})}{W},$$

$$\eta = \zeta \times \xi = \frac{\sqrt{E}}{W}\mathfrak{r} - \frac{(\mathfrak{r}'\mathfrak{r})(\mathfrak{x}' + t\mathfrak{r}')}{W\sqrt{E}} = \frac{E\mathfrak{r} - (\mathfrak{r}'\mathfrak{r})(\mathfrak{x}' + t\mathfrak{r}')}{W\sqrt{E}}.$$

Im besonderen erhalten wir für den *Striktionsstreifen* (das ist der Streifen längs der Striktionslinie):

$$(20) \qquad \xi_0 = \mathfrak{x}', \qquad \eta_0 = \frac{\mathfrak{r} - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})\mathfrak{x}'}{\sqrt{1 - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}}, \qquad \zeta_0 = \frac{\mathfrak{x}' \times \mathfrak{r}}{\sqrt{1 - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}}.$$

Hieraus entnehmen wir sofort, daß *die Vektoren des Streifendreibeins längs eines Paares entsprechender Abstandskurven der Striktionslinie bzw. mit den Vektoren* ξ_0, η_0, ζ_0 *des Streifendreibeins längs der Striktionslinie Winkel von gleichem Cosinus einschließen.*

$$\xi\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{E}}, \qquad \eta\eta_0 = \frac{\sqrt{E}}{W}\sqrt{1 - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}, \qquad \zeta\zeta_0 = \frac{1}{W}\sqrt{1 - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}.$$

Die letztere Winkelgleichheit folgt auch unmittelbar aus dem Satz von der Berührungskorrelation längs einer Erzeugenden, da ja die asymptotische Ebene auf der Zentralebene (Tangentialebene im Zentralpunkt) normal steht.

Längs einer Erzeugenden der Regelfläche bilden die *Tangenten an die Abstandskurven der Striktionslinie*, wie auch *irgendeiner auf der Fläche gezogenen Ausgangskurve eine Erzeugendenschar eines hyperbolischen Paraboloides*, das durch zwei kongruente, von den Abstandskurven ausgeschnittene Punktreihen auf zwei benachbarten Erzeugenden der Regelfläche erzeugt gedacht werden kann. Dieses hyperbolische Paraboloid schneidet das *Normalenparaboloid* (gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid), *das von den Flächennormalen gebildet wird*, längs der Erzeugenden *normal*.

Wir wollen nun für das unter (20) angegebene begleitende Dreibein des Striktionsstreifens die *Ableitungsgleichungen* ermitteln[12]).

[12]) Vgl. etwa W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 3. Auflage, S. 67 ff.

Es berechnet sich für die geodätische Torsion $= a$, für die Normalkrümmung $= b$ und für die geodätische Krümmung $= c$:

$$a = \frac{(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})(\mathfrak{r},\mathfrak{x}',\mathfrak{x}'') + (\mathfrak{r},\mathfrak{r}',\mathfrak{x}')}{1-(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}, \tag{21}$$

$$b = \frac{(\mathfrak{r},\mathfrak{x}',\mathfrak{x}'')}{\sqrt{1-(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}}, \tag{22}$$

$$c = \frac{\mathfrak{x}''\mathfrak{r}}{\sqrt{1-(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2}}. \tag{23}$$

Führen wir in (21), (22) den Winkel φ ein, der gebildet von $\mathfrak{r}$ und der Tangente an die Striktionslinie, so ergibt sich:

$$a = \frac{(\mathfrak{r},\mathfrak{r}',\mathfrak{r}'')}{\mathfrak{r}'^2}\cos\varphi + \sqrt{\mathfrak{r}'^2}\sin\varphi, \tag{24}$$

$$b = \frac{(\mathfrak{r},\mathfrak{r}',\mathfrak{r}'')}{\mathfrak{r}'^2}\sin\varphi - \sqrt{\mathfrak{r}'^2}\cos\varphi, \tag{25}$$

$$c = -\varphi' \tag{26}$$

und daraus weiter:

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = \frac{(\mathfrak{r},\mathfrak{r}',\mathfrak{r}'')}{\mathfrak{r}'^2}, \tag{27}$$

$$b\sin\varphi - b\cos\varphi = \sqrt{\mathfrak{r}'^2}. \tag{28}$$

§ 6.

Auf einer Regelfläche Φ fassen wir eine beliebige Anzahl von Erzeugenden ins Auge und denken sie uns durch *dünne, starre Stäbchen* materialisiert; dann betrachten wir die Schar der Abstandskurven der Striktionslinie und deuten sie durch *dünne, ideal biegsame, jedoch nicht dehnbare Fäden an*, die auf der Fläche gespannt anliegen und mit den obigen Erzeugenden in den gemeinsamen Punkten fest verbunden sind. Ein solches auf diese anschauliche Weise realisiertes Gebilde, das sich von der Fläche abheben läßt und als eine Vervollständigung einer an die Fläche angelegten Strickleiter aufgefaßt werden kann, wollen wir als ein *Stabnetz* bezeichnen. Es wird in Anbetracht der idealen Biegsamkeit der Fäden eine große Beweglichkeit aufweisen, jedoch im Vergleich zu einer Strickleiter, die an jede Regelfläche anlegbar ist und bei der ja nur ein Paar entsprechender Abstandskurven der Striktionslinie von Φ durch Fäden ersetzt wurde, in seiner Beweglichkeit weitgehend gehemmt sein.

Eine beliebige, jedoch starre Lage (*Deformation*) des von der Fläche Φ abgehobenen Stabnetzes stellt uns eine Regelfläche $\bar{\Phi}$ dar; zwei solche Flächen Φ und $\bar{\Phi}$, an die also ein und dasselbe Stabnetz so anlegbar ist, daß die Fäden gespannt aufliegen und die Stäbchen mit Erzeugenden zur Deckung kommen,

bezeichnen wir als *ineinander verwindbar*. Wir sagen dann kurz: *Besitzen Φ und $\bar{\Phi}$ das gleiche Stabnetz, so geht die eine Fläche aus der anderen durch Verwindung hervor.*

Da in dem von der Fläche Φ abgehobenen Stabnetz auch jene Fäden aufscheinen, die Paaren von entsprechenden Abstandskurven der Striktionslinie von Φ entsprechen, so werden nach Abschnitt § 4 diese Fadenpaare wiederum auf Paare von entsprechenden Abstandskurven der Striktionslinie von $\bar{\Phi}$ zu liegen kommen und insbesondere der der Striktionslinie von Φ entsprechende Faden (Striktionsfaden) mit der Striktionslinie von $\bar{\Phi}$ zur Deckung gelangen.

Wir wollen nun untersuchen, durch welche Größen ein Stabnetz charakterisiert ist und durch wie viele Fäden es in seinem weiteren Verlauf bestimmt wird.

Das charakteristische Kennzeichen des auf der Fläche Φ mit der Parameterdarstellung (16) und der Striktionslinie $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ liegenden Stabnetzes besteht offenbar darin, daß jeder im Abstand t von der Striktionslinie verlaufende Faden bei Deformation des Netzes seine Länge beibehält. Die starre Deformationslage $\bar{\Phi}$, die also aus Φ durch Verwindung hervorgeht, sei durch

$$\overline{(16)} \qquad \bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{y}}(s,t) = \bar{\mathfrak{x}}(s) + t\,\mathfrak{r}(s)$$

gegeben, wobei die Kurve $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s)$ die Striktionslinie von $\bar{\Phi}$ sei, also $\bar{\mathfrak{x}}'\,\mathfrak{r}' = 0$ gelte. Die beiden Striktionslinien sind nun durch gleiche Bogenlängen s, entsprechend dem gemeinsamen Striktionsfaden, aufeinander bezogen. Die Übereinstimmung der Bogenlängen der im beliebigen Abstande t von den Striktionslinien $\mathfrak{x}$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}}$ verlaufenden Abstandskurven auf Φ und $\bar{\Phi}$ zieht die Gleichheit der Bogenelemente dieser Kurven nach sich und es gilt daher für alle Werte t:

$$(29) \qquad \dot{\mathfrak{y}}^2 = \mathfrak{y}_s^2 = 1 + t^2\mathfrak{r}'^2 = 1 + t^2\bar{\mathfrak{r}}'^2 = \bar{\mathfrak{y}}_s^2 = \dot{\bar{\mathfrak{y}}}^2$$

oder

$$(30) \qquad \mathfrak{r}'^2 = \bar{\mathfrak{r}}'^2.$$

Das Stabnetz der Fläche Φ wird durch diese Funktion $w = w(s) = \mathfrak{r}'^2(s)$ der Länge s des Striktionsfadens charakterisiert, da wir ja auch umgekehrt bei Bestehen von (30) auf die Verwindbarkeit von Φ und $\bar{\Phi}$ schließen können. Wir wollen $w = w(s)$ als die *Windungsinvariante* der Regelfläche Φ bezeichnen.

Da das Stabnetz durch die Windungsinvariante $w = w(s)$ gekennzeichnet ist, genügt es also, *den der Striktionslinie von Φ entsprechenden Faden (Striktionsfaden) und nur noch einen weiteren Faden in beliebigem Abstande $t = t_1$ vom ersteren in das Stäbchensystem einzuziehen; alle übrigen, den Abstandskurven der Striktionslinie von Φ entsprechenden Fäden sind dann in ihrer Länge bestimmt.* Die hierfür charakteristische Funktion

$$f(s,t) = \dot{\mathfrak{y}}^2 = 1 + t^2\mathfrak{r}'^2$$

ist ja durch Angabe der Größe $t_1 \neq 0$ und der Funktion $f(s, t_1)$ eindeutig bestimmt.

Wird umgekehrt in einem System von Stäbchen ein Faden als Striktionsfaden beliebig vorgegeben und in festem Abstande t_1 zu ihm ein weiterer (wegen(29) *natürlich längerer) Faden willkürlich eingeknüpft, so ist immer hierdurch ein Stabnetz bestimmt und alle weiteren Abstandsfäden zum Striktionsfaden sind in ihrer Länge eindeutig festgelegt.* Denn es wird ja durch die willkürliche Vorgabe der Funktion $f(s, t_1) = 1 + t_1^2$, $\mathfrak{r}'^2$ und des Wertes t_1 die für das Stabnetz charakteristische Größe $w = \mathfrak{r}'^2$ als Funktion der Länge s des Striktionsfadens eindeutig zu ermitteln sein.

Gehen wir nun von einer Abstandskurve der Striktionslinie $\mathfrak{y}(s)$, $\mathfrak{y}'^2 = 1$ aus, so erhält man alle weiteren für $t =$ konst. in

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y}(s) + t\,\mathfrak{r}(s), \quad \mathfrak{r}^2 = 1,$$

daher findet man für die Bogenlängen dieser Kurven

$$\mathfrak{z}_s'^2 = g(s, t) = 1 + 2\,t a(s) + t^2 b(s). \tag{31}$$

Unter diesen Kurven, also für einen Wert $t =$ konst., kommt auch die Striktionslinie vor, dieser Wert für t bestimmt sich aus $\frac{\partial g(s,t)}{\partial t} = 0$, somit wegen (31) $t = -\frac{a(s)}{b(s)} = c =$ konst. und (31) geht über in

$$g(s, t) = 1 + t\,b(s)\,[-2c + t].$$

Geben wir nun (31) für einen weiteren Wert $t = t_1 \neq 0$ vor mit $g(s, t_1) = g_1(s)$, so finden wir für das Bogenelement der Abstandskurven

$$\mathfrak{z}_s'^2 = g(s,t) = 1 + \mathfrak{r}'^2(s)\,t[-2c + t], \quad \mathfrak{r}'^2(s) = \frac{g_1(s) - 1}{t_1(t_1 - 2c)}, \tag{31a}$$

es ist also bis auf eine willkürliche Konstante c bestimmt, dieser Wert entspricht für t gerade der Striktionslinie.

Dies auf unsere Stabnetze übertragen ergibt: *Zur Erzeugung eines Stabnetzes können die Längenverhältnisse auf zwei beliebigen Abstandskurven der Striktionslinie K_1 und K_2 beliebig vorgegeben werden, sind K_1 und K_2 nicht von gleicher Länge, bilden also kein zugeordnetes Paar, so kann man den Wert $t = c$, der der Striktionslinie entspricht, beliebig vorgeben, dann ist das Stabnetz eindeutig bestimmt, dies trifft auch zu, wenn der Wert von t für eine solche Kurve vorgegeben wird, die mit K_1 oder K_2 ein zugeordnetes Paar bildet. Wenn jedoch K_1 und K_2 ein zugeordnetes Paar bilden, also ein gleiches Bogenelement besitzen, kann man zur eindeutigen Bestimmung des Stabnetzes noch beliebig das Bogenelement einer Abstandskurve wählen; man hat dabei nur zu beachten, daß solche Kurven, die zwischen K_1 und K_2 liegend gewählt werden, kleinere, im anderen Falle eine größere Länge als K_1 besitzen müssen.*

Ist unsere Regelfläche Φ wieder durch eine Darstellung (16) gegeben, so bezeichnet man $\mathfrak{r}(s)$, als Kegelfläche aufgefaßt als den *Richtkegel von* Φ, als Kurve, also auf der Einheitskugel gelegen, wollen wir von *der sphärischen Indikatrix der Erzeugenden* von Φ sprechen.

Die früher erzielten Ergebnisse lassen sich nun auch folgendermaßen formulieren: *Zwei Regelflächen Φ und $\bar{\Phi}$ gehen dann und nur dann durch Verwindung auseinander hervor, wenn ihre Richtkegel so aufeinander abgewickelt werden können, daß die dabei zur Deckung kommenden Erzeugenden auch auf Φ und $\bar{\Phi}$ zugeordneten Erzeugenden entsprechen, oder die sphärischen Indikatrizen werden durch einander zugeordnete Erzeugende auf Φ und $\bar{\Phi}$ längentreu aufeinander abgebildet.*

In § 5 hatten wir früher eine Abbildung der Regelfläche in sich betrachtet, von der gezeigt wurde, daß das Netz der Erzeugenden und Abstandskurven der Striktionslinie in sich übergeführt wird, wir erkennen nun sofort, daß dies eine Verwindung der Fläche in sich selbst ist. *Das Stabnetz jeder windschiefen Regelfläche kann also um die Striktionslinie umgeklappt werden und legt sich wiederum an die Fläche an. Es genügt also bei Stabnetzen, nur die eine der beiden Hälften, welche durch die Striktionslinie gebildet wird, zu betrachten.*

Von zwei Regelflächen Φ und $\bar{\Phi}$, die gleiches $w(s) = \mathfrak{r}'^2(s)$ besitzen, wollen wir sagen, daß sie der gleichen *Windungsklasse* angehören. *Es liegen also zwei Regelflächen Φ und $\bar{\Phi}$ dann und nur dann in der gleichen Windungsklasse, wenn sie durch Verwindung auseinander hervorgehen.*

Wir betrachten nun das Stabnetz einer Regelfläche Φ, die durch (16) und (15) gegeben ist. Die Bogenelemente $d\sigma^2$ aller Regelflächen, die der Verwindungsklasse dieses Stabnetzes angehören, sind bis auf den beliebig zu wählenden Koeffizienten von $ds\,dt$ eindeutig bestimmt. Gibt man also diese noch freie Größe $2F = 2\,\mathfrak{x}'\mathfrak{r}$ vor, so gehen alle diese Flächen durch Verbiegungen auseinander hervor. Es gilt also: *Alle Flächen einer gleichen Verwindungsklasse, bei welchen die entsprechenden Erzeugenden gleiche Schnittwinkel mit der Striktionslinie bilden, gehen durch Verbiegung auseinander hervor.*

Soweit also die zulässigen Deformationen eines Stabnetzes nicht Biegungen sind, sind sie gerade durch die Änderung des Winkels $\varphi(s)$ zwischen Erzeugenden und Striktionslinie bedingt. Damit ist aber jeweils eine Änderung des Oberflächenelementes

$$d\sigma^2 = [1 + t^2\,\mathfrak{r}'^2 - (\mathfrak{x}'\mathfrak{r})^2]\,ds^2\,dt^2$$

verbunden. *Den Werten $F^2 = \cos^2\varphi$ gleich Null bzw. Eins werden somit Extremwerte von $d\sigma$ entsprechen und zwar ein Maximum bzw. ein Minimum.*

Gehen wir nun von einer flächentreuen Deformation des Stabnetzes aus, daraus folgt sofort $F^2 = \bar{F}^2$, also

$$\varphi_1 = \varphi,\quad \varphi_2 = \pi - \varphi.$$

Dem Übergang vom Werte φ zum Werte $\pi - \varphi$ entspricht aber die in § 5 behandelte Abbildung der Fläche in sich, die wir weiter oben als Verwindung der Fläche in sich erkannt haben.

Beachtet man noch, daß ein stetiger Übergang von φ_1 zu φ_2 nur möglich ist beim Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so können wir zusammenfassend sagen: *Zwei Regelflächen, die durch stetige und flächentreue Verwindung auseinander hervorgehen, können immer isometrisch aufeinander bezogen werden, diese isometrische Abbildung kann höchstens unstetig werden längs Erzeugenden, die die Striktionslinie senkrecht schneiden. Die eben erwähnte Abbildung ist entweder die durch die Deformation des zugehörigen Stabnetzes vermittelte oder diese plus der in § 5 besprochenen Verwindung der Fläche in sich.*

Ferner läßt sich sagen: *Greifen wir aus einem Stabnetz ein Stück heraus, welches begrenzt wird von zwei Abstandskurven und zwei Erzeugenden, so wird bei allen möglichen Deformationen die Oberfläche dieses Stabnetzes ein Maximum sein, wenn* $F^2 = 0$, *in diesem Falle entstehen Regelflächen, die Binormalenflächen ihrer Striktionslinie sind. Alle diese Flächen sind die Flächen maximaler Oberfläche einer Verwindungsklasse, sie gehen alle durch Verbiegungen ineinander über, ihre Striktionslinien besitzen die Torsion* $\tau = \sqrt{\mathfrak{r}'^2(s)}$ (s = Bogen der Striktionslinie). *Wird* $F^2 = 1$, *so erhält man alle Flächen der Flächenklasse, deren Oberfläche ein Minimum ist. Alle diese Regelflächen sind Torsen, deren Gratlinien den Striktionslinien entsprechen. Diese Gratlinien besitzen alle die Krümmung* $\varkappa = \sqrt{\mathfrak{r}'^2(s)}$ (s = Bogen der Gratlinie).

Zum Beweise obiger Behauptungen haben wir nur noch für den Fall $F^2 = 0$ die Formeln (24) bis (26) zu berücksichtigen. Man findet für diesen besonderen Fall sofort:

$$a = \tau = \sqrt{\mathfrak{r}'^2}, \qquad b = \varkappa = \frac{(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}'')}{\mathfrak{r}'^2}, \qquad c = 0.$$

Wird jedoch $F^2 = 1$, so ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'(s)$ zu setzen und man erhält:

$$a = \tau = \frac{(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}'')}{\mathfrak{r}'^2}, \qquad b = 0, \qquad c = \varkappa = \sqrt{\mathfrak{r}'^2}.$$

Torsen und Binormalenflächen begrenzen also die möglichen Deformationen eines Stabnetzes. Die Flächen, die diese extremen Fälle repräsentieren, sind, wie oben auseinandergesetzt wurde, durch eine Reihe geometrischer Eigenschaften gekennzeichnet, aber auch analytisch trifft dies zu, da gerade eine der beiden natürlichen Gleichungen der Striktionslinie ungeändert bleibt. Alle anderen Fälle liegen gerade zwischen diesen. Analytisch ist alles durch die Formeln (21) bis (23) bestimmt oder durch die Formeln (24) bis (26). Man erkennt besonders leicht aus den letzteren: *Durch* $\mathfrak{r}'^2$ *ist das Stabnetz bestimmt,*

kommt noch $\varphi(s)$ hinzu, dann ist die Fläche bis auf Biegungen bestimmt, und wird endlich noch der Ausdruck $\frac{(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}', \mathfrak{r}'')}{\mathfrak{r}'^2}$ hinzugefügt, so ist unsere Fläche bis auf Bewegungen bestimmt.

Diese allgemeinen Deformationen eines Stabnetzes können wir aber auch leicht geometrisch erzeugen. Zu diesem Zwecke wickeln wir den Streifen längs der Striktionslinie in die Ebene ab. Die so entstandene Kurve besitzt nach (26) die Krümmung $\varkappa = -\varphi' = c$. Die Richtung der Erzeugenden läßt sich nun beliebig zu einer festen Richtung parallel in der Abwicklungsebene wählen, durch die Wahl dieser Richtung ist nun die Funktion $\varphi(s)$ ebenfalls eindeutig bestimmt. Geben wir jetzt noch die zu den Streifentangenten konjugierten Richtungen vor durch den Winkel $\psi(s)$, den sie mit der Streifenkurve einschließen. Für diesen findet man die Relationen[13]):

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\psi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\psi.$$

Unter Berücksichtigung von (28) erhält man

$$\sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(\varphi - \psi) = \sqrt{\mathfrak{r}'^2}.$$

Man erkennt daraus, daß sich die Funktion $\psi(s)$ ganz beliebig, wenn nur verschieden von $\varphi(s)$, wählen läßt. Dann gilt aber

$$a = \sqrt{\mathfrak{r}'^2}\,\frac{\cos\psi}{\sin(\varphi - \psi)}, \qquad b = \sqrt{\mathfrak{r}'^2}\,\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}, \qquad c = -\varphi'$$

und unsere Fläche ist eindeutig bestimmt. *Zusammenfassend läßt sich sagen: Sind $\mathfrak{r}'^2$ und $\varphi(s)$ der Regelfläche gegeben, so ist diese bestimmt, wenn man noch die Funktion $\psi(s) \neq \varphi(s)$ beliebig vorgibt.*

Wir denken uns in ein auf der Fläche Φ liegendes Stabnetz weitere, auf Φ sich spannende Fäden so eingeknüpft, daß sie mit einer Schar von Abstandskurven einer beliebigen Ausgangskurve von Φ, die also keine Abstandskurve der Striktionslinie ist, zur Deckung kommen. Wir könnten diese in das System von Stäbchen neu eingeknüpften Fäden auch für sich, d. h. ohne die Fäden des Stabnetzes, betrachten und als ein *verallgemeinertes Stabnetz* ansprechen. Dies werde gegeben durch:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(s) + (\tau(s) + t)\,\mathfrak{r}(s),$$

wo $\mathfrak{x} \doteq \mathfrak{x}(s)$ die Striktionslinie der Fläche Φ mit der Darstellung (16), $\tau = \tau(s)$ eine für dieses verallgemeinerte Netz charakteristische Funktion und t den

[13]) Vgl. Fußnote 12.

Netzparameter bedeuten. Das entsprechende Netz auf der starren Deformationslage $\bar{\Phi}$ von Φ ist dann gegeben durch:

$$\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{x}}(s) + (\tau(s) + t)\,\bar{\mathfrak{r}}(s).$$

Die Übereinstimmung der Längen entsprechender Netzkurven führt zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathfrak{y}}^2 &= 1 + (\tau + t)^2\,\mathfrak{r}'^2 + 2\,\tau'(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{r}) + \tau'^2 \\ &= 1 + (\tau + t)^2\,\bar{\mathfrak{r}}'^2 + 2\,\tau'(\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{r}}) + \tau'^2 = \dot{\bar{\mathfrak{y}}}^2,\end{aligned}$$

was die Bedingung $\mathfrak{x}'\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{r}}$ wegen des Erfülltseins von (30) zur Folge hat. *Die Beweglichkeit des Stabnetzes wird also auf eine Verbiegung der Regelflächen eingeschränkt.*

§ 7.

Wir wollen nun einige besondere Stabnetze untersuchen.

Betrachten wir *das Stabnetz eines Drehhyperboloides*, es kann diese Regelfläche bekanntlich durch Rotation einer Geraden erzeugt werden. Dies berücksichtigend erkennt man zunächst unmittelbar, daß ihr Richtkegel ein Drehkegel wird, und weiter wird $\mathfrak{r}'^2(s) = w(s) = \text{konst.}$ Die extremen Deformationen des zugehörigen Stabnetzes ergeben als Torsen *die Tangentenflächen von Kurven konstanter Krümmung*, es sind dies die Flächen minimaler Oberfläche, die Flächen maximaler Oberflächen dieser Verwindungsklasse sind *die Binormalenflächen von Kurven konstanter Torsion*, sie müssen alle verbiegbar sein auf die Binormalenfläche einer geeigneten Schraublinie.

Ein ausgeartetes Stabnetz erhalten wir, wenn wir von der Kegelfläche ausgehen. Die Striktionslinie bzw. Gratlinie wird hier ein Punkt, es ist also $\mathfrak{x}(s) = \text{konst.}$ und $\mathfrak{x}'(s) = 0$. Für alle möglichen Deformationen dieses ausgearteten Stabnetzes ist somit $F^2 = 0$, daher *decken sich alle Deformationen des Stabnetzes mit den Verbiegungen des Kegelmantels.*

Wir betrachten nun *ein noch weiter ausgeartetes Stabnetz*, dieses erhalten wir, *wenn wir als Stäbchen die Erzeugenden eines Zylinders, und als Abstandskurven die Kurven von Normalschnitten nehmen.* Aus den früheren Entwicklungen erkennen wir, daß dieses Stabnetz wegen seiner Orthogonalität in dieser Form Regelflächen maximaler Oberfläche ergibt. Nun ist sofort ersichtlich, daß wir das Stabnetz in eine einzige Gerade deformieren können, seine Oberfläche wird dann sogar Null werden.

Jede Regelfläche (16), *deren Striktionslinie* $\mathfrak{x}(s)$ *eine Gerade ist, kann als Richtkegel nur eine Ebene oder einen Drehkegel besitzen.*

Beweis. Nach Voraussetzung muß ja $\mathfrak{x}'(s) = \text{konst.}$, also $\mathfrak{x}'' = 0$ sein, somit wird wegen (15) $(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})' = \mathfrak{x}''\mathfrak{r} + \mathfrak{x}'\mathfrak{r}' = 0$, also $\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{r} = \text{konst.}$ sein.

Ist die Striktionslinie einer Regelfläche eine Gerade, so bestehen alle zugeordneten Paare von Abstandskurven aus zwei zueinander kongruenten Kurven, welche durch eine einfache Schraubung zur Deckung gebracht werden können.

Beweis. Eine Drehung durch den Winkel π führt den Vektor $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} - t\mathfrak{r}$ über in den Vektor $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{x} + t\mathfrak{r}^*$, wobei $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} - 2(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})\mathfrak{x}'$ ist, nun ergibt die Schiebung um den Betrag $2t(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})$ in der Richtung der Schraubachse $\mathfrak{y}^{**} = \mathfrak{y}^* + 2t(\mathfrak{x}'\mathfrak{r})\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + t\mathfrak{r} = \mathfrak{y}$, w. z. b. w.

Jede Regelfläche, deren Erzeugenden die Striktionslinie unter einem konstanten Winkel $\varphi(s)$ schneiden, kann so verbogen werden, daß ihre Striktionslinie eine Gerade wird; bezeichnen wir mit $\alpha(s)$ den Drehwinkel von $\mathfrak{r}$ um die Striktionslinie, so ist $\alpha(s) = \frac{1}{\sin^2\varphi}\int_0^s \sqrt{\mathfrak{r}'^2(s)}\,ds$.

Beweis. Wir können ja immer $\mathfrak{r}(\cos\alpha\sin\varphi,\ \sin\alpha\sin\varphi,\ \cos\varphi)$ ansetzen, dann ist aber, wenn wir als geradlinige Striktionslinie die x_3-Achse wählen, wegen $\varphi = \text{konst.}$ $\mathfrak{r}'^2(s) = \alpha'^2(s)\sin^2\varphi$.

Jedes nicht ausgeartete Stabnetz kann auf unendlich viele Arten so deformiert werden, daß die Striktionslinie der zugehörigen Regelfläche eine Gerade wird.

$\mathfrak{x}(s)$, $\mathfrak{x}'^2 = 1$ soll sechsmal stetig differentiierbar und die Parameterdarstellung einer Kurve im Raume sein, die die folgende Eigenschaft besitzt, zu jedem λ, $0 < \lambda \leqq \alpha$ sollen zu allen Kurvensehnen dieser Länge Bogen gehören, die nur von λ abhängen. Dann ist unsere Kurve eine Schraublinie bzw. ein Kreis oder eine Gerade[14]).

Beweis. Durchläuft λ ein Intervall $(0, \alpha]$, so wird der Kurvenbogen s ein solches $(0, \alpha]$ durchlaufen. Es seien nun $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{x}(s+h) = \mathfrak{y}(s)$ zwei Punkte unserer Kurve K, zufolge der gemachten Voraussetzungen gilt:

$$\mathfrak{y}(s) - \mathfrak{x}(s) = h\mathfrak{x}'(s) + \frac{h^2}{2}\mathfrak{x}''(s) + \cdots + \frac{h^5}{120}\mathfrak{x}^{V}(s) + \cdots \tag{32}$$

Der Kürze halber wurde das Restglied nicht angeschrieben.

Aus (32) folgt aber sofort:

$$\lambda^2 = (\mathfrak{y} - \mathfrak{x})^2 = h^2\left[1 + h^2\left(-\frac{1}{12}\right)\mathfrak{x}''^2 + \cdots\right]. \tag{33}$$

Die rechte Seite der Gleichung (33) muß nun unabhängig von s werden, d. h. alle ihre Koeffizienten sind Konstante. So ergibt der Koeffizient von h^4, $\mathfrak{x}''^2 = \varkappa^2 = \text{konst.}$, wo $\varkappa$ die Krümmung von K ist. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''' = \mathfrak{x}'\mathfrak{x}^{IV} = 0$, damit fällt auch das Glied mit h^5 weg. Nun ergibt sich durch nochmalige Differentiation sofort $\mathfrak{x}'''^2 = -\mathfrak{x}''\mathfrak{x}^{IV} = \mathfrak{x}'\mathfrak{x}^{V}$ und daher wird in (33) der Koeffizient von h^6 gleich $\frac{17}{120}\mathfrak{x}'''^2$, $\mathfrak{x}'''^2 = \text{konst.}$ Daraus schließt man, daß auch $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''')$ eine Konstante sein muß. Also gilt auch für die Torsion unserer Kurve $\tau = \text{konst.}$, w. z. b. w.[15]).

---

[14]) Vgl. auch § 2 dieser Arbeit.

[15]) Im Falle der Ebene vgl. auch die Literaturangaben bei G.

§ 8.

Wir wollen nun an die Frage im Raume herangehen, mit der wir uns in der Ebene bereits in § 1 beschäftigt hatten. Es handelt sich um die Ermittlung jener Kurven im Raume, die ihrer ganzen Ausdehnung nach von den beiden Endpunkten einer beweglichen Strecke von der festen Länge $2L$ beschrieben werden, derart, daß zu jeder Lage dieser Strecke auf C ein Bogen von der konstanten Länge σ gehört.

Unter Berücksichtigung der bereits erzielten Ergebnisse können wir diese Aufgabe auch folgendermaßen formulieren: *Man bestimme Regelflächen, die wenigstens ein Paar von zugeordneten Abstandskurven besitzen, dessen beide Kurven in ihrer Gesamterstreckung eine einzige zusammenhängende Kurve C ergeben.*

Wir gehen zur Lösung dieser Aufgabe in gleicher Weise wie in der Ebene vor. Unter (1) wollen wir jetzt die Parameterdarstellung einer Raumkurve durch ihre Bogenlänge s verstehen. Auch die durch (4) bestimmte Kurve behält im Raume die analoge Bedeutung. Als notwendige und hinreichende Bedingung, daß die beiden Raumkurven (1) und (4) mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden, finden wir (5). Von den Lösungen der Gleichung (5) erledigt sich zunächst sofort *der triviale Fall* $\mathfrak{r}' = 0$. *Er führt auf Kurven C, die durch Parallelverschiebung um den Vektor* $2L\mathfrak{r}$ *in sich übergeführt werden. Wir erkennen genau, so wie in der Ebene, daß gerade die Kurven* $\mathfrak{x}(s + \sigma) = \mathfrak{x}(s) + 2L\mathfrak{r}$ *die einzigen Lösungen sind.*

Wir wollen also im folgenden immer annehmen, daß $\mathfrak{r}' \neq 0$. Aus (5) folgern wir genau so wie früher, daß die Winkel, die $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{r}$ bilden, bzw. $\mathfrak{y}$ und $-\mathfrak{r}$, einander gleich sind. Diese Beziehung ist für *die Stetigkeit der Tangente unserer C-Kurve* von Bedeutung. Weiter ist sofort zu erkennen, daß wir in (5) $\mathfrak{x}'(s)$ und $L \neq 0$ beliebig vorgeben können. Wir gehen nun genau so wie in der Ebene vor. C_0 sei ein Kurvenstück, das wir so oft stetig differentiierbar annehmen wollen, als wir es für die folgenden Überlegungen notwendig haben. Seine Parameterdarstellung durch den Bogen s setzen wir gleich $\mathfrak{x}(s)$, $0 \leqq s \leqq \sigma$. Nun nehmen wir weiter an $2L = |\mathfrak{x}(\sigma) - \mathfrak{x}(0)|$. Nehmen wir nun auch die Gleichheit der Winkel in $\mathfrak{x}(0)$ bzw. $\mathfrak{x}(\sigma)$ mit $\mathfrak{r}$ bzw. $-\mathfrak{r}$ an. Dann beschreibt aber $\mathfrak{y}(s)$ ein Kurvenstück C_1, welches sich im Punkte $\mathfrak{x}(\sigma)$ mit *stetiger Tangente* an C_0 anfügt. Die Konstruktion der weiteren Kurvenstücke C_i ($i = \pm 1, \pm 2, \ldots$) verläuft genau so wie in der Ebene, es erübrigt sich daher jede weitere Ausführung. *Die Kurve C besteht dann aus den Kurvenstücken* $\ldots C_{-2}C_{-1}C_0C_1C_2 \ldots$ *Eine weitere Auswertung der Gleichung* (5) *ermöglicht uns, ähnlich wie in der Ebene, auch die Stetigkeit der höheren Ableitungen der Parameterdarstellung der Kurve zu erreichen.*

Auch hier im Raume erkennen wir, daß durch die Punkte einer nach obigem Verfahren erzeugten Kurve C im allgemeinen zwei Strecken von der Länge $2L$ hindurchgehen werden. *Die Kurve C wird also im allgemeinen als zugeordnetes Paar von Abstandskurven zweier verschiedener Regelscharen anzusehen sein.*

Unsere obigen Ergebnisse zeigen auch, *daß eine Strickleiter im Sinne des* § 4 *immer so deformiert werden kann, daß einer ihrer Holme mit einer beliebig vorgegebenen Kurve des Raumes zur Deckung kommt.* Offenbar bildet jedes obige Kurvenpaar $C_i C_{i+1}$ aber auch $C_{i+1} C_i$ eine Strickleiter, deren Sprossen die zugehörigen Strecken von der Länge $2L$ sind.

Ähnlich wie in der Fbene die sogenannten *Zindlerschen Kurven* eine besondere Klasse von geschlossenen Kurven ergaben, werden wir im folgenden solche geschlossenen C-Kurven des Raumes angeben. *Diese Raumkurven haben mit den Zindlerschen Kurven der Ebene die Eigenschaft gemein, daß durch jeden ihrer Punkte im allgemeinen nur eine einzige Lage der Strecke hindurchgeht, deren Endpunkte die Kurve beschreiben.*

Solche geschlossenen C-Kurven kann man nach dem bekannten Verfahren zur Herstellung eines *Möbiusschen Bandes* leicht gewinnen. Hierzu ist eigentlich nur erforderlich, einseitige geschlossene Regelflächen anzugeben, deren Striktionslinie ganz im Endlichen verbleibt, im anderen Falle würden wir Modelle erhalten, die für uns ganz uninteressant sind. *Es ist nun sofort zu sehen, daß genau wie bei den Zindlerschen Kurven auch hier jedes Paar von Abstandskurven eine einzige geschlossene Kurve ergeben wird.*

Wir erkannten bereits, daß bei allen windschiefen Regelflächen, deren Striktionsband ein geodätisches ist, eine zugehörige Regelfläche *Binormalenfläche ihrer Striktionsfläche* ist. *Es werden daher alle geodätischen Streifen, deren Verdrillungszahl ungerade ist*[16]*, Striktionsbänder von Regelflächen ergeben, deren sämtliche Abstandskurven geschlossen sind.* Es ergibt sich daraus ein recht allgemeines Verfahren zur Ermittlung solcher Scharen von Abstandskurven.

Es sei nun

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{34}$$

die Gleichung der Schmiegebene der Streifenkurve eines geodätischen Streifens von ungerader Verdrillungszahl. *Wir müssen also* $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *homogen vom Grade-Eins in den* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *voraussetzen.* Die α_i selbst können wir als Funktionen eines Parameters t wählen, der bei einer Durchlaufung des Intervalls

[16]) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 3. Auflage, S. 83.

$[0, \pi]$ gerade alle Schmiegebenen der notwendigerweise geschlossen vorausgesetzten Streifenkurve ergibt. Gilt nun weiter:

$$\alpha_i(t) = -\alpha_i(t+\pi), \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 \neq 0, \tag{35}$$

und bezeichnen wir $h(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = g(t)$, so soll:

$$g(t) = -g(t+\pi) \tag{36}$$

sein.

Die Befriedigung der Relationen (35) und (36) geben uns die sichere Gewähr, daß das folgende durch Ableitung von (34) erhaltene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(t)\, x_i &= g(t), \\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i'(t)\, x_i &= g'(t), \\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i''(t)\, x_i &= g''(t) \end{aligned} \tag{37}$$

Lösungen $x_i = x_i(t)$ hat, die eine Streifenkurve eines geodätischen Streifens ergibt, dessen Verdrillungszahl ungerade ist, wenn nur die *Wronskische Determinante* $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der drei Funktionen $\alpha_i(t)$ von Null verschieden verbleibt. Im allgemeinen wird es wegen der Relationen (35) nicht zu vermeiden sein, daß $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in endlich vielen Punkten des Intervalls $[0, \pi]$ für t verschwindet, doch stören solche Nullstellen in keiner Weise die obigen Überlegungen. Solchen Parameterwerten von t entsprechen eben Durchgänge durch ∞ unserer Streifenkurve, falls nicht weitere besondere Verhältnisse vorliegen. Zu solchen Kurven gehören dann Abstandskurven, welche sich ins Unendliche erstrecken und in dem Sinne, wie wir hier meinen, eigentlich nicht geschlossen sind. Manchmal wird es vielleicht möglich sein, durch eine geeignete projektive Transformation diesen Übelstand zu beseitigen, doch sind diese Möglichkeiten nur schwer in ihrer Allgemeinheit zu überblicken. Aber wir können noch anders vorgehen. Die Lösungen des Gleichungssystems (37) lassen sich in der Form

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \Delta(g, \alpha_2, \alpha_3), \quad x_2 \cdot \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Delta(\alpha_1, \alpha_3, g), \\ x_3 \cdot \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \Delta(\alpha_1, \alpha_2, g) \end{aligned} \tag{38}$$

schreiben. Nun kann man auch in recht allgemeinen Fällen über die Funktion $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ oder $g(t)$ so verfügen, daß die Zählerdeterminanten in (38) alle Nullstellen von $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von mindestens der gleichen Ordnung besitzen. *Der so erhaltene geodätische Streifen verbleibt nun ganz im Endlichen, ist geschlossen und muß eine ungerade Verdrillungszahl besitzen. Die Regelfläche, deren Erzeugende die Binormalen dieser Streifenkurve sind, besitzen Abstandskurven, die sämtlich im Endlichen verbleiben und geschlossen sind.*

Nach obigen Verfahren erhält man auf diese Weise die folgenden schon recht allgemeinen Flächen bzw. Kurven: Wir wählen für

$$\alpha_1(t) = \cos t, \quad \alpha_2(t) = \sin t, \quad \alpha_3(t) = \cos 3t \tag{39}$$

und für

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = g(t) = \cos \nu t, \qquad (\nu = 5, 7, 9 \ldots) \tag{40}$$
$$\nu = 2k + 1.$$

Aus (39) und (40) finden wir für

$$\begin{aligned}
\Delta &= 24 \cos t, \\
\Delta_1 &= \Delta(g, \alpha_2, \alpha_3) = (9 - \nu^2) \cos \nu t, \\
\Delta_2 &= \Delta(\alpha_1, \alpha_3, g) = \cos t \cdot [8\nu \sin \nu t \sin 3t + 3(\nu^2 - 1) \cos \nu t \cos 3t] + \\
&\quad + (\nu^2 + 7) \sin t \sin 3t \cos \nu t, \\
\Delta_3 &= \Delta(\alpha_1, \alpha_2, g) = \cos t \cdot [3(\nu^2 - 1) \cos \nu t \sin 3t - 8\nu \cos 3t \sin \nu t] + \\
&\quad + (9 - \nu^2) \sin t \cos 3t \cos \nu t.
\end{aligned} \tag{41}$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$\nu = 2k + 1 \text{ und } \frac{\cos \nu t}{\cos t} = (-1)^k + 2 \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \cos 2\nu t,$$

so erhalten wir für unsere Streifenkurve die Darstellung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(\nu, t) = \frac{9 - \nu^2}{24} \left[(-1)^k + 2 \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-r} \cos 2\nu t \right], \\
x_2 &= \psi(\nu, t) = \frac{1}{24} [8\nu \sin \nu t \sin 3t + 3(\nu^2 - 1) \cos \nu t \cos 3t] + \\
&\quad + \frac{(\nu^2 + 7)}{24} \sin t \sin 3t \cdot \left[(-1)^k + 2 \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-r} \cos 2\nu t \right], \\
x_3 &= \chi(\nu, t) = \frac{1}{24} [3(\nu^2 - 1) \cos \nu t \sin 3t - 8\nu \cos 3t \sin \nu t] + \\
&\quad + \frac{9 - \nu^2}{24} \sin t \cos 3t \left[(-1)^k + 2 \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-r} \cos 2\nu t \right],
\end{aligned} \tag{42}$$

während $\cos t$, $\sin t$, $\cos 3t$ die Koordinaten eines Vektors in der Richtung ihrer Binormalen sind. Aus (42) erkennt man noch, daß alle Kurven von der Gestalt

$$x_1 = \sum_{\nu} a_\nu \varphi(\nu, t), \qquad x_2 = \sum_{\nu} a_\nu \psi(\nu, t), \qquad x_3 = \sum_{\nu} a_\nu \chi(\nu, t), \qquad a_\nu = \text{konst.},$$

welche im übrigen die gleichen Binormalen haben, die gleiche Eigenschaft wie die Kurve (42) besitzen.

Zum Schlusse wollen wir noch ein anderes Verfahren zur Herstellung von Regelscharen mit geschlossenen Paaren von Abstandskurven kurz entwickeln.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in der Ebene ein glattes Kurvenstück K gegeben, welches von den Punkten P und Q begrenzt wird. Wir orientieren unser Kurvenstück von P nach Q. Im gleichen Sinne werden auch die Tangentenvektoren von K orientiert; vorgeben wollen wir noch einen positiven Drehsinn, zwecks eindeutiger Bestimmung von Winkeln. Die Tangentenvektoren an K in P und Q bezeichnen wir mit $\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{t}_1$. Den ebenen Streifen zu K wollen wir als einen in die Ebene *abgewickelten Striktionsstreifen ansehen, der im besonderen geschlossene Paare von Abstandskurven besitzt.* Nach dem Satze von Darboux[17]) gehen durch die Abwicklung die Erzeugendenrichtungen in parallele Gerade der Ebene über. Die dadurch bestimmte Richtung in der Ebene sei durch $\mathfrak{r}$ gegeben. Wir bezeichnen nun die orientierten Winkel mit:

$$\measuredangle\, \mathfrak{t}_0\mathfrak{r} = \alpha_0,\ \measuredangle\, \mathfrak{t}_1\mathfrak{r} = -\alpha_1 \text{ und } \measuredangle\, \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_0 = \beta.$$

Ersichtlich ist

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \beta = 2\pi. \tag{43}$$

Nun schließen wir im Raume unseren Streifen von K. Zunächst einmal *ohne ihn zu verdrillen.* Soll auf diese Weise das Striktionsband einer gesuchten Regelfläche sich ergeben, dann muß offenbar die folgende Beziehung bestehen $\alpha_1 = \pi - \alpha_0$. Wegen (43) ist dies nur so möglich, daß

$$\beta = \pi. \tag{44}$$

Es gilt aber auch umgekehrt, *wenn* (44) *erfüllt ist, so erhält man durch obiges Verfahren einen gewünschten Striktionsstreifen; da anderseits* (44) *nicht den Winkel α_i enthält, können wir die Richtung $\mathfrak{r}$ ganz beliebig ohne Einschränkung vorgeben. Die Relation* (44) *besagt ja nur, daß das Kurvenstück K die Gesamtkrümmung π besitzt.*

Wir wollen dieses Verfahren an einem speziellen Beispiel wirklich durchführen. *Als Kurve K wählen wir einen Halbkreis vom Radius $2r$ und die Richtung $\mathfrak{r}$ ist nun bestimmt* durch den Winkel $\varphi(s)$, den $\mathfrak{r}$ mit dem Halbkreise bildet, *wir greifen die Möglichkeit $\varphi = \pi - \frac{s}{2r}$ heraus*, wobei s die Bogenlänge des Halbkreises ist. Verbiegen wir nun die Fläche dieses Halbkreises so, daß sie die volle Mantelfläche eines Drehkegels bildet, *so erhält man nach den obigen Entwicklungen eine Regelfläche, dessen sämtliche Paare von Abstandskurven jeweils eine einzige geschlossene Kurve ergeben.* Man findet leicht für die Abstandskurven dieser Fläche die Darstellung:

$$x_1 = r\cos 2\psi + \tfrac{1}{2}t\sin\psi\,(1+\cos^2\psi),$$

$$x_2 = r\sin 2\psi - t\cos^3\psi, \qquad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}t\sin\psi.$$

[17]) Vgl. § 4 dieser Arbeit.

Darin bedeutet $\pm t$ den Abstand von der Striktionslinie, gemessen auf den Erzeugenden der Fläche.

In Fig. 3 ist eine solche Abstandskurve eingezeichnet.

Wir können nun auch noch etwas anders vorgehen. Die Bezeichnung von K und der Winkel α_0, α_1, β behält ihre Bedeutung. Längs K denken wir uns noch ein begleitendes Zweibein $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ gegeben. Im Punkte P besteht dasselbe aus den beiden Vektoren $\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{n}_0$, im Punkte Q aus $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{n}_1$. Wir schließen nun unseren Streifen von K im Raume, *verdrillen ihn aber vorher um* π, d. h. nach Schließung des Streifens kommen die Vektoren $\mathfrak{t}_0$ mit $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{n}_0$ mit $-\mathfrak{n}_1$ im Raume zur Deckung. Damit nun der so entstandene Streifen das Striktionsband einer gesuchten Fläche wird, muß neben (43) noch (45) bestehen.

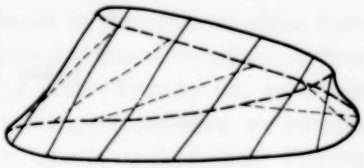

Fig. 3.

$$\alpha_0 = \alpha_1 . \tag{45}$$

Aus (43) und (45) finden wir aber sofort

$$\beta = 2\pi - 2\alpha_0 . \tag{46}$$

Aus (46) entnimmt man aber sofort, *daß sich zu jedem* β *ein Winkel* $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha$ *finden läßt*. Da aber β der Gesamtkrümmung gleichgesetzt werden kann, *können wir bei diesem zweiten Verfahren die Gesamtkrümmung von K beliebig wählen, dann gibt es aber nur eine Richtung* $\mathfrak{r}$ *dazu. Nach* (46) *bestimmt sich diese Richtung* $\mathfrak{r}$ *als die der Winkelhalbierenden des Winkels* $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_0$. Beide Verfahren lassen sich noch erweitern. So können wir entsprechend dem ersten Verfahren als Verdrillungswinkel im obigen Sinne $2n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) wählen, es gelten dann die Bedingungen (44), d. h. *die Gesamtkrümmung von K muß* π *sein,* $\mathfrak{r}$ *kann man aber beliebig wählen*, entsprechend dem zweiten Verfahren, wählen wir als Verdrillungswinkel $(2n + 1)\pi$, ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$), dann besteht (46) zu Recht, *in diesem Falle kann die Gesamtkrümmung beliebig gewählt werden, dann ist aber* $\mathfrak{r}$ *als Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels* $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_0$ *eindeutig bestimmt.*

(Eingegangen am 10. August 1940.)

Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Kronecker hat in § 10 seiner Kummer-Festschrift ohne ausführlichen Beweis den folgenden Satz angegeben[1]):

A. *Ein System von beliebig vielen (algebraischen) Gleichungen mit n Unbekannten ist stets einem System von höchstens $n+1$ Gleichungen äquivalent (d. h. beide Systeme haben dieselben Lösungen ohne Berücksichtigung der Vielfachheit).*

Ein nicht ganz leicht zu durchschauender Beweis des Satzes steht bei König[2]). Einen wesentlich einfacheren Beweis hat mir Herr van der Waerden mitgeteilt. Speziell für $n = 3$ besagt der Satz u. a., daß eine Kurve im *Euklidischen* R_3 stets als Durchschnitt von höchstens vier Flächen dargestellt werden kann. Wollte man dasselbe auch für den *projektiven* R_3 schließen, so müßte der Kroneckersche Satz so lauten:

B. *Ein System von beliebig vielen homogenen Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten ist stets einem System von höchstens $n+1$ homogenen Gleichungen äquivalent.*

Nun ist klar, daß aus **B** sofort **A** folgt; es ist nur nötig, in **B** eine Unbekannte gleich 1 zu setzen. Aber aus **A** folgt nicht umgekehrt **B**. Denn wenn man zwei verschiedene inhomogene Gleichungssysteme mit demselben Lösungsinhalt in bekannter Weise homogen macht, so brauchen die neuen Lösungsinhalte in den „unendlich fernen Punkten" nicht mehr übereinzustimmen. Der erwähnte Beweis des Herrn van der Waerden verläuft jedoch so, daß er sogleich auch den weitergehenden Satz **B** liefert. Dieser Satz gilt also, und folglich gilt die oben für den *Euklidischen* R_3 gezogene Folgerung auch für den *projektiven* R_3.

---

[1]) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Crelles Journal für Mathematik, Band 92 = Werke, Band II.

[2]) Julius König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903. S. 234ff.

Nun kann man der Meinung sein, daß eine Kurve auch schon als Durchschnitt von weniger als vier Flächen darstellbar sein müsse. Als ein Beispiel, bei dem das nicht der Fall ist, hat Herr VAHLEN die rationale Raumkurve fünfter Ordnung mit einer Quadrisekante angeführt[3]), und, soweit mir bekannt, ist dem nie widersprochen worden. Vielmehr weist KÖNIG a. a. O. S. 238 anerkennend auf dieses Beispiel hin, und auch in der alten Encyklopädie findet sich ein Hinweis (Band I, 1, S. 264), ebenso in der französischen Ausgabe (Band I, 2, S. 159), während die Neuauflage der Encyklopädie sich über diesen ganzen Fragenkreis bis jetzt ausschweigt. Herr VAHLEN hat in seiner Arbeit nichts gerechnet, sondern hat aus Abzählungen schließen zu können geglaubt, daß *drei* Flächen außer der Kurve immer noch fremde Punkte gemein haben müssen. Das trifft aber nicht zu. Vielmehr werde ich im folgenden zeigen, daß schon die nächstliegenden drei Kegelflächen, die man aus der Parameterdarstellung der Kurve durch Elimination des Parameters erhält, keine fremden Punkte gemein haben.

Somit ist die seit 50 Jahren als erledigt geltende Frage, ob es Raumkurven gibt, die nicht als Durchschnitt von weniger als vier Flächen darstellbar sind, heute plötzlich wieder offen. Aber noch mehr. Es ist durchaus denkbar, daß die VAHLENsche Kurve sich sogar als Durchschnitt von nur *zwei* Flächen darstellen läßt. Eine solche Darstellung ist mir zwar nicht gelungen, aber ich kann auch die Unmöglichkeit nicht beweisen. Überhaupt möchte ich bei dieser Gelegenheit feststellen, daß bis heute keine einzige Kurve bekannt ist, die *nachweislich* nicht als Durchschnitt von zwei Flächen dargestellt werden kann. Die Raumkurve dritter Ordnung (im projektiven R_3), an die man in diesem Zusammenhang wohl denkt und die auch in der französischen Encyklopädie a. a. O. als Beispiel angeführt ist, ist nämlich kein solches Beispiel. Denn sie läßt sich zwar nicht als Durchschnitt von zwei Flächen zweiter Ordnung darstellen, da diese außer der Kurve immer noch eine Gerade gemein haben, wohl aber von einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung, die sich längs der Kurve berühren und keinen fremden Punkt gemein haben. In der Tat folgt aus der Parameterdarstellung der Kurve

$$x_1 = \varrho^3, \quad x_2 = \varrho^2\sigma, \quad x_3 = \varrho\sigma^2, \quad x_4 = \sigma^3$$

sogleich

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0,$$

$$x_1 x_4^2 - 2\, x_2 x_3 x_4 + x_3^3 = 0,$$

und diese beiden Flächengleichungen haben, wie man unschwer kontrolliert, keine anderen Lösungen als die durch die Parameterdarstellung gegebenen.

---

[3]) Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven. CRELLEs Journal für Mathematik, Band 108 (1891).

§ 2.

Die Parameterdarstellung einer rationalen Raumkurve fünfter Ordnung im projektiven R_3 lautet

$$x_\nu = f_\nu(\varrho, \sigma) \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

wo die f_ν homogene Polynome fünften Grades von ϱ, σ sind, und zwar ohne gemeinsamen Teiler (sonst könnte man diesen als gemeinsamen Proportionalitätsfaktor der x_ν unterdrücken und die Kurve wäre von geringerer Ordnung).

Die Quadrisekante sei die Gerade $x_1 = x_2 = 0$. Da man die Parameter ϱ, σ linear transformieren kann, darf man annehmen, daß drei Schnittpunkte der Quadrisekante den Parameterverhältnissen

$$\varrho : \sigma = 0 : 1, \quad 1 : 0, \quad 1 : 1$$

entsprechen, der vierte entspreche dem Verhältnis $\varrho : \sigma = \alpha : 1$. Dann ist

$$x_1 = \varrho\sigma(\varrho - \sigma)(\varrho - \alpha\sigma)(a\varrho + b\sigma),$$

$$x_2 = \varrho\sigma(\varrho - \sigma)(\varrho - \alpha\sigma)(c\varrho + d\sigma).$$

Natürlich muß $ad - bc \neq 0$ sein; sonst wäre $x_1 : x_2$ konstant, die Kurve also eben. Indem man x_1, x_2 linear transformiert, kann man $a = d = 1$, $b = c = 0$ annehmen, so daß man schließlich die folgende Parameterdarstellung erhält:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \varrho^2\sigma(\varrho - \sigma)(\varrho - \alpha\sigma), \\ x_2 = \varrho\sigma^2(\varrho - \sigma)(\varrho - \alpha\sigma), \\ x_3 = a_0\varrho^5 + a_1\varrho^4\sigma + a_2\varrho^3\sigma^2 + a_3\varrho^2\sigma^3 + a_4\varrho\sigma^4 + a_5\sigma^5, \\ x_4 = b_0\varrho^5 + b_1\varrho^4\sigma + b_2\varrho^3\sigma^2 + b_3\varrho^2\sigma^3 + b_4\varrho\sigma^4 + b_5\sigma^5. \end{cases}$$

Von den a_ν, b_ν kann man noch einige durch weitere Spezialisierung des Koordinatentetraeders zu 0 machen, was aber keinen Vorteil bietet. Jedoch unterliegen die a_ν, b_ν den Beschränkungen

(2) a_0, b_0 sind nicht beide gleich 0,

(3) a_5, b_5 sind nicht beide gleich 0,

(4) $\sum_{\nu=0}^{5} a_\nu$, $\sum_{\nu=0}^{5} b_\nu$ sind nicht beide gleich 0,

(5) $\sum_{\nu=0}^{5} a_\nu\alpha^{5-\nu}$, $\sum_{\nu=0}^{5} b_\nu\alpha^{5-\nu}$ sind nicht beide gleich 0,

weil andernfalls die rechten Seiten von (1) einen gemeinsamen Teiler hätten, nämlich σ bzw. ϱ bzw. $\varrho - \sigma$ bzw. $\varrho - \alpha\sigma$.

Aus den ersten beiden Gleichungen (1) folgt $\sigma : \varrho = x_2 : x_1$. Indem man das in $x_3 : x_1$ bzw. $x_4 : x_1$ einsetzt, erhält man

$$(6)\quad a_0 x_1^5 + a_1 x_1^4 x_2 + a_2 x_1^3 x_2^2 + a_3 x_1^2 x_2^3 + a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5 = x_1 x_2 x_3 (x_1 - x_2)(x_1 - \alpha x_2),$$

$$(7)\quad b_0 x_1^5 + b_1 x_1^4 x_2 + b_2 x_1^3 x_2^2 + b_3 x_1^2 x_2^3 + b_4 x_1 x_2^4 + b_5 x_2^5 = x_1 x_2 x_4 (x_1 - x_2)(x_1 - \alpha x_2).$$

Diese beiden Flächengleichungen werden daher identisch befriedigt, wenn man für die x_i die Ausdrücke (1) einsetzt. Die Kurve liegt also auf diesen beiden Flächen (Kegeln) fünfter Ordnung[4]).

Jetzt eliminieren wir das Parameterverhältnis auch aus den letzten drei der Gleichungen (1). Das Resultat besteht im Verschwinden der 15-reihigen Determinante

$$\begin{array}{r|l} 1. & 0\ 0\ 1\ \beta\ \alpha\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ x_2\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 6. & a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ 0\ 0\ 0\ 0\ x_3\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 11. & b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ 0\ 0\ 0\ 0\ x_4\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \quad (\text{wobei } \beta = -1 - \alpha).$$

Diese ist so gebildet, daß nach der angeschriebenen 1., 6. und 11. Zeile immer noch viermal dieselbe Zeile kommt, aber jedesmal um eine weitere Stelle zyklisch nach rechts verschoben wie bei einer Sylvesterschen Determinante. Die Determinante ist daher ein homogenes Polynom fünften Grades von x_2, x_3, x_4, das wir mit $F(x_2, x_3, x_4)$ bezeichnen wollen. Wir werden sehen, daß F nicht identisch verschwindet, so daß die Gleichung

$$(8)\qquad F(x_2, x_3, x_4) = 0$$

[4]) Falls $a_0 = 0$ oder $b_5 = 0$, was sich beides zugleich durch weitere Spezialisierung des Koordinatentetraeders erreichen läßt, so scheidet sich in (6), (7) ein Faktor x_2 bzw. x_1 ab. Man *kann* dann (*muß* aber nicht) in der ganzen folgenden Rechnung an Stelle der (zerfallenden) Kegel fünfter Ordnung diejenigen Kegel vierter Ordnung setzen, die nach Abscheidung des Faktors entstehen.

eine Kegelfläche fünfter Ordnung darstellt. Daß diese die Kurve enthält, ist sofort zu sehen. Denn wenn man für die x_ν die Werte aus (1) in die Determinante einsetzt und dann die Spalten der Reihe nach mit

$$\varrho^9,\ \varrho^8\sigma,\ \varrho^7\sigma^2,\ \ldots,\ \varrho\sigma^8,\ \sigma^9,\ -\varrho^4,\ -\varrho^3\sigma,\ -\varrho^2\sigma^2,\ -\varrho\sigma^3,\ -\sigma^4$$

multipliziert und zueinander addiert, kommt in jeder Zeile 0 heraus.

Wenn man in der damit bewiesenen Identität

$$F\left(\varrho\sigma^2(\varrho-\sigma)(\varrho-\alpha\sigma),\ \Sigma a_\nu\varrho^{5-\nu}\sigma^\nu,\ \Sigma b_\nu\varrho^{5-\nu}\sigma^\nu\right)=0,$$

wo die Summen nach ν von 0 bis 5 laufen, speziell $\varrho=1, \sigma=0$, dann $\varrho=0$, $\sigma=1$, dann $\varrho=1$, $\sigma=1$, dann $\varrho=\alpha$, $\sigma=1$ einsetzt, erhält man die Formeln

$$F(0, a_0, b_0)=0,\quad F(0, a_5, b_5)=0,$$
$$F(0, \Sigma a_\nu, \Sigma b_\nu)=0,\quad F(0, \Sigma a_\nu\alpha^{5-\nu}, \Sigma b_\nu\alpha^{5-\nu})=0.$$

Daher enthält das Polynom $F(0, x_3, x_4)$ die Faktoren

$$a_0x_4-b_0x_3,\quad a_5x_4-b_5x_3,$$
$$\Sigma a_\nu\cdot x_4-\Sigma b_\nu\cdot x_3,\quad \Sigma a_\nu\alpha^{5-\nu}\cdot x_4-\Sigma b_\nu\alpha^{5-\nu}\cdot x_3.$$

Wenn man die a_ν, b_ν und α zunächst als Unbestimmte ansieht, sind diese Faktoren voneinander verschieden, so daß $F(0, x_3, x_4)$ auch durch ihr Produkt teilbar ist. Aber der Faktor $a_0x_4-b_0x_3$ steckt sogar zweimal darin, wie man durch Differentiation der obigen Identität nach σ und nachherige Spezialisierung $\varrho=1$, $\sigma=0$ erkennt und übrigens auch aus der Determinantendarstellung durch Kombinierung der 6. und 11. sowie der 7. und 12. Zeile leicht abliest[5]). Daher ist

$$F(0, x_3, x_4)=A(a_0x_4-b_0x_3)^2(a_5x_4-b_5x_3)(\Sigma a_\nu\cdot x_4-\Sigma b_\nu\cdot x_3)$$
$$(\Sigma a_\nu\alpha^{5-\nu}\cdot x_4-\Sigma b_\nu\alpha^{5-\nu}\cdot x_3),$$

wo A eine Konstante, und zwar, weil F auch in bezug auf die a_ν, b_ν und α nur je vom fünften Grad ist, eine reine *Zahl*. Ihr Wert ergibt sich durch die Spezialisierung

$$x_2=x_3=0,\quad x_4=1,$$
$$a_0=a_5=1,\quad a_1=a_2=a_3=a_4=0,$$
$$\alpha=0\ (\text{also } \beta=-1-\alpha=-1),$$

[5]) Auch die anderen Faktoren lassen sich in ähnlicher Weise aus der Determinante ablesen.

bei der die Determinante ganz leicht zu berechnen ist, und zwar findet man $A = 1$. Daher ist

$$(9)\quad F(0, x_3, x_4) = (a_0 x_4 - b_0 x_3)^2 (a_5 x_4 - b_5 x_3)(\Sigma a_r \cdot x_4 - \Sigma b_r \cdot x_3) \\ (\Sigma a_r \alpha^{5-r} \cdot x_4 - \Sigma b_r \alpha^{5-r} \cdot x_3).$$

Diese Identität in bezug auf die a_r, b_r, x_r, α gilt jetzt natürlich auch, wenn die a^r, b_r und α keine Unbestimmte mehr sind, sondern diejenigen speziellen Größen, die in den Formeln (1) auftreten. Die Formel (9) lehrt nun mit Rücksicht auf die Voraussetzungen (2), (3), (4), (5), daß das Polynom $F(0, x_3, x_4)$ und daher erst recht das Polynom $F(x_2, x_3, x_4)$ nicht identisch verschwindet.

Wir zeigen jetzt, daß die drei Flächen (6), (7), (8) außer der Kurve (1) keinen einzigen Punkt gemein haben, oder algebraisch ausgedrückt: daß jede Lösung des Gleichungssystems (6), (7), (8) die Gestalt (1) hat.

Zu dem Zweck betrachten wir zuerst diejenigen Lösungen, für welche $x_1 = 0$ ist. Aus (6) und (7) folgt dann mit Rücksicht auf (3) auch $x_2 = 0$, und sodann aus (9)

$$\begin{aligned} x_3 : x_4 \text{ entweder } &= a_0 : b_0 \\ \text{oder } &= a_5 : b_5 \\ \text{oder } &= \Sigma a_r : \Sigma b_r \\ \text{oder } &= \Sigma a_r \alpha^{5-r} : \Sigma b_r \alpha^{5-r}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß wegen der Voraussetzungen (2), (3), (4), (5) keines dieser Verhältnisse unbestimmt ist. Diese vier Lösungen sind aber augenscheinlich in (1) enthalten, nämlich für das Parameterverhältnis

$$\begin{aligned} \varrho : \sigma &= 1 : 0 \\ \text{bzw. } &= 0 : 1 \\ \text{bzw. } &= 1 : 1 \\ \text{bzw. } &= \alpha : 1. \end{aligned}$$

Zweitens betrachten wir diejenigen Lösungen, für die $x_2 = 0$ ist. Aus (6) und (7) folgt dann mit Rücksicht auf (2), daß auch $x_1 = 0$ ist, und diese Lösungen haben wir schon.

Drittens betrachten wir diejenigen Lösungen, für welche $x_1 = x_2$ oder $x_1 = \alpha x_2$ ist. Aus (6) und (7) folgt dann mit Rücksicht auf (4) bzw. (5) wiederum, daß auch $x_1 = 0$ ist, und diese Lösungen haben wir schon.

Schließlich bleiben nur noch diejenigen Lösungen, für welche

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq \alpha x_2$$

ist. Führt man bei einer solchen Lösung die Abkürzung $\frac{x_2}{x_1} = \tau$ ein, so folgt aus (6) und (7)

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5}{\tau(1-\tau)(1-\alpha\tau)},$$

$$\frac{x_4}{x_1} = \frac{b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3 + b_4\tau^4 + b_5\tau^5}{\tau(1-\tau)(1-\alpha\tau)}.$$

Diese Lösung ist also, da es auf einen Proportionalitätsfaktor nicht ankommt, die folgende:

$$x_1 = \tau(1-\tau)(1-\alpha\tau),$$
$$x_2 = \tau^2(1-\tau)(1-\alpha\tau).$$
$$x_3 = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5,$$
$$x_4 = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3 + b_4\tau^4 + b_5\tau^5.$$

Sie ist also wieder in der Form (1) enthalten, nämlich für $\varrho = 1$, $\sigma = \tau$

(Eingegangen am 1. Februar 1941.)

Über die Konvergenzarten unendlicher Reihen im Hilbertschen Raum.

Von

H. Hadwiger, Bern.

1. Die verschiedenen Konvergenzarten. Wir betrachten eine unendliche konvergente Reihe

$$\sum_{\nu} a_\nu$$

von Elementen des Hilbertschen Raumes. Das Verhalten der Reihe bei Umordnung gibt zu folgenden Definitionen Anlaß:

Die Reihe heißt

absolut-konvergent (kurz: AK), falls die Reihe $\sum_{\nu} |a_\nu|$ konvergiert[1]);

nicht-absolut-konvergent (NAK), falls sie nicht absolut-konvergent ist;

bedingt-konvergent (BK), falls die Existenz der Summe von der Anordnung der Elemente abhängt;

unbedingt-konvergent (UK), falls sie nicht bedingt-konvergent ist;

bedingter Summe (BS), falls die Summe von der Anordnung der Elemente abhängt;

unbedingter Summe (US), falls sie nicht bedingter Summe ist.

Es seien noch folgende Bemerkungen hinzugefügt, um die gegebenen Definitionen zu ergänzen:

Eine BK-Reihe kann durch passend gewählte Umordnung in eine divergente Reihe verwandelt werden, und eine BS-Reihe in eine konvergente Reihe anderer Summe. Ohne weitere Untersuchung ist nicht entschieden, ob eine BK-Reihe immer eine BS-Reihe ist wie in endlich-dimensionalen Räumen[2]), wo auch zwischen den Konvergenzarten NAK und BK kein Unterschied gemacht zu werden braucht, weil sie *äquivalent* sind. Wir werden nun zeigen, daß sowohl NAK und BK als auch BK und BS im Hilbertschen Raum *nicht äquivalente* Konvergenzarten sind, womit die oben vorgenommene Einteilung gerechtfertigt ist.

---

[1]) $|a| = \sqrt{a\,a}$ = Betrag des Elementes a.

[2]) Für Reihen komplexer Zahlen gab W. Threlfall [Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 212–214] einen besonders kurzen Beweis dieser an sich fundamentalen Eigenschaft der bedingt konvergenten Reihen.

2. Relationen. Sind X, Y Konvergenzarten, wie sie oben definiert worden sind, so schreiben wir:

a) $X \to Y$, falls jede X-Reihe eine Y-Reihe ist, aber nicht umgekehrt.

b) $X \longleftrightarrow Y$, falls jede X-Reihe eine Y-Reihe ist und auch umgekehrt.

In endlich dimensionalen Räumen gilt:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && \text{AK} \longleftrightarrow \text{UK},\\ &\text{II.} && \text{AK} \longleftrightarrow \text{US},\\ &\text{III.} && \text{NAK} \longleftrightarrow \text{BK},\\ &\text{IV.} && \text{NAK} \longleftrightarrow \text{BS},\\ &\text{V.} && \text{UK} \longleftrightarrow \text{US},\\ &\text{VI.} && \text{BK} \longleftrightarrow \text{BS}. \end{aligned}$$

Auf die Beweise dieser bekannten Relationen dürfen wir hier verzichten[3]).

Im Hilbertschen Raum gilt:

$$\begin{aligned} &\text{I}'. && \text{AK} \to \text{UK},\\ &\text{II}'. && \text{AK} \to \text{US},\\ &\text{III}'. && \text{NAK} \leftarrow \text{BK},\\ &\text{IV}'. && \text{NAK} \leftarrow \text{BS},\\ &\text{V}'. && \text{UK} \to \text{US},\\ &\text{VI}'. && \text{BK} \leftarrow \text{BS}. \end{aligned}$$

Alle in endlich dimensionalen Räumen gültigen symmetrischen Relationen $\longleftrightarrow$ werden also im Hilbertschen Raum durch unsymmetrische Relationen $\to$ ersetzt.

Der Nachweis, daß jede AK-Reihe sowohl eine UK-Reihe wie auch eine US-Reihe ist, kann unmittelbar an das Cauchysche Konvergenzkriterium angeschlossen werden und benötigt kaum eine ausführlichere Darlegung. Daß nicht jede UK-Reihe und nicht jede US-Reihe eine AK-Reihe ist, wird durch das erste Beispiel im folgenden Abschnitt belegt. Damit ist für I′ und II′ der Nachweis erbracht. Die Relationen III′ und IV′ erscheinen als Konsequenzen der Relationen I′ und II′. Daß jede BS-Reihe eine BK-Reihe sein muß, wird durch die folgende Überlegung erwiesen: Nach Definition der BS-Reihe gestattet sie mindestens zwei Umordnungen verschiedener Summe. Es kann dann eine Folge von Teilsummen gebildet werden, die abwechslungsweise der ersten und der zweiten Reihe angehören, und so bemessen sind, daß jede die vorausgehende als Elementenkomplex enthält. Fügt man der ersten

[3]) Es kann auf A. Pringsheim. Encyklopädie der Math. Wiss. I A 3. 31, Bedingte und unbedingte Konvergenz, S. 91—93, verwiesen werden.

gewählten Teilsumme die Elemente in irgend einer Reihenfolge hinzu, die sie zur zweiten Teilsumme ergänzen und führt diesen Prozeß ohne Ende weiter, so entsteht eine Umordnung, deren Teilsummen diejenigen der gewählten Folge enthalten. Die Reihe kann offenbar nicht konvergieren.

Daß umgekehrt nicht jede BK-Reihe eine BS-Reihe zu sein braucht, beweisen wir durch das zweite im folgenden Abschnitt behandelte Beispiel. Damit ist die Relation VI′ erwiesen. Die Relation V′ ist eine Folge von VI′.

3. Beispiele. 1. *Eine* NAK-UK-US-*Reihe.* Die Konstruktion eines solchen Beispiels ist sehr naheliegend. Man geht aus von einer orthogonalen und normierten Elementenfolge

$$e_1, e_2, e_3, \ldots,$$

$$e_i e_k = \begin{cases} 0, & i \leqq k, \\ 1, & i = k, \end{cases}$$

und bildet die Reihe, die aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n} \right)$$

durch Entfernen der Klammern entsteht. Es ist eine konvergente NAK-Reihe der Summe 0. Eine Umordnung dieser Reihe hat die Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \varepsilon_\lambda \frac{e_{n_\lambda}}{n_\lambda} \qquad (\varepsilon_\lambda = \pm 1).$$

Wir setzen

$$S_k = \sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon_\lambda \frac{e_{n_\lambda}}{n_\lambda}.$$

Ist $\vartheta > 0$ beliebig vorgegeben, so werde $N = N(\vartheta)$ so gewählt, daß

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\vartheta^2}{2}$$

ausfällt. Es läßt sich dann ein M so angeben, daß $n_\lambda \geqq N$ wird, falls $\lambda > M$ gewählt ist. Für beliebige k, l mit $k > l \geqq M$ ist

$$S_k - S_l = \sum_{l+1}^{k} \varepsilon_\lambda \frac{e_{n_\lambda}}{n_\lambda}.$$

Es folgt

$$|S_k - S_l| \leqq \sqrt{\sum_{l+1}^{k} \left(\frac{1}{n_\lambda}\right)^2}.$$

(Man entferne die sich aufhebenden Elemente und beachte die Orthogonalitätsrelationen.)

Es ist dann

$$|S_k - S_l| < \vartheta, \qquad k > l \geqq M,$$

woraus geschlossen wird, daß die Reihe konvergiert. Es handelt sich also um eine UK-Reihe, die nach der im vorigen Abschnitt besprochenen Beziehung auch eine US-Reihe sein muß.

2. *Eine* NAK-BK-US-*Reihe.* Wir benutzen wie im ersten Beispiel die orthogonale und normierte Folge

$$e_1, e_2, e_3, \ldots$$

und bilden die Reihe, die aus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n} + \frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n} + \cdots + \frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n}\right) \tag{1}$$

(in der Klammer n Elemente mit positivem und ebenso viele Elemente mit negativem Vorzeichen) durch Entfernen der Klammern entsteht. Es ist eine konvergente NAK-Reihe der Summe 0. Daß es eine BK-Reihe ist, erkennt man leicht: Die Reihe, die aus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e_n}{n} + \frac{e_n}{n} + \cdots + \frac{e_n}{n} - \frac{e_n}{n} - \cdots - \frac{e_n}{n}\right) \tag{2}$$

(in der Klammer n Elemente mit positivem und ebenso viele Elemente mit negativem Vorzeichen) durch Entfernen der Klammern entsteht, ist eine Umordnung der Reihe (1), die nicht konvergiert, denn die Beträge der Teilsummen nehmen die Werte 0 und 1 unendlich oft an. Trotzdem ist die Reihe eine US-Reihe! Wir haben zu zeigen: Ist s die Summe einer konvergenten Umordnung von (1), so ist $s = 0$. Zum Beweis gehen wir von der Gegenannahme aus: Die Umordnung

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \varepsilon_\lambda \frac{e_{n_\lambda}}{n_\lambda} = s \qquad (\varepsilon_\lambda = \pm 1) \tag{3}$$

der Reihe (1) sei konvergent, und es sei

$$|s| > 0. \tag{4}$$

Wir setzen

$$S_k = \sum_{\lambda=1}^{k} \varepsilon_\lambda \frac{e_{n_\lambda}}{n_\lambda} \tag{5}$$

und wählen K so, daß

$$|S_k - s| < \frac{|s|}{4} \tag{6}$$

für alle $k > K$ ist.

Es sei $k > K$ und $m = \mathrm{Max}\,[n_1, n_2, \ldots, n_k]$.

Wir wählen nun $l > K$ so groß, daß in der Teilsumme

$$S_l = \sum_{\lambda=1}^{l} \varepsilon_\lambda \frac{e_{n_\lambda}}{n_\lambda}$$

alle Glieder der m ersten Klammern der Reihe (1) vertreten sind. Da sich diese gegenseitig in der Summe aufheben, kann S_l als Summe der übrigen Glieder geschrieben werden:

$$(7) \qquad S_l = \sum_{\mu=1}^{r} \varepsilon'_\mu \frac{e_{n'_\mu}}{n'_\mu}, \quad \varepsilon'_\mu = \pm 1, \quad n'_\mu > m \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r),$$

$$r = l - 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + m).$$

Es gilt auch

$$(8) \qquad |S_l - s| < \frac{|s|}{4}.$$

Mit Rücksicht auf die Konstruktion, wonach nun $n'_\mu > n_\lambda$ ist,

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, k; \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots, r,$$

gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$e_{n'_\mu} e_{n_\lambda} = 0,$$

so daß

$$(9) \qquad S_l S_k = 0$$

sein muß. Setzen wir in (9)

$$S_k = s + (S_k - s),$$
$$S_l = s + (S_l - s),$$

so erreichen wir die Beziehung

$$s^2 + s\,(S_k - s) + s\,(S_l - s) + (S_k - s)\,(S_l - s) = 0,$$

woraus die Ungleichung folgt

$$|s|^2 \leqq |s|\,|S_k - s| + |s|\,|S_l - s| + |S_k - s|\,|S_l - s|.$$

Verwenden wir hier (6) und (8), so folgt

$$|s|^2 \leqq \frac{9}{16}|s|^2,$$

so daß sich der gewünschte Widerspruch ergibt.

(Eingegangen am 12. Dezember 1940.)

Über die Fouriersche Entwicklung der singulären Funktion bei einer Lebesgueschen Zerlegung*).

Von

Süe-yung Kiang (geb. Zee) in München.

Einleitung.

Es sei $f(\vartheta)$, definiert im Intervall

$$I: \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi, \tag{1}$$

eine monoton wachsende und beschränkte Funktion; ist dann

$$\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2 \tag{2}$$

irgendein Teilintervall von (1), so bezeichnen wir mit

$$\tau(\lambda)_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

die λ-Variation[1]) unserer Funktion $f(\vartheta)$ im Intervall (2), und mit

$$\tau(0)_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \lim_{\lambda=0} \{\tau(\lambda)_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\}$$

die Nullvariation der Funktion $f(\vartheta)$ in demselben Intervall.

Wir setzen nun

$$S(\vartheta) = \tau(0)_0^{\vartheta} \quad \text{für} \quad \vartheta > 0 \quad \text{und} \quad S(0) = 0$$

und setzen als bekannt voraus[2]), daß $S(\vartheta)$ monoton wachsend ist und konstante λ-Variation besitzt, und daß man $f(\vartheta)$ auf eine und nur eine Weise in der Form darstellen kann:

$$f(\vartheta) = T(\vartheta) + S(\vartheta),$$

wobei $S(\vartheta)$ die eben definierte Funktion und $T(\vartheta)$ totalstetig ist (Lebesguesche Zerlegung).

Es ist daher ersichtlich, daß die Variation der „singulären" Funktion $S(\vartheta)$ im Intervall (1) gleich der Nullvariation von $f(\vartheta)$ in demselben Intervall ist. Es sei nun

$$f(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + \bar{a}_k \sin k\vartheta)$$

---

*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München als Dissertation (D 19) angenommen. Für die Anregung und viele Ratschläge von Herrn Prof. Carathéodory danke ich herzlich.

[1]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (1918), § 458.

[2]) Vgl. a. a. O. [1]), § 590ff.

und wir stellen das Problem: Wie kann man die Nullvariation von $f(\vartheta)$ in $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ [also $S(2\pi)$] durch $(a_k, \bar{a}_k)$ darstellen?

Es wird zuerst gezeigt: In einer Funktionenmenge $\mathfrak{E}$ von Funktionen $h(\vartheta)$, für welche die Bedingungen

$$\begin{cases} 0 \leqq h(\vartheta) \leqq 1 \\ \int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, d\vartheta = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$$

erfüllt sind, besteht stets die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, df(\vartheta) \leqq S(2\pi) + \eta(\varepsilon),$$

wobei $\lim_{\varepsilon=0} \eta(\varepsilon) = 0$ ist. Man kann jedoch eine Funktion $h(\vartheta)$ aus $\mathfrak{E}$ finden, so daß

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, df(\vartheta) \geqq S(2\pi) - \eta(\varepsilon)$$

ist. Diese Ergebnisse werden wir in Lemma 1 bzw. in Lemma 2 beweisen.

Die Funktion $h(\vartheta)$ kann aber immer als Realteil einer regulären Funktion $\varphi(z)$ auf $|z| = 1$ betrachtet werden. Wir wählen

$$\varphi(0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

und betrachten die konforme Abbildung für $|z| \leqq 1$

$$(3) \quad \begin{cases} \psi(z) = \dfrac{e^{\pi i \varphi(z)} - \cos\dfrac{\varepsilon}{2}}{2i \sin\dfrac{\varepsilon}{2}} \\ \text{oder} \\ \varphi(z) = \dfrac{\log\left\{\cos\dfrac{\varepsilon}{2} + 2i \sin\dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \psi(z)\right\}}{\pi i}, \end{cases}$$

wobei also

$$\begin{cases} \psi(0) = \frac{1}{2}, \\ \Re\, \psi(z) \geqq 0. \end{cases}$$

Es sei

$$\psi(z) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - i\bar{d}_k) z^k,$$

dann können nach einem Resultat von C. Carathéodory[3]) die Koeffizienten

$$d_1, \bar{d}_1, d_2, \bar{d}_2, \ldots, d_n, \bar{d}_n$$

[3]) Siehe Literaturverzeichnis (2).

auf eine und nur eine Weise durch die Formeln

$$\begin{cases} d_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\,\vartheta_j \\ \bar{d}_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin k\,\vartheta_j \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt werden, wobei die Bedingungen

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 - \lambda_0, \quad \lambda_0 \geqq 0 \\ \lambda_j \geqq 0, \quad 0 \leqq \vartheta_j \leqq 2\pi \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Aus (3) folgt, daß durch die Darstellung der n ersten Koeffizienten von $\psi(z)$ auch die Darstellung der n ersten Koeffizienten von $\varphi(z)$ bestimmt ist. Mit Anwendung der Lemmata 1 und 2 bekommt man dann eine Lösung des obengenannten Problems, welche durch den am Ende des § 3 stehenden Satz geliefert wird.

§ 1.

Es sei $f(\vartheta)$ eine monoton wachsende und beschränkte Funktion, wie in der Einleitung definiert. Hier wollen wir noch voraussetzen, daß $f(0) = 0$ ist, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Dann kann $f(\vartheta)$, wie oben angegeben, als Summe von zwei monoton wachsenden Funktionen

$$f(\vartheta) = T(\vartheta) + S(\vartheta) \tag{4}$$

dargestellt werden, von denen die erste totalstetig und die zweite von konstanter λ-Variation ist, und beide im Punkt $\vartheta = 0$ verschwinden. Es sei nun $f_1(\vartheta)$ die Ableitung von $T(\vartheta)$, welche in allen Punkten, in denen $T(\vartheta)$ differentiierbar und die Derivierte endlich ist, gleich der Derivierten von $T(\vartheta)$ ist, und die in allen übrigen Punkten des Definitionsbereiches von $T(\vartheta)$ verschwindet. Dann ist $T(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} f_1(\vartheta)\,d\vartheta$ und wir haben daher aus (4) die Darstellung

$$f(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} f_1(\vartheta)\,d\vartheta + S(\vartheta). \tag{5}$$

Hierbei ist also $f_1(\vartheta)$ eine nicht negative summierbare Funktion.

Lemma 1. Es sei ε eine fest vorgeschriebene positive, aber sonst willkürliche Zahl; dann kann man in der Funktionenmenge $\mathfrak{E}$, für welche die Bedingungen

$$\begin{cases} 0 \leqq h(\vartheta) \leqq 1 \\ \int_0^{2\pi} h(\vartheta)\,d\vartheta = \varepsilon \end{cases} \tag{6}$$

erfüllt sind, eine Funktion $h^*(\vartheta)$ finden, so daß

$$(7) \qquad \int_0^{2\pi} h^*(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta = \operatorname*{Max.}_{h(\vartheta) \in \mathfrak{E}} \int_0^{2\pi} h(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta = \eta(\varepsilon),$$

wobei

$$(8) \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \eta(\varepsilon) = 0$$

ist.

Beweis: Es sei p eine beliebige positive Zahl; man betrachte die Punktmenge $M(f_1(\vartheta) > p) = A(p)$ und es sei

$$(9) \qquad mA(p) = \int_{A(p)} d\vartheta = \omega(p).$$

Dann ist $\omega(p)$ eine monoton abnehmende Funktion, und aus der Summierbarkeit von $f_1(\vartheta)$ folgt

$$(10) \qquad \lim_{p = \infty} \omega(p) = 0.$$

Der vorgeschriebenen positiven Zahl ε kann man also eine bestimmte Zahl $p_0 = p_0(\varepsilon)$ zuordnen, so daß entweder

$$(11) \qquad mA(p_0) = \omega(p_0) = \varepsilon$$

existiert, oder die Beziehungen

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega(p_0 - 0) \geqq \varepsilon \\ \omega(p_0 + 0) \leqq \varepsilon \end{cases}$$

gleichzeitig bestehen, ohne daß die Punktmenge $A(p_0 - 0) - A(p_0 + 0$ vom Maße Null ist. Im zweiten Falle wähle ich irgendeine meßbare Teilmenge B der Punktmenge $A(p_0 - 0) - A(p_0 + 0)$ mit der Bedingung

$$(13) \qquad mB = \varepsilon - mA(p_0 + 0) = \varepsilon - \omega(p_0 + 0).$$

Ferner setze ich

$$(14) \qquad \mathfrak{A}(p_0) = \begin{cases} A(p_0) & \text{für den ersten Fall} \\ B + A(p_0 + 0) & \text{für den zweiten Fall,} \end{cases}$$

dann ist ersichtlich, daß

$$(15) \qquad m\mathfrak{A}(p_0) = \int_{\mathfrak{A}(p_0)} d\vartheta = \varepsilon$$

ist, und es ist stets

$$(16) \qquad f_1(\vartheta) \begin{cases} \geqq p_0 & \text{in } \mathfrak{A}(p_0) \\ \leqq p_0 & \text{in } I - \mathfrak{A}(p_0). \end{cases}$$

Für eine beliebige Funktion $h(\vartheta)$ aus $\mathfrak{E}$ [vgl. (6)] ist also wegen (16),

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta \leqq \int_{\mathfrak{A}(p_0)} h(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta + p_0 \Big(\int_I h(\vartheta)\, d\vartheta - \int_{\mathfrak{A}(p_0)} h(\vartheta)\, d\vartheta \Big)$$

$$= \int_{\mathfrak{A}(p_0)} h(\vartheta) \big(f_1(\vartheta) - p_0\big)\, d\vartheta + p_0 \int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Mit Benutzung der Bedingung (6) und (16) erhalte ich daraus

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta \leqq \int_{\mathfrak{A}(p_0)} f_1(\vartheta)\, d\vartheta - p_0 \int_{\mathfrak{A}(p_0)} d\vartheta + p_0 \varepsilon.$$

Mit Berücksichtigung von (15) folgt dann sogleich

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta \leqq \int_{\mathfrak{A}(p_0)} f_1(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{17}$$

Bezeichnet man nun mit $h^*(\vartheta)$ die Funktion, die in jedem Punkt von $\mathfrak{A}(p_0)$ gleich Eins und in $I - \mathfrak{A}(p_0)$ gleich Null ist, dann ist

$$\int_0^{2\pi} h^*(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{\mathfrak{A}(p_0)} f_1(\vartheta)\, d\vartheta = \eta(\varepsilon)$$

eine von ε abhängige Funktion. Aus (17) folgt also dann das gewünschte Resultat (7). Die Eigenschaft (8) bekommt man leicht aus (10), denn danach folgt

$$\lim_{\varepsilon = 0} m\,\mathfrak{A}(p_0(\varepsilon)) = 0$$

und deshalb ist auch

$$\lim_{\varepsilon = 0} \eta(\varepsilon) = 0.$$

Hieraus folgt sofort, daß für eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{E}$ die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, df(\vartheta) \leqq S(2\pi) + \eta(\varepsilon) \tag{18}$$

besteht, da das Stieltjessche Integral

$$\int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, df(\vartheta) = \int_0^{2\pi} h(\vartheta) f_1(\vartheta)\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} h(\vartheta)\, dS(\vartheta) \tag{19}$$

ist.

§ 2.

Nach (5) und der Definition von $S(\vartheta)$ gibt es eine Nullmenge N, so daß für jede Umgebung U von N

$$\int_U df(\vartheta) \geqq S(2\pi) \tag{20}$$

ist. Ich nehme insbesondere U so, daß $mU = \varepsilon$; es sei

$$U = \delta_1 + \delta_2 + \cdots,$$

wobei die δ_k sämtlich Teilintervalle von I und paarweise fremd sind. Wegen (20) und der Beschränktheit von $f(\vartheta)$ kann man also eine aus endlich vielen Intervallen bestehende Punktmenge $\Delta = \sum_{j=1}^{l} \delta_{k_j}$ bestimmen, so daß

$$\int_{\Delta} df(\vartheta) \geqq S(2\pi) - \eta(\varepsilon) \tag{21}$$

ist, wobei $\eta(\varepsilon)$ die in § 1 definierte Funktion bedeutet; es ist $m\Delta \leqq \varepsilon$. Gegebenenfalls füge ich nun noch ein Intervall δ_0 hinzu, so daß die Punktmenge

$$\delta_0 + \sum_{j=1}^{l} \delta_{k_j} = \Delta^*$$

das Maß $m\Delta^* = \varepsilon$ besitzt. Wenn ich die Funktion, welche in Δ^* gleich Eins und in $I - \Delta^*$ gleich Null ist, mit $g(\vartheta)$ bezeichne, dann folgt aus (21) und mit Berücksichtigung von (18)

$$S(2\pi) - \eta(\varepsilon) \leqq \int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, df(\vartheta) \leqq S(2\pi) + \eta(\varepsilon). \tag{22}$$

Es seien nun $b_0, b_1, \bar{b}_1, b_2, \bar{b}_2, \ldots, b_n, \bar{b}_n, \ldots$ die zugehörigen Fourierschen Koeffizienten von $g(\vartheta)$, dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{n=\infty} g_n(\vartheta) &= \lim_{n=\infty} \{b_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos k\vartheta + \bar{b}_k \sin k\vartheta)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{g(\vartheta - 0) + g(\vartheta + 0)\},\end{aligned}$$

und daher ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} g_n(\vartheta)\, df(\vartheta) = \int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, df(\vartheta).$$

Man kann also $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so bestimmen, so daß

$$\left| \int_0^{2\pi} g_n(\vartheta)\, df(\vartheta) - \int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, df(\vartheta) \right| < \eta(\varepsilon) \qquad \text{für } n \geqq n_0$$

ist. Durch Vergleich mit (22) folgt also

$$S(2\pi) - 2\eta(\varepsilon) < \int_0^{2\pi} g_n(\vartheta)\, df(\vartheta) < S(2\pi) + 2\eta(\varepsilon), \quad n \geqq n_0. \tag{23}$$

Damit haben wir das

Lemma 2. Es gibt mindestens ein trigonometrisches Polynom

$$g_n(\vartheta) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos k\vartheta + \bar{b}_k \sin k\vartheta), \tag{24}$$

so daß

$$S(2\pi) - 2\eta(\varepsilon) < \int_0^{2\pi} g_n(\vartheta)\, df(\vartheta) < S(2\pi) + 2\eta(\varepsilon);$$

hierbei kann man zu $g_n(\vartheta)$ einen Rest

$$R_n(\vartheta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (b_k \cos k\vartheta + \bar{b}_k \sin k\vartheta) \tag{25}$$

so zuordnen, daß die Beziehungen

$$\begin{cases} 0 \leqq g_n(\vartheta) + R_n(\vartheta) \leqq 1, \\ \int_0^{2\pi} g_n(\vartheta)\, d\vartheta = \varepsilon \end{cases} \tag{26}$$

bestehen.

Man beachte noch folgende Überlegung: Wenn $g_n(\vartheta)$ und $R_n(\vartheta)$ den Bedingungen (25) und (26) genügen, dann haben die Fejérschen Mittel

$$\bar{g}_\nu(\vartheta) = \frac{g_0(\vartheta) + g_1(\vartheta) + \cdots + g_\nu(\vartheta)}{\nu + 1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die Eigenschaften:

$$\begin{cases} 0 \leqq \bar{g}_\nu(\vartheta) \leqq 1, \\ \int_0^{2\pi} \bar{g}_\nu(\vartheta)\, d\vartheta = \varepsilon. \end{cases}$$

Und wenn $g_n(\vartheta)$ der Ungleichung (23) genügt, so gilt dasselbe für $\bar{g}_\nu(\vartheta)$, wenn wir den Index ν von vornherein genügend groß gewählt haben.

§ 3.

Es sei $\varphi(z)$ eine reguläre analytische Funktion in $|z| \leqq 1$ mit den Bedingungen

$$\begin{cases} \varphi(0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}, \\ 0 \leqq \Re\, \varphi(z) \leqq 1, \end{cases} \tag{27}$$

dann ist

$$\psi(z) = \frac{e^{\pi i \varphi(z)} - \cos\frac{\varepsilon}{2}}{2i \sin\frac{\varepsilon}{2}} \tag{28}$$

auch regulär in $|z| \leqq 1$ mit den Bedingungen

$$\begin{cases} \psi(0) = \frac{1}{2}, \\ \Re\, \psi(z) = e^{\pi \Re(i\varphi(z))} \dfrac{\sin\{\pi \cdot \Re(\varphi(z))\}}{2 \sin\frac{\varepsilon}{2}} \geqq 0, \end{cases} \tag{29}$$

wenn wir $0 < \varepsilon < 2\pi$ wählen.

Wenn umgekehrt $\psi(z)$ die Eigenschaften (29) besitzt, dann besitzt

$$\varphi(z) = \frac{\log\left(\cos\frac{\varepsilon}{2} + 2i\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\psi(z)\right)}{\pi i} \tag{30}$$

die Eigenschaften (27).

Es sei nun

$$\varphi(z) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k z^k \qquad \gamma_k = c_k - i\bar{c}_k \tag{31}$$

und

$$\psi(z) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k z^k, \qquad \delta_k = d_k - i\bar{d}_k \tag{32}$$

dann sind die ersten n Koeffizienten von $\varphi(z)$ nur abhängig von den ersten n Koeffizienten von $\psi(z)$.

Da

$$\Re\,\psi(z) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\,(d_k\cos k\vartheta + \bar{d}_k\sin k\vartheta) \tag{33}$$

regulär in $r < 1$ und $\Re\,\psi(0) = \frac{1}{2}$ ist, folgt nach einem Resultat von C. Carathéodory [4]), daß für jedes n der Punkt des $2n$-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten

$$d_1, \bar{d}_1, d_2, \bar{d}_2, \ldots, d_n, \bar{d}_n$$

notwendig im Innern oder auf der Begrenzung des kleinsten konvexen Körpers K_{2n} liegt, der die geschlossene Kurve enthält, deren Koordinaten in Parameterdarstellung

$$\cos\vartheta,\quad \sin\vartheta,\quad \ldots,\quad \cos n\vartheta,\quad \sin n\vartheta$$

lauten. Seien jetzt

$$d_1, \bar{d}_1, d_2, \bar{d}_2, \ldots, d_n, \bar{d}_n$$

die Koordinaten eines beliebigen Punktes P im Innern oder auf der Begrenzung von K_{2n}, dann kann P auf eine und nur eine Weise durch die Formeln [4])

$$\begin{cases} d_k = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos k\vartheta_j \\ \bar{d}_k = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sin k\vartheta_j \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

dargestellt werden, wobei die Bedingungen

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 - \lambda_0, \quad \lambda_0 \geqq 0 \\ \lambda_j \geqq 0, \quad 0 \leqq \vartheta_j \leqq 2\pi \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

[4]) Siehe Anm. 3).

erfüllt sind. Umgekehrt: Wenn ich irgendein System von Zahlen (λ_j, ϑ_j) betrachte, das die Bedingungen (35) erfüllt, dann stellen die durch (34) definierten Größen

$$d_1, \bar{d}_1, d_2, \bar{d}_2, \ldots, d_n, \bar{d}_n$$

immer die Koordinaten eines Punktes im Innern oder auf der Begrenzung von K_{2n} dar. Den Bereich, in welchem die

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n \tag{36}$$

unter den Bedingungen (35) variieren, bezeichne ich mit $\mathfrak{B}_{2n+1}$. Wenn ich nun (36) als die Koordinaten eines Punktes im $2n+1$-dimensionalen Raum betrachte, dann ist $\mathfrak{B}_{2n+1}$ eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge.

Man beachte noch folgendes: Die Funktion

$$\psi^*(z) = \frac{1}{2}\left\{\lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{e^{i\vartheta_j} + z}{e^{i\vartheta_j} - z}\right\} \tag{37}$$

besitzt immer die Eigenschaften

$$\begin{cases} \psi^*(0) = \frac{1}{2} \\ \Re\, \psi^*(z) \geqq 0, \end{cases} \tag{38}$$

wenn (λ_j, ϑ_j) im $\mathfrak{B}_{2n+1}$ variieren.

Wir halten jetzt n fest, und es sei

$$\psi(z) = \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k z^k, \quad \delta_k = d_k - i\bar{d}_k$$

eine Funktion, welche die Eigenschaften (29) besitzt und deren erste n Koeffizienten durch die Formeln (34) dargestellt werden. Dann besitzt die durch (37) definierte Funktion $\psi^*(z)$ dieselben ersten n Koeffizienten wie $\psi(z)$, und deshalb hat

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \frac{\log\left(\cos\frac{\varepsilon}{2} + 2i\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\psi^*(z)\right)}{\pi i} \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^* z^k \end{aligned} \tag{39}$$

dieselben ersten n Koeffizienten wie $\varphi(z)$ und genügt den Bedingungen

$$\begin{cases} \varphi^*(0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}, \\ 0 \leqq \Re\, \varphi^*(z) \leqq 1. \end{cases} \tag{40}$$

Ferner setze ich

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \cos\frac{\varepsilon}{2} + 2i\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\psi^*(z) \\ &= \cos\frac{\varepsilon}{2} + i\sin\frac{\varepsilon}{2}\left\{1 + 2z\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e^{-i\vartheta_j} + \cdots + 2z^k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e^{-ki\vartheta_j} + \cdots\right\} \end{aligned} \tag{41}$$

und

$$(42)\qquad \begin{cases} \Lambda(0) = e^{i\frac{\varepsilon}{2}} = \varrho_0 \\ \Lambda^{(k)}(0) = 2 \cdot k!\, i \sin\frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-k i \vartheta_j} = \varrho_k \\ \pi i\, \varphi^{*(k)}(0) = k!\, \pi i\, \gamma_k^* = \tau_k, \end{cases} \Big\} (k = 1, 2, \ldots),$$

dann ist nach (39) und (41)

$$(43)\qquad e^{\pi i \varphi^*(z)} = \Lambda(z).$$

Durch sukzessive Differentiation bekommt man die Beziehungen

$$(44)\qquad \varrho_0 \tau_k + \binom{k-1}{1} \varrho_1 \tau_{k-1} + \binom{k-1}{2} \varrho_2 \tau_{k-2} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \varrho_{k-1} \tau_1 = \varrho_k.$$

Man kann also aus (42) und (44) alle Koeffizienten γ_k^* von $\varphi^*(z)$ als Funktionen von λ_j, ϑ_j darstellen. Es sei nun

$$(45)\qquad \gamma_k^* = u_k(\lambda_j, \vartheta_j) + i v_k(\lambda_j, \vartheta_j),$$

dann sind u_k und v_k reelle stetige Funktionen der Variablen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$.

Setzt man jetzt

$$\Re\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{i k \vartheta}\right\} = \Re\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* e^{i k \vartheta}\right\} = P_n(\vartheta)$$

und

$$\Re\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^* e^{i k \vartheta}\right\} = r_n^*(\vartheta),$$

dann folgt wegen

$$0 \leqq P_n(\vartheta) + r_n^*(\vartheta) \leqq 1$$

nach dem Schluß von § 2, daß

$$(46)\qquad \overline{P}_n(\vartheta) = \frac{P_0(\vartheta) + P_1(\vartheta) + \cdots + P_n(\vartheta)}{n+1}$$

ein trigonometrisches Polynom mit den Bedingungen

$$(47)\qquad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \overline{P}_n(\vartheta)\, d\vartheta = \varepsilon \\ 0 \leqq \overline{P}_n(\vartheta) \leqq 1 \end{cases}$$

ist. Aus der Definition von $\overline{P}_n(\vartheta)$ und nach (45) folgt also

$$(48)\qquad \overline{P}_n(\vartheta) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{n-k+1}{n+1} \{u_k(\lambda_j, \vartheta_j) \cos k\vartheta - v_k(\lambda_j, \vartheta_j) \sin k\vartheta\}$$

$$= \overline{P}_n(\varepsilon, \lambda_j, \vartheta_j\, \vartheta).$$

Ferner besitze die gegebene monoton wachsende und beschränkte Funktion $f(\vartheta)$ die Entwicklung

$$f(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + \bar{a}_k \sin k\vartheta) \tag{49}$$

mit $f(0) = 0$ und ihre Variation $f(2\pi) - f(0) = 2\pi\sigma$. Dann existiert nach einem Resultat von C. Carathéodory fast überall[5])

$$f(\vartheta) \lim_{r=1} \int_0^{\vartheta} [\sigma + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \{(2\sigma + k\bar{a}_k)\cos k\vartheta - k a_k \sin k\vartheta\}]\, d\vartheta. \tag{50}$$

Daher bekommen wir

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos k\vartheta\, df(\vartheta) = \pi(2\sigma + k\bar{a}_k) \\ \int_0^{2\pi} \sin k\vartheta\, df(\vartheta) = -\pi k a_k. \end{cases} \tag{51}$$

und es ist also das Stieltjessche Integral

$$\int_0^{2\pi} \bar{P}_n(\vartheta)\, df(\vartheta) = \varepsilon\sigma + \tag{52}$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \{u_k(\lambda_j, \vartheta_j)(2\sigma + k\bar{a}_k) + v_k(\lambda_j, \vartheta_j) k a_k\},$$

was eine stetige Funktion der Variablen

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \ldots,\ \vartheta_n$$

ist. Wenn ich also (λ_j, ϑ_j) in dem beschränkten und abgeschlossenen Variabilitätsbereich $\mathfrak{B}_{2n+1}$ variieren lasse, so existiert wenigstens ein Punkt $(\lambda_j^*, \vartheta_j^*)$ von $\mathfrak{B}_{2n+1}$, so daß (52) seinen maximalen Wert erreicht. D. h. es gibt ein Polynom

$$\bar{P}_n^*(\vartheta) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \{u_k(\lambda_j^*, \vartheta_j^*)\cos k\vartheta - v_k(\lambda_j^*, \vartheta_j^*)\sin k\vartheta\}, \tag{53}$$

für welches die Beziehung

$$\operatorname*{Max.}_{(\lambda_j, \vartheta_j) \in \mathfrak{B}_{2n+1}} \int_0^{2\pi} \bar{P}_n(\varepsilon, \lambda_j, \vartheta_j, \vartheta)\, df(\vartheta) = \int_0^{2\pi} \bar{P}_n^*(\varepsilon, \vartheta)\, df(\vartheta) = M_n(\varepsilon) \tag{54}$$

besteht. Diese Tatsache ist gültig für beliebige n. Man sieht leicht, daß stets

$$M_n(\varepsilon) \leqq M_{n+1}(\varepsilon) \leqq f(2\pi) - f(0)$$

[5]) Siehe Literaturverzeichnis (3), § 12.

sein muß, denn die Punktmenge $\mathfrak{B}_{2n+1}$ ist, wenn man sie im $(2n+3)$-dimensionalen Raum betrachtet, eine Teilmenge von $\mathfrak{B}_{2n+3}$. Es existiert also zunächst

$$\lim_{n=\infty} M_n(\varepsilon).$$

Nach Lemma 1 ist

$$\lim_{n=\infty} M_n(\varepsilon) \leqq S(2\pi) + \eta(\varepsilon).$$

Nach Lemma 2 und aus der letzten Bemerkung in § 2 folgt aber auch

$$\lim_{n=\infty} M_n(\varepsilon) \geqq S(2\pi) - 2\eta(\varepsilon).$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{n=\infty} M_n(\varepsilon) = S(2\pi). \tag{55}$$

Wir haben also den

Satz 1. *Es sei*

$$f(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + \bar{a}_k \sin k\vartheta)$$

eine monoton wachsende und beschränkte Funktion im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ *mit* $f(0) = 0$ *und* $f(2\pi) - f(0) = 2\pi\sigma$; *weiter bestehe die* Lebesguesche *Zerlegung*

$$f(\vartheta) = T(\vartheta) + S(\vartheta),$$

wobei $T(\vartheta)$ *totalstetig ist und* $S(\vartheta)$ *die singuläre Funktion bedeutet. Es seien ferner die Funktionen*

$$u_k(\lambda_j, \vartheta_j), \quad v_k(\lambda_j, \vartheta_j)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{cases} e^{i\frac{\varepsilon}{2}} = \varrho_0 \\ 2 \cdot k!\, i \sin\frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-ki\vartheta_j} = \varrho_k \\ k!\,\pi i \{u_k(\lambda_j, \vartheta_j) + i\, v_k(\lambda_j, \vartheta_j)\} = \tau_k \end{cases}$$

aus den Bedingungen

$$\varrho_0 \tau_k + \binom{k-1}{1} \varrho_1 \tau_{k-1} + \binom{k-1}{2} \varrho_2 \tau_{k-2} + \ldots + \binom{k-1}{k-1} \varrho_{k-1} \tau_1 = \varrho_k$$

zu bestimmen; die Variablen

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \quad \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$$

seien auf den Bereich

$$\mathfrak{B}_{2n+1}: \begin{cases} \lambda_j \geqq 0, & \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1 \\ 0 \leqq \vartheta_j \leqq 2\pi & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

beschränkt. Dann besteht die Beziehung

$$\mathfrak{f}(2\pi) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{n=\infty} \operatorname*{Max.}_{(\lambda_j, \vartheta_j) \in \mathfrak{B}_{2n+1}} \left\{ \varepsilon\sigma + \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \right.$$

$$\left. \{u_k(\lambda_j, \vartheta_j)(2\sigma + k\bar{a}_k) + v_k(\lambda_j, \vartheta_j) k a_k\} \right\}.$$

§ 4.

Man bekommt mit denselben Überlegungen noch den folgenden

Satz 2. *Mit den Bezeichnungen von Satz* 1 *ist für* $0 \leqq \xi \leqq 2\pi$:

$$S(\xi) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{n=\infty} \operatorname*{Max.}_{(\lambda_j, \vartheta_j) \in \mathfrak{B}_{2n+1}} \int_0^{\xi} \overline{P}_n(\varepsilon, \lambda_j, \vartheta_j, \vartheta)\, d f(\vartheta),$$

wobei

$$\overline{P}_n(\varepsilon, \lambda_j, \vartheta_j, \vartheta) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n+1} \{u_k(\lambda_j, \vartheta_j) \cos k\vartheta - v_k(\lambda_j, \vartheta_j \sin k\vartheta\}$$

ist.

Literaturverzeichnis.

(1) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. Math. Annalen **64** (1907), S. 95–115.

(2) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rendic. del Circ. matem. di Palermo **32** (1911), S. 193–217.

(3) C. Carathéodory und L. Fejér, Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz. Rendic. del Circ. matem. di Palermo **32** (1911), S. 218–239.

(4) G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis. Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. zu Leipzig, math.-phys. Kl., **63** (1911), S. 501–511.

(5) C. Carathéodory, Über die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl., **30** (1920), S. 559–573.

(6) A. Beurling, Ensembles Exceptionnels. Acta Math. **72** (1940), S. 1–13.

(Eingegangen am 18. Januar 1941.)

Über die Abzählung der reellen Wurzeln von algebraischen Gleichungen.

Von

Stephan Lipka in Szeged (Ungarn).

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich einen neuen Beweis des folgenden wohlbekannten Satzes gegeben: Hat eine algebraische Gleichung nur reelle Wurzeln, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten genau gleich der Anzahl der positiven Wurzeln. Mit Anwendung der Methode jener Arbeit werde ich in den folgenden Untersuchungen solche Sätze herleiten, die Verallgemeinerungen des vorher erwähnten Satzes sind. Es wird in den folgenden Betrachtungen ein Satz eine wichtige Rolle spielen, der sich auf die sogenannten variationsvermindernden linearen Transformationen bezieht und folgendermaßen lautet[2]): Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Wir betrachten die reelle lineare Transformation

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \cdots + c_{1n}a_n \\ b_2 &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \cdots + c_{2n}a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m &= c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + \cdots + c_{mn}a_n. \end{aligned}$$

Wenn alle Minoren sämtlicher Ordnung der Koeffizientenmatrix $||c_{ik}||$ dieser linearen Transformation nichtnegativ sind, dann ist die Transformation variationsvermindernd, d. h. die Anzahl der Zeichenwechsel der Folge $b_1, b_2, \ldots, b_m$ übertrifft diejenige der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie.

§ 1.

Ein Lemma und Hilfssatz.

Lemma. Ist p eine positive Zahl und sind die Koeffizienten des Polynoms $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ reell, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge des Polynoms $\varphi(x) = (x + p)f(x)$ nicht größer als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $f(x)$.

[1]) St. Lipka, Über die Descartessche Zeichenregel. Acta litt. ac. Scient. VII (1935), S. 177–185.

[2]) I. Schoenberg, Über variationsvermindernde lineare Transformationen. Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 321–328.

Beweis. Dieses bekannte Lemma ist eine unmittelbare Folge des in der Einleitung erwähnten Satzes über variationsvermindernde Transformationen. Es sei nämlich $\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n+1} x^{n+1}$, dann ist $b_k = a_{k-1} + p a_k$, und die Matrix der Transformation hat die folgende Gestalt

$$\begin{Vmatrix} p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & p & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & p \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Man sieht leicht, daß jede Determinante, die in dieser Matrix vorkommt, einem der folgenden drei Werte: 0, 1, p^k (k ist positiv ganz) gleich ist.

Hilfssatz. *$f(x)$ sei ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten. λ bedeute eine reelle positive Zahl. Man bilde das Polynom $(x^2 + x + \lambda) f(x) = \varphi(x)$. Genügt die Zahl λ der Bedingung*

$$\frac{1}{4} \leqq \lambda \leqq \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n+2}}{4}, \tag{1}$$

so ist die Anzahl der Zeichenwechsel des Polynoms $\varphi(x)$ nicht größer als die Anzahl der Zeichenwechsel von $f(x)$.

Beweis. Wird

$$\varphi(x) = (x^2 + x + \lambda) f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n+2} x^{n+2}$$

gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} b_0 &= \lambda a_0 \\ b_1 &= a_0 + \lambda a_1 \\ b_2 &= a_0 + a_1 + \lambda a_2 \\ b_3 &= a_1 + a_2 + \lambda a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n+1} &= a_{n-1} + a_n \\ b_{n+2} &= a_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Zeigt man auch hier, daß alle die in der Matrix von (2) vorkommenden Determinanten nichtnegativ sind, so folgt (nach dem in der Einleitung erwähnten Satz) die Richtigkeit des Hilfssatzes. Die Matrix von (2) enthält

Determinanten, deren Werte gleich 1, 0 oder λ^k (k ist positiv ganz) sind. Es kommen noch in der Matrix Determinanten vor, deren Gestalt

$$(3) \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ist, wobei k die Ordnung von Δ_k bedeutet. Wir wollen den Wert von Δ_k berechnen und führen dazu den Winkel ψ ein, der die Bedingungen

$$(4) \qquad \operatorname{tg} \psi = \sqrt{4\lambda - 1},$$

[nach (1) $4\lambda - 1 \geqq 0$ gilt]

$$0 \leqq \psi < \frac{\pi}{2}$$

erfüllt. Dann gibt die Formel

$$(5) \qquad \Delta_k = \lambda^{\frac{k}{2}} \frac{\sin (k+1)\psi}{\sin \psi} \qquad (\sqrt{\lambda} > 0)$$

den Wert der Determinante (3) an. Die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich leicht mit Hilfe des Multiplikationssatzes der Determinanten. Wir wenden aber der Kürze halber Induktion an. Da nach (4)

$$\cos \psi = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

ist, so folgt die Richtigkeit von (5) sogleich für $k = 1$. Wir setzen nun die Richtigkeit von (5) für die Determinanten (3) voraus, deren Ordnung kleiner als k ist. Entwickelt man die Determinante Δ_k nach der letzten Zeile, so gewinnt man die Formel

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - \lambda \Delta_{k-2}.$$

Aus dieser Formel folgt, da nach voriger Voraussetzung $\Delta_{k-1} = \lambda^{\frac{k-1}{2}} \frac{\sin k\psi}{\sin \psi}$ und $\Delta_{k-2} = \lambda^{\frac{k-2}{2}} \frac{\sin (k-1)\psi}{\sin \psi}$ gilt,

$$\Delta_k = \lambda^{\frac{k}{2}} \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}} \sin k\psi - \sin (k-1)\psi}{\sin \psi},$$

und hieraus folgt endlich, da $\lambda^{-\frac{1}{2}} = 2 \cos \psi$ ist, die Richtigkeit von (5) für jedes k.

Zum Beweis des Hilfssatzes braucht man nur noch zu zeigen, daß alle in der Matrix von (2) vorkommenden Determinanten Δ_k nicht negativ sind. Da für die Ordnung von Δ_k die Beschränkung $k \leqq n + 1$ gilt, so folgt nach (5),

daß $\Delta_k \geqq 0$ ist, wenn $0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{n+2}$ ausfällt. Dies entspricht aber, da nach (4) $\lambda = \frac{1+\operatorname{tg}^2\psi}{4}$ ist, eben der Voraussetzung (1).

§ 2.

Erweiterung der Descartesschen Vorzeichenregel.

Satz I. *Es sei*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

eine Gleichung n-ten Grades mit reellen Koeffizienten. Liegen alle komplexen nichtreellen Wurzeln der Gleichung im Winkelraum

$$\pi - \frac{\pi}{n} \leqq \arg x \leqq \pi + \frac{\pi}{n}, \tag{6}$$

so ist die Anzahl der positiven Wurzeln genau gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $f(x)$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x),$$

wobei

$$\varphi_1(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - p_i), \quad p_i > 0,$$

$$\varphi_2(x) = \prod_{i=k+1}^{m} (x + q_i), \quad q_i > 0$$

und

$$\varphi_3(x) = \prod_{\nu=m+1}^{n} (x - z_\nu)(x - \bar{z}_\nu) = \prod_{\nu=m+1}^{n} \{(x - \xi_\nu)^2 + \eta_\nu^2\}, \quad z_\nu = \xi_\nu + i\eta_\nu$$

ist. Das Polynom $\varphi_1(x)$ hat — wie das Polynom $f(x) - k$ positive Wurzeln, und die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $\varphi_1(x)$ ist genau gleich k. Durch wiederholte Anwendung des vorigen Lemmas (§ 1) folgt nun, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ nicht größer als die von $\varphi_1(x)$ ist, also nicht größer als k. Andererseits ist diese Anzahl nach der Descartesschen Regel mindestens k; daher ist die Anzahl der Zeichenwechsel des Polynoms

$$\varphi_1(x)\varphi_2(x) = \varphi(x)$$

gleich k. Multipliziert man nun das Polynom $\varphi(x)$ mit einem Faktor zweiten Grades von $\varphi_3(x)$, so gewinnt man

$$\Phi(x) = \varphi(x)(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2). \tag{7}$$

Wir wollen zeigen, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $\Phi(x)$ nicht größer als die von $\varphi(x)$ ist. Da nach (6) die Wurzel $\xi + i\eta$ in die Halbebene $R(z) < 0$ fällt, so ändert sich die Anzahl der Zeichenwechsel in den Polynomen $\varphi(x)$

und $\Phi(x)$ nicht, wenn man statt x den Wert $-2\xi x$ einsetzt; dividiert man noch mit $4\xi^2$, so gewinnt man aus (7) das Polynom

$$\Phi^*(x) = \varphi^*(x)(x^2 + x + \lambda),$$

wobei

$$\lambda = \frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{2\xi}\right)^2 \tag{8}$$

ist. Da der Grad des Polynoms $\varphi^*(x)$ höchstens $n-2$ ist, ferner nach (6) $\left|\frac{\eta}{\xi}\right| \leqq \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ gilt, so folgt nach (8) laut des Hilfssatzes, daß die Anzahl der Zeichenwechsel des Polynoms (7) nicht größer ist als die von $\varphi(x)$. Multiplizieren wir also das Polynom $\varphi(x)$ nacheinander mit den Faktoren zweiten Grades von $\varphi_3(x)$, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel des gewonnenen Polynoms $\varphi(x) \cdot \varphi_3(x) = f(x)$ nicht größer als die von $\varphi(x)$, also nicht größer als k. Nach der Descartesschen Regel folgt endlich, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $f(x)$ genau gleich k ist, w. z. b. w.

Bemerkung. Man kann den Winkelraum (6) im Satz I nicht vergrößern. Die Richtigkeit dieser Bemerkung zeigt das Beispiel

$$f(x) = (x - p)(x^2 + x + \lambda) = 0, \quad p > 0, \quad \lambda > 0.$$

Liegt das konjugiert-komplexe Wurzelpaar dieser Gleichung außerhalb des Winkelraumes

$$\frac{2\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \frac{4\pi}{3},$$

d. h. ist $\lambda > 1$, ist außerdem

$$1 < p < \lambda,$$

so ist die Anzahl der Zeichenwechsel gleich 3.

Eine unmittelbare Folge der Descartesschen Regel ist der wohlbekannte Satz: Ist die Anzahl der Zeichenwechsel des reellen Polynoms $f(x)$ gleich 1, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln von $f(x)$ auch gleich 1. Die Umkehrung dieses Satzes ist offenbar nicht richtig; aber es gilt der folgende

Satz II. *Hat die Gleichung $f(x) = 0$ genau eine positive Wurzel und liegen die komplexen nichtreellen Wurzeln alle im Winkelraum*

$$\frac{2\pi}{3} \leqq \arg x \leqq \frac{4\pi}{3}, \tag{9}$$

so ist die Anzahl der Zeichenwechsel von $f(x)$ genau gleich 1.

Beweis. Es sei $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, wo das Polynom $\varphi(x)$ lauter reelle Wurżeln hat. Ist nun

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k,$$

so ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $a_0, a_1, \ldots, a_k$ genau gleich 1, da die Gleichung $f(x) = 0$ genau eine positive Wurzel hat. Wir multiplizieren

nun das Polynom $\varphi(x)$ mit einem Faktor zweiten Grades $(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2)$ von $\psi(x)$, wo $\xi \pm i\eta$ ein konjugiert-komplexes Wurzelpaar von $f(x)$ ist. Setzen wir statt x den Wert $-2\xi x$ ein (wie beim Beweis des Satzes I), so ergibt sich das Produkt

$$\Phi(x) = 4\xi^2 \varphi(-2\xi x)(x^2 + x + \lambda) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k+2} x^{k+2}.$$

Tritt nun der einzige Vorzeichenwechsel in der Folge (a_i) zwischen a_ν und $a_{\nu+1}$ auf, so folgt nach den Formeln (2), daß in der Folge (b_i) für $i < \nu$

$$\operatorname{sgn} b_i = \operatorname{sgn} b_\nu,$$

für $i > \nu + 3$ aber

$$\operatorname{sgn} b_i = \operatorname{sgn} b_{\nu+3}$$

ist. Man braucht also nur das Stück

$$b_\nu,\ b_{\nu+1},\ b_{\nu+2},\ b_{\nu+3}$$

der Folge (b_i) zu betrachten. Statt $b_\nu = a_{\nu-2} + a_{\nu-1} + \lambda a_\nu$ können wir $b_\nu^* = a_{\nu-2} + a_{\nu-1}$ nehmen, da $\operatorname{sgn} b_\nu = \operatorname{sgn} b_\nu^*$ ist. Da $\operatorname{sgn} b_{\nu+3} = \operatorname{sgn} a_{\nu+2}$ ist, so dürfen wir statt $b_{\nu+3}$ den Koeffizienten $b_{\nu+3}^* = a_{\nu+2}$ nehmen. Betrachten wir dann die Werte $b_\nu^*, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, b_{\nu+3}^*$ als lineare Ausdrücke der Koeffizienten $a_{\nu-2}, a_{\nu-1}, a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}$ [nach den Formeln (2)], so wird die Matrix dieser Transformation die Gestalt

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

haben. Jede Determinante dieser Matrix ist nichtnegativ, wenn $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0$, d. h. $\lambda \leqq 1$ gilt. Die letzte Bedingung ist aber sicher erfüllt, da $\lambda = \frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{2\xi}\right)^2$ und nach (9) $\left|\frac{\eta}{\xi}\right| \leqq \sqrt{3}$ ist.

Damit haben wir bewiesen, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $\Phi(x)$ nicht größer als 1 ist. Mit Wiederholung dieser Überlegung folgt endlich (wie beim Beweis des Satzes I), daß die Koeffizientenfolge von $f(x)$ genau einen Zeichenwechsel hat.

Die Verallgemeinerung des Satzes II lautet folgendermaßen:

Satz II*. *Hat eine Gleichung mit reellen Koeffizienten genau k positive Wurzeln und liegen alle komplexen nichtreellen Wurzeln im Winkelraum*

$$\pi - \frac{\pi}{k+2} \leqq \arg x \leqq \pi + \frac{\pi}{k+2},$$

so ist die Anzahl der Zeichenwechsel auch gleich k.

Satz III. *Die Gleichung $f(x) = 0$ habe ein konjugiert komplexes Wurzelpaar $\xi \pm i\eta$ und die übrigen Wurzeln seien alle reell. Die positiven Gleichungswurzeln seien: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Fällt nun $\xi \pm i\eta$ in die Halbebene $R(z) < 0$, gilt außerdem*

$$|\xi| > 2\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_k), \tag{10}$$

so ist die Anzahl der positiven Gleichungswurzeln genau gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $f(x)$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)(x^2 - 2\,\xi\,x + \xi^2 + \eta^2),$$

wobei $\varphi_1(x)$ lauter positive Wurzeln und $\varphi_2(x)$ lauter negative Wurzeln hat. Ist nun

$$\varphi_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k,$$

so haben die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_k$ abwechselnde Vorzeichen, und die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge (a_i) ist gleich der Anzahl der positiven Wurzeln von $f(x)$, d. h. gleich k. Man kann also voraussetzen, daß

$$a_k > 0, \quad a_{k-1} < 0, \quad a_{k-2} > 0, \quad \ldots \tag{11}$$

ist. Wir setzen nun statt x den Wert $2|\xi|x$ ein und betrachten statt $\varphi_1(x)\,(x^2 - 2\,\xi\,x + \xi^2 + \eta^2)$ das Polynom

$$\varphi_1(2\,|\xi|\,x)\,(x^2 + x + \lambda) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k+2} x^{k+2}, \quad \lambda = \frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{2\,\xi}\right)^2.$$

Da

$$b_{k+1} = (2\,|\xi|)^{k-1} a_{k-1} + (2\,|\xi|)^k a_k = (2\,|\xi|)^{k-1} a_k \Big(-\sum_{i=1}^{k} p_i + 2\,|\xi|\Big)$$

ist, so folgt nach (10) und (11), daß $b_{k+1} > 0$ ist. Da $a_k > 0$, $a_{k-2} > 0$, ferner nach $\lambda \geqq \frac{1}{4}$ und (10) $2\,\lambda\,|\xi| - \sum_{i=1}^{k} p_i \geqq 0$ gelten, so folgt aus der Formel

$$\begin{aligned} b_k &= (2\,|\xi|)^{k-2} a_{k-2} + (2\,|\xi|)^{k-1} a_{k-1} + (2\,|\xi|)^k\,\lambda a_k \\ &= (2\,|\xi|)^{k-2}(a_{k-2} + 2\,|\xi|\,a_{k-1} + 4\,|\xi|^2\,\lambda a_k) \\ &= (2\,|\xi|)^{k-2}\Big\{a_{k-2} + 2\,|\xi|\,a_k\Big(-\sum_{i=1}^{k} p_i + 2\,\lambda\,|\xi|\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

daß $b_k > 0$ ist. Die Glieder b_k, b_{k+1}, b_{k+2} der Folge (b_i) sind also positiv. Wir zeigen jetzt, daß die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_k$ abwechselnde Vorzeichen haben. Ist nämlich $\lambda = \frac{1}{4}$, so ist $x^2 + x + \lambda = (x + \frac{1}{2})^2$, also hat das Polynom $\varphi_1(2|\xi|x)(x^2 + x + \lambda)$ lauter reelle Wurzeln. Infolgedessen treten genau k Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge $b_0, b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, b_{k+2}$ auf; da noch $b_k > 0$, $b_{k+1} > 0$, $b_{k+2} > 0$ sind, müssen so die Koeffizienten

$b_0, b_1, \ldots, b_k$ für $\lambda = \frac{1}{2}$ abwechselnde Vorzeichen haben. Hieraus folgt nach (11), daß für $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{sgn} a_\nu = \operatorname{sgn} b_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

gilt. Ist nun $\lambda > \frac{1}{2}$, so folgt aus der Formel

$$b_\nu = a_{\nu-2} + a_{\nu-1} + \lambda a_\nu,$$

da für $\lambda = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sgn} a_\nu = \operatorname{sgn} b_\nu$ gilt, daß für jedes λ

$$\operatorname{sgn} b_\nu = \operatorname{sgn} a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

ist. Die Anzahl der positiven Wurzeln ist also gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $\varphi_1(x)(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2)$. Multipliziert man noch das Polynom $\varphi_1(x)(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2)$ mit $\varphi_2(x)$, so kann sich die Anzahl der Zeichenwechsel nicht ändern, wie wir es oben gesehen haben.

§ 3.

Abzählung der komplexen Wurzeln.

Von E. Obreschkoff rührt die folgende Verallgemeinerung der Descartesschen Zeichenregel her[3]): Die Anzahl der Zeichenwechsel eines reellen Polynoms n-ten Grades ist eine obere Schranke nicht nur für die Anzahl der positiven Wurzeln, sondern sogar für die Anzahl der Wurzeln, die im Winkelraum

$$-\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n}$$

liegen. Wir beweisen die folgende Ergänzung dieses Satzes:

Satz IV. *Liegen die Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ alle in dem doppelten Winkelraum*

$$\pi - \frac{\pi}{n} < \arg x < \pi + \frac{\pi}{n}, \qquad -\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n},$$

so ist die Anzahl der im Winkelraum $-\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n}$ liegenden Wurzeln genau gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $f(x)$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x),$$

wobei die Wurzeln von $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ positiv bzw. nicht reell sind und die Wurzeln von $\varphi_2(x)$ und $\varphi_3(x)$ im Winkelraum $-\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n}$ bzw. $\pi - \frac{\pi}{n} < \arg x < \pi + \frac{\pi}{n}$ liegen. Da $\varphi_1(x)$ lauter positive Wurzeln hat, so haben die Koeffizienten von $\varphi_1(x)$ abwechselnde Vorzeichen. Nun multi-

[3]) N. Obreschkoff, Über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. Jahresbericht d. DMV. **33** (1924), S. 52—64.

plizieren wir das Polynom $\varphi_1(x)$ mit einem Faktor zweiten Grades $(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2)$ von $\varphi_2(x)$. Da das Wurzelpaar $\xi \pm i\eta$ im Winkelraum $-\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n}$, $(n \geqq 2)$, liegt, so folgt, daß die Koeffizienten des Faktors $(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2)$ abwechselnde Vorzeichen haben. Die Koeffizienten des Produktes $\varphi_1(x)(x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \eta^2)$ werden aber auch abwechselnde Vorzeichen haben, wie man es durch Entwickeln leicht bestätigt. Multiplizieren wir also das Polynom $\varphi_1(x)$ nacheinander mit allen Faktoren zweiten Grades von $\varphi_2(x)$, so werden die Koeffizienten des gewonnenen Polynoms $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ auch abwechselnde Vorzeichen haben. Die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ ist also gleich der Anzahl derjenigen Wurzeln von $f(x)$, die im Winkelraum $-\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n}$ liegen. Multiplizieren wir endlich das Polynom $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ mit den Faktoren zweiten Grades von $\varphi_3(x)$, so folgt aus dem Beweis des Satzes I, daß die Anzahl der Zeichenwechsel des gewonnenen Polynoms $f(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)$ nicht größer als die von $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ ist. Nach dem Satz von Obreschkoff folgt aber, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $f(x)$ nicht kleiner als die von $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ sein kann, und damit ist Satz I bewiesen.

(Eingegangen am 7. Februar 1941.)

Über die Anzahl komprimierter Gitterpunktmengen von gegebener Punktezahl.

Von

Heinrich Tietze in München.

1. Im Folgenden ist nur von Gitterpunkten mit positiven Koordinaten die Rede; demgemäß soll das Wort „Gitterpunkt" durchwegs einen Punkt $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ des n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}^n$ mit positiven ganzen Koordinaten x_ν bedeuten. „Komprimiert" heiße eine Menge $\mathfrak{M}$ von Gitterpunkten, wenn mit jedem zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Gitterpunkt (x^0) auch alle den Ungleichungen $x'_\nu \leqq x^0_\nu$ genügenden Gitterpunkte (x') zu $\mathfrak{M}$ gehören[1]). Wir betrachten, ohne dies später noch besonders zu erwähnen, nur endliche komprimierte Gitterpunktmengen $\mathfrak{M}$ und bezeichnen ihre Punktezahl m auch als Grad von $\mathfrak{M}$. Mit $\mathfrak{K}^n_m$ werde eine komprimierte Gitterpunktmenge von der Dimension n und vom Grad m bezeichnet, mit $P^n(m)$ die Anzahl aller $\mathfrak{K}^n_m$. In diesen Zeilen sollen nun gewisse Formeln für die Zahlen $P^n(m)$ hergeleitet werden, aus denen sich insbesondere die folgenden — durch Satz 3 in Nr. 4 genauer ausgeführten — Sätze ergeben:

Satz 1. *Bei festgewähltem m ist $P^n(m)$ ein Polynom in n vom Grad $m-1$.*

Satz 2. *Bei gegebenem m ist $P^n(m)$ für beliebiges n feststellbar, sobald man eine gewisse endliche Anzahl k von Werten $P^1(m)$, $P^2(m)$, $\ldots$, $P^k(m)$ kennt.*

Wenn dabei Satz 2, darin $k = m$ gesetzt, als eine bloße Folge von Satz 1 erscheint, so werden die in Satz 3 angegebenen Formeln zeigen, daß $k = m - 1$ und sogar $= m - 2$ genommen werden kann.

---

[1]) Zugleich mit einem Gitterpunkt (x^0) ist der ihn enthaltende durch $x^0_\nu - 1 < x_\nu \leqq x^0_\nu$ definierte Würfel von der Seitenlänge 1 gegeben. Nimmt man $n = 3$, so kann man bei den zu einer komprimierten Gitterpunktmenge gehörigen Würfeln an Pflastersteine denken, die nicht weiter gegen die Hofecke, in der sie liegen, zusammengeschoben werden können, auch wenn sie einem aus einer positiven Achsenrichtung kommenden Druck ausgesetzt werden. Dies zur Wahl der Bezeichnung „komprimiert". — Über komprimierte Gitterpunktmengen vgl. „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren", Note II und V in Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jgg. 1940 u. 1941, „Über Tripel konjugierter Partitionen", Hamburg. Abhandlungen, Bd. 14 (1941), „Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe" (erscheint im Journal f. Math.) sowie den Hinweis auf derartige Mengen in Monatshefte 49 (1940), Nr. 22, S. 7.

2. In Nr. 1 ist sowohl m als n stillschweigend $\geqq 1$ angenommen worden. Da es sich bisweilen empfiehlt, auch die leere Menge o zu den komprimierten Gitterpunktmengen zu rechnen, so werde auch $m = 0$ zugelassen und für jedes n

$$P^n(0) = 1$$

gesetzt, weil es außer o keine $\mathfrak{R}_0^n$ gibt. Beachtet man ferner, daß (unter a eine positive ganze Zahl verstanden) der Schnitt einer $\mathfrak{R}_m^{n+1}$ mit $x_{n+1} = a$ eine n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge liefert, und läßt man diese Überlegung auch für $n = 0$ gelten, so gelangt man zur 0-dimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge, die natürlich entweder nur aus einem einzigen Punkt besteht oder gleich o sein muß. Demgemäß hat man

$$P^0(0) = P^0(1) = 1, \qquad P^0(m) = 0 \text{ für } m > 1. \tag{1}$$

Endlich ist

$$P^1(m) = 1 \quad \text{für} \quad m \geqq 0, \tag{2}$$

sowie

$$P^n(1) = 1 \quad \text{für} \quad n \geqq 0 \tag{3}$$

unmittelbar klar.

$P^2(m)$ deckt sich bekanntlich mit der viel untersuchten[2]) Anzahl $P(m)$ der Partitionen der Zahl m.

3. Ist $n \geqq 1$ und $\mathfrak{R}_m^n$ eine gegebene n-dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge, so kann man bei jeder Koordinate x_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ fragen, ob es in $\mathfrak{R}_m^n$ Punkte mit $x_\nu > 1$ gibt (andernfalls liegt, soferne $\mathfrak{R}_m^n \supset$ o ist, $\mathfrak{R}_m^n$ ganz in der Ebene $x_\nu = 1$). Sei $d = d(\mathfrak{R}_m^n)$ die Anzahl der Koordinaten x_ν, bei denen Werte > 1 auftreten, sodaß $\mathfrak{R}_m^n$ in einem d-dimensionalen, nicht aber in einem $(d-1)$-dimensionalen Teilraum des $\mathfrak{R}^n$ liegt. Es ist $0 \leqq d \leqq n$. Dabei ist notwendig $d(\mathfrak{R}_m^n) > 0$, wenn $m > 1$ ist, hingegen $d(\mathfrak{R}_m^n) = 0$ für $m = 1$; auch für $m = 0$ soll $d(\mathfrak{R}_m^n) = 0$ gesetzt werden. (Die Gleichungen $d(\mathfrak{R}_1^n) = 0$, $d(\mathfrak{R}_0^n) = 0$ gelten auch für $n = 0$.)

Bei gegebenen Zahlen n, m, d (alle $\geqq 0$) soll mit $P^{n,d}(m)$ die Anzahl aller $\mathfrak{R}_m^n$ bezeichnet werden, für welche $d(\mathfrak{R}_m^n) = d$ ausfällt. Offenbar gibt es zu gegebenem $m \geqq 1$ nur eine einzige $\mathfrak{R}_m^{m-1}$, für welche $d(\mathfrak{R}_m^{m-1}) = m - 1$ ist, — diese $\mathfrak{R}_m^{m-1}$ besteht für $m \geqq 2$ aus den Punkten $(1, 1, \ldots, 1), (2, 1, \ldots, 1)$, $(1, 2, 1, \ldots, 1), \ldots, (1, \ldots, 1, 2)$, — sodaß

$$P^{m-1,\,m-1}(m) = 1 \qquad (m \geqq 1) \tag{4}$$

ist. Nach dem oben über $d = 0$ Gesagten ist

$$\begin{aligned} P^{n,0}(0) &= P^{n,0}(1) = 1, \\ P^{n,0}(m) &= 0 \quad \text{für} \quad m > 1, \; n \geqq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

---

[2]) Vgl. Anm. 4.

Ferner gilt

$$P^{n,\,d}(0) = 0 \quad \text{für} \quad d > 0,\ n \geqq 0$$

und

$$P^{n}(m) = \sum_{d=0}^{\infty} P^{n,\,d}(m) \qquad (m \geqq 0). \tag{6}$$

Nun ist natürlich

$$P^{n,\,d}(m) = 0 \quad \text{für} \quad d > m-1,\ m \geqq 1 \tag{7}$$

und daher wegen (6)

$$P^{n}(m) = \sum_{d=0}^{m-1} P^{n,\,d}(m) \quad \text{für} \quad m \geqq 1, \tag{8}$$

wobei für $m > 1$ gemäß (5) die Summe auf $d \geqq 1$ beschränkt werden kann.

Betrachtet man für $n \geqq 1$, $n \geqq d \geqq 0$ im $\mathfrak{R}^n$ alle d-dimensionalen Teilräume, die durch $n-d$ Gleichungen von der Gestalt $x_\nu = 1$ gewonnen werden, so gibt es $\binom{n}{d}$ solcher Teilräume. Jede $\mathfrak{R}^n_m$, für welche $d(\mathfrak{R}^n_m) = d$ ist, liegt in einem bestimmten dieser Teilräume. Und da die Anzahl solcher $\mathfrak{R}^n_m$ in jedem dieser Teilräume gleich $P^{d,\,d}(m)$ ist, so ergibt sich

$$P^{n,\,d}(m) = \binom{n}{d} P^{d,\,d}(m) \quad \text{für} \quad d \geqq 0,\ n \geqq 0,\ m \geqq 0, \tag{9}$$

wobei zu bemerken ist, daß diese Formel natürlich auch für $n < d$ gilt, da dann beide Seiten gleich null sind.

4. Sei $m \geqq 1$. Aus (8) und (9) folgt, — womit (wegen (4)) Satz 1 bereits nachgewiesen ist, —

$$P^{n}(m) = \sum_{d=0}^{m-1} \binom{n}{d} P^{d,\,d}(m) \qquad (n \geqq 0,\ m \geqq 1), \tag{10}$$

was wegen (7) auch

$$P^{n}(m) = \sum_{d=0}^{\infty} \binom{n}{d} P^{d,\,d}(m),$$

oder, — weil $\binom{n}{d} = 0$ ist für $d > n$, — auch

$$P^{n}(m) = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d} P^{d,\,d}(m) \qquad (n \geqq 0,\ m \geqq 1) \tag{11}$$

geschrieben werden kann. Da ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$y_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} x_\mu \qquad (0 \leqq \nu \leqq q)$$

durch

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\mu-\nu} \binom{\mu}{\nu} y_\nu \qquad (0 \leqq \mu \leqq q)$$

aufgelöst wird, so folgt aus (11):

$$(12)\qquad P^{d,\,d}(m) = \sum_{\nu=0}^{d} (-1)^{d-\nu} \binom{d}{\nu} P^{\nu}(m) \qquad (d \geqq 0,\ m \geqq 1).$$

Gemäß (10) ist also

$$(13)\qquad P^{n}(m) = \sum_{d=0}^{m-1} \binom{n}{d} \sum_{\nu=0}^{d} (-1)^{d-\nu} \binom{d}{\nu} P^{\nu}(m) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} P^{\nu}(m) \sum_{\lambda=0}^{m-1-\nu} (-1)^{\lambda} \binom{n}{\nu+\lambda} \binom{\nu+\lambda}{\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{m-1-\nu} \binom{n}{\nu} \binom{n-\nu-1}{m-\nu-1} P^{\nu}(m).$$

Somit ist, dem Satz 2 entsprechend, $P^{n}(m)$ durch $P^{1}(m), \ldots, P^{m-1}(m)$ ausgedrückt. Nun folgt aus (4) und (12) für $d = m-1$

$$(14)\qquad 1 = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{m-1-\nu} \binom{m-1}{\nu} P^{\nu}(m)$$

oder

$$(15)\qquad P^{m-1}(m) = 1 + \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{m-\nu} \binom{m-1}{\nu} P^{\nu}(m) \qquad (m \geqq 1),$$

wobei für $m = 1$ unter der Summe rechts die Null zu verstehen ist. Durch Einsetzen von (15) im letzten Summanden von (13) erhält man — mit der gleichen Festsetzung über die Summe im Falle $m = 1$, —

$$(16)\qquad P^{n}(m) = \binom{n}{m-1} + \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{m-\nu} \binom{n}{\nu} \binom{n-\nu-1}{m-2-\nu} P^{\nu}(m)$$

und damit

Satz 3. *Die Anzahl $P^{n}(m)$ läßt sich vermöge der Formel* (13) *bzw.* (16) *durch die Werte der Zahlen $P^{\nu}(m)$ für $0 \leqq \nu \leqq m-1$, bzw. $0 \leqq \nu \leqq m-2$ ausdrücken, wobei für $m > 1$ gemäß* (1) *der auf $\nu = 0$ bezügliche Summand in beiden Formeln weggelassen werden kann.*

Für $m = 1$ führt dieser Satz einfach auf die schon in Nr. 2 angegebene Gleichung (3), während sich für $m > 1$ die in Satz 2 genannte Zahl k nach Formel (13) gleich $m-1$ und nach Formel (16) gleich $m-2$ ergibt.

Wendet man die eine oder die andere dieser Formeln[3]) beispielsweise auf $m = 5$ an, so erhält man

$$(17)\qquad P^{n}(5) = \frac{(3n^2+1)n}{4} + \frac{n^2(n^2-1)}{24} = \frac{n^4 + 18n^3 - n^2 + 6n}{24},$$

[3]) Vgl. Bayer. Sitz.ber., l. c. [4]), S. 163, Anm. 23, wo diese Formeln, sowie die speziellen Formeln für $P^{n}(2)$, $P^{n}(3)$ und $P^{n}(4)$ ohne Beweis angeführt sind.

da, wie leicht durch geometrische Betrachtungen festzustellen,

$$P^{1,1}(5) = 1, \quad P^{2,2}(5) = 5, \quad P^{3,3}(5) = 6, \quad P^{4,4}(5) = 1,$$

also nach Formel (10)

$$P^{1}(5) = 1, \quad P^{2}(5) = 7, \quad P^{3}(5) = 24, \quad P^{4}(5) = 59$$

ist, was in (13) oder (16) (oder auch in (10)) eingesetzt auf (17) führt. Analog erhält man für $m = 6$ die Werte $P^{1,1}(6) = 1$, $P^{2,2}(6) = 9$, $P^{3,3}(6) = 18$, $P^{4,4}(6) = 10$, $P^{5,5}(6) = 1$ und daraus $P^{1}(6) = 1$, $P^{2}(6) = 11$, $P^{3}(6) = 48$, $P^{4}(6) = 140$, $P^{5}(6) = 326$, sowie

$$P^{n}(6) = \frac{n}{5} + \frac{n^2(n^3-1)}{3} + \frac{n^3(n^3+95)}{120}. \tag{18}$$

Daß $P^{n}(m)$ bei festem $m > 1$ mit n wächst, ist aus der Bedeutung von $P^{n}(m)$ klar und auch aus (10) ersichtlich, wobei das Glied höchsten Grades, $\frac{1}{(m-1)!}\, n^{m-1}$, die Art des Anwachsens für große n kennzeichnet. Wesentlich größeres Interesse beansprucht das Wachstum von $P^{n}(m)$ bei festem n in seiner Abhängigkeit von m. Außer dem viel studierten Fall $n = 2$ ist darüber wohl kaum viel bekannt[4]).

München, den 13. Februar 1941.

---

[4]) Wegen des Falles $n = 2$, $P^{2}(m) = P(m)$ (s. Nr. 2), vgl. etwa G. H. HARDY-E. M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers (1938), Chapter XIX, G. N. WATSON, Journal f. d. reine und angew. Math. 179 (1938), S. 97 nebst den dort gemachten Angaben über Tabellen bis zu $m = 600$. Für $n = 3$ sind einige Werte von $P^{3}(m)$ (bis zu $m = 14$) angegeben in „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren IV. Formeln und Tabellen", Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1940, S. 166.

(Eingegangen am 16. Februar 1941.)

Über die Lagrangeschen Fälle im verallgemeinerten Dreikörperproblem.

Von

O. Pylarinos in Thessaloniki (Griechenland).

Die Lagrangeschen Lösungen des Dreikörperproblems, bei dem sich die Körper unter dem Einfluß der Newtonschen Gravitationskraft bewegen, sind bekanntlich diejenigen, bei denen die Abstandsverhältnisse der drei Körper konstant während der ganzen Bewegung bleiben, so daß diese Körper, wenn sie nicht in gerader Linie liegen, ein Dreieck bilden, das beständig sich selbst ähnlich bleibt. Diese Sonderfälle, die zuerst Lagrange[1]) angegeben und mit Hilfe seiner Theorie des Dreikörperproblems behandelt hat, sind die einzigen bis heute bekannten Fälle, in denen das Dreikörperproblem mit Hilfe von elementaren Funktionen integriert werden kann.

Eine notwendige Bedingung für die Realisierung dieser Sonderfälle besteht darin, daß die Bewegung der drei Körper, in bezug auf ein Inertialkoordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt der drei Massen, in einer festen Ebene stattfindet[2]).

Nun kann man fragen, ob diese Bedingung auch für die analogen Fälle des verallgemeinerten Dreikörperproblems erforderlich ist, in dem keine Voraussetzung über die Natur der wechselseitigen Wirkung der drei Körper gemacht wird.

Wenn die drei Körper dauernd in gerader Linie liegen, so erfolgt die Bewegung in bezug auf das oben erwähnte Koordinatensystem in einer festen Ebene, denn in diesem Falle liegen auch ihre Beschleunigungen in derselben geraden Linie, welche beständig durch den Schwerpunkt der drei Massen hindurchgeht; demgemäß muß jeder einzelne von diesen Körpern sich in einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene bewegen; da nun diese Körper in gerader Linie liegen, fallen diese drei Ebenen zusammen.

Es bleibt also der Fall zu untersuchen, bei dem die drei Körper ein Dreieck bilden.

Im folgenden wird zuerst festgestellt, daß in diesem Falle die Bewegung der drei Körper, in bezug auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem, im

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. VI, S. 272–292.

[2]) C. Carathéodory, Über die strengen Lösungen des Dreikörperproblems. Sitzungsber d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften (Math.-naturwiss. Abteilung) 1933, S. 257–267.

allgemeinen nicht in einer festen Ebene vor sich geht; weiter wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die von diesen Körpern in jedem Zeitpunkte bestimmte Ebene fest bleibt, aufgestellt.

Schließlich wird gezeigt, daß, wenn die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper einer Potenz ihres Abstandes proportional ist, nur die von Lagrange für das Newtonsche Dreikörperproblem angegebenen Sonderfälle, bei denen die Abstandsverhältnisse der drei Körper konstant bleiben, existieren, ausgenommen den Fall, in dem diese Wirkung der dritten Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist; im letzteren Falle gibt es eine weitere derartige Sonderlösung des Problems, in der aber die Ebene der drei Körper sich um eine in ihr liegende Achse dreht.

1. Es seien P_1, P_2, P_3 die drei Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2, m_3, die nach Voraussetzung ein isoliertes System bilden und nicht dauernd in gerader Linie liegen.

Bezeichnet man mit $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ die Ortsvektoren der drei Punkte in bezug auf ein festes Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt G der drei Massen, ferner mit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ ihre Geschwindigkeiten und mit $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ ihre Beschleunigungen, so gilt bekanntlich

$$(1,1)\qquad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{r}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{v}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{b}_i = 0.$$

Die auf die drei Massenpunkte wirkenden Kräfte bilden, wegen der obigen Voraussetzung, ein mit Null äquivalentes Vektorsystem, demnach lassen sich diese Kräfte in der Form

$$(1,2)\qquad \begin{cases} m_1 \bar{b}_1 = \alpha_{21}\bar{c} - \alpha_{31}\bar{b}, \\ m_2 \bar{b}_2 = \alpha_{32}\bar{a} - \alpha_{12}\bar{c}, \\ m_3 \bar{b}_3 = \alpha_{13}\bar{b} - \alpha_{23}\bar{a} \end{cases}$$

schreiben, wobei die Koeffizienten α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ die Bedingung

$$(1,3)\qquad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

erfüllen und $\bar{a} = \overline{P_2P_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$, $\bar{b} = \overline{P_3P_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}_3$, $\bar{c} = \overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ ist, während zugleich ihre Angriffslinien in jedem Zeitpunkt durch denselben Punkt der von diesen Körpern bestimmten Ebene hindurchgehen. Dieser Punkt, der im folgenden als Punkt D bezeichnet wird, kann durch einen Vektor von der Form

$$(1,4)\qquad \bar{d} = \varkappa_1 \bar{r}_1 + \varkappa_2 \bar{r}_2 + \varkappa_3 \bar{r}_3$$

dargestellt werden, dessen Koeffizienten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ man leicht als Funktionen von α_{ik} folgendermaßen ausdrücken kann:

$$(1,5)\qquad \varkappa_1 = \frac{\alpha_{12}\alpha_{31}}{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}}, \quad \varkappa_2 = \frac{\alpha_{23}\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}},$$
$$\varkappa_3 = \frac{\alpha_{31}\alpha_{23}}{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}}.$$

Die Gleichungen (1, 2) können nun mit Hilfe von (1, 4) und (1, 5) die Gestalt

$$(1,6)\qquad m_1\bar{b}_1 = \lambda_1(\bar{r}_1 - \bar{d}),\quad m_2\bar{b}_2 = \lambda_2(\bar{r}_2 - \bar{d}),\quad m_3\bar{b}_3 = \lambda_3(\bar{r}_3 - \bar{d})$$

annehmen, wobei

$$(1,7)\qquad \lambda_1 = -\frac{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}}{\alpha_{23}},\quad \lambda_2 = -\frac{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}}{\alpha_{31}},$$
$$\lambda_3 = -\frac{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{31}\alpha_{12}}{\alpha_{12}}$$

ist.

Aus (1, 5) und (1, 7) ergibt sich leicht

$$(1,8)\qquad \alpha_{12}^2 = \varkappa_1\varkappa_2\lambda_1\lambda_2,\quad \alpha_{23}^2 = \varkappa_2\varkappa_3\lambda_2\lambda_3,\quad \alpha_{31}^2 = \varkappa_3\varkappa_1\lambda_3\lambda_1,$$

$$(1,9)\qquad \frac{\varkappa_1}{\lambda_1} = \frac{\varkappa_2}{\lambda_2} = \frac{\varkappa_3}{\lambda_3}$$

und somit läßt sich der Vektor $\bar{d}$ auch in der Form

$$(1,10)\qquad \bar{d} = \frac{\lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2 + \lambda_3\bar{r}_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

schreiben.

Bezeichnet man endlich mit $\bar{K}$ das kinetische Moment in G des Systems P_1, P_2, P_3 und mit T seine kinetische Energie, so wird

$$(1,11)\qquad \bar{K} = \sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\bar{r}_i \times \bar{v}_i$$

und nach dem Momentsatze

$$(1,12)\qquad \dot{\bar{K}}\,^{3}) = \bar{\mathfrak{M}} = \sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\bar{r}_i \times \bar{b}_i = 0,$$

wobei $\bar{\mathfrak{M}}$ den Momentvektor in G der auf die drei Körper wirkenden Kräfte darstellt.

Ebenso wird

$$(1,13)\qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\bar{v}_i^2$$

und nach dem Energiesatze

$$(1,14)\qquad -\dot{T} = \alpha_{12}\gamma\dot{\gamma} + \alpha_{23}\alpha\dot{\alpha} + \alpha_{31}\beta\dot{\beta},$$

wo α, β, γ die absoluten Beträge der Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, d. h. die Längen der zugehörigen Seiten des von den drei Punkten in jedem Zeitpunkt gebildeten Dreiecks bedeuten.

2. Wenn die Abstandsverhältnisse der drei Massenpunkte P_1, P_2, P_3 während der ganzen Bewegung konstant bleiben, so gibt es ein Dreieck, welches demjenigen ihrer Anfangslagen gleich und dem Dreieck der auf den

---

[3]) Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

Schwerpunkt bezogenen Lagen der drei Punkte in jedem Zeitpunkt ähnlich gelegen ist.

Bezeichnet man mit Q_1, Q_2, Q_3 die zu den Punkten P_1, P_2, P_3 gehörigen Ecken dieses Dreiecks und mit $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \bar{\varrho}_3$ ihre Ortsvektoren in bezug auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem, so wird wegen der ähnlichen Lage der zwei Dreiecke in bezug auf G

$$\bar{r}_i = \lambda \bar{\varrho}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2, 1}$$

und zugleich

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \lambda, \tag{2, 2}$$

wo α', β', γ' die zugehörigen Seiten des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ darstellen, und λ eine Funktion der Zeit ist, welche anfänglich den Wert Eins annimmt.

Ferner gilt bekanntlich für die Geschwindigkeit $\bar{v}_i'$ und die Beschleunigung $\bar{b}_i'$ des Punktes Q_i

$$\bar{v}_i' = \bar{\omega} \times \bar{\varrho}_i, \quad \bar{b}_i' = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\varrho}_i + \bar{\omega} \times \{\bar{\omega} \times \bar{\varrho}_i\}, \tag{2, 3}$$

wo $\bar{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems $Q_1Q_2Q_3$ darstellt.

Durch zweimalige Differentiation von (2, 1) nach der Zeit mit Berücksichtigung von (2, 3) erhält man für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes P_i

$$\bar{v}_i = \dot{\lambda}\bar{\varrho}_i + \lambda\bar{\omega}\times\bar{\varrho}_i, \quad \bar{b}_i = \ddot{\lambda}\bar{\varrho}_i + 2\dot{\lambda}\bar{\omega}\times\bar{\varrho}_i + \lambda\dot{\bar{\omega}}\times\bar{\varrho}_i + \lambda\bar{\omega}\times\{\bar{\omega}\times\bar{\varrho}_i\} \tag{2, 4}$$

und die Formeln (1, 11) und (1, 13) lassen sich nun in der Form

$$\bar{K} = \lambda^2 \bar{K}', \tag{2, 5}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\lambda}^2 \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{\varrho}_i^2 + \lambda^2 T' \tag{2, 6}$$

schreiben, wobei

$$\bar{K}' = \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{\varrho}_i \times \bar{v}_i' \tag{2, 7}$$

und

$$T' = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{v}_i'^2 \tag{2, 8}$$

ist.

Dabei gilt nach (2, 1), (2, 3) und (1, 1)

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{\varrho}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{v}_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \bar{b}_i' = 0. \tag{2, 9}$$

Letztere Gleichungen lehren, daß die Punkte $Q_1Q_2Q_3$, die ein starres System bilden, sich als Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2, m_3 um den Schwerpunkt der drei Massen bewegen. Das Moment $\bar{K}'$ der Bewegungsgröße in G

und die kinetische Energie T' dieses Systems können aus (2, 5) bzw. (2, 6) als Funktionen von λ, $\dot{\lambda}$, $\overline{K}$ und T ausgedrückt werden.

Differenziert man (2, 5) nach der Zeit und beachtet, daß nach (1, 12) $\dot{\overline{K}} = 0$ ist, so findet man

$$2\dot{\lambda}\overline{K}' + \lambda\dot{\overline{K}}' = 0 \tag{2,10}$$

und daraus durch skalare Multiplikation mit $\overline{\omega}$

$$2\dot{\lambda}\overline{K}'\cdot\overline{\omega} + \lambda\dot{\overline{K}}'\cdot\overline{\omega} = 0; \tag{2,11}$$

da aber die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 ein starres System bilden, welches sich um G bewegt, so gilt bekanntlich[4])

$$\overline{K}'\cdot\overline{\omega} = 2T', \quad \dot{\overline{K}}'\cdot\overline{\omega} = \dot{T}'$$

und die obige Beziehung kann auch in der Form

$$4\dot{\lambda}T' + \lambda\dot{T}' = 0 \tag{2,11}$$

geschrieben werden, woraus man durch Integration folgert

$$T' = \frac{h}{\lambda^4}, \tag{2,12}$$

wobei h den Anfangswert der kinetischen Energie bedeutet.

Es ist zu bemerken, daß die auf die Massenpunkte Q_1, Q_2, Q_3 wirkenden Kräfte in jedem Zeitpunkt infolge der dritten Gleichung (2, 9) ein Kräftepaar bilden, dessen Moment $\overline{\mathfrak{M}}'$ als Funktion von λ und $\dot{\lambda}$ berechnet werden kann.

Es ist nämlich nach dem Momentsatze

$$\overline{\mathfrak{M}}' = \dot{\overline{K}}';$$

hieraus folgt mit Hilfe von (2, 10) und (2, 5)

$$\overline{\mathfrak{M}}' = -\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda}\overline{K}' = -\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda^3}\overline{K}, \tag{2,13}$$

wobei $\overline{K}$ das konstante Moment in G der Bewegungsgröße des Systems P_1, P_2, P_3 ist.

3. Es sei nunmehr $Gxyz$ das Hauptachsensystem in G des starren Systems $Q_1Q_2Q_3$, dessen z-Achse senkrecht auf der Ebene der drei Punkte steht.

Bezeichnet man mit ϱ_i', ϱ_i'', ϱ_i''' die Koordinaten des Punktes Q_i in bezug auf $Gxyz$ und mit J_1, J_2, J_3 die zu den Koordinatenachsen gehörigen Träg-

[4]) Vgl. J. NIELSEN, Vorlesungen über elementare Mechanik, S. 408, 416 (1935).

heitsmomente, so wird, nach den obigen Voraussetzungen über das Koordinatensystem,

$$\varrho_i''' = 0, \tag{3, 1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i'' = 0, \tag{3, 2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i' \varrho_i'' = 0 \tag{3, 3}$$

und

$$J_1 = \sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i''^2, \quad J_2 = \sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i'^2, \quad J_3 = \sum_{i=1}^{i=3} m_i (\varrho_i'^2 + \varrho_i''^2) = J_1 + J_2. \tag{3, 4}$$

Aus (3, 2) ergibt sich unmittelbar, daß die Abszissen bzw. die Ordinaten mindestens zweier von den Punkten Q_1, Q_2, Q_3 von Null verschieden sind, da andernfalls diese Punkte in gerader Linie liegen müßten.

Bezeichnet man ferner mit ω_1, ω_2, ω_3 die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$ und mit K_1', K_2', K_3' die Koordinaten des Moments $\overline{K}'$ in bezug auf $G\,xyz$, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$K_1' = J_1 \omega_1, \quad K_2' = J_2 \omega_2, \quad K_3' = J_3 \omega_3; \tag{3, 5}$$

somit werden die Koordinaten L, M, N in bezug auf $G\,xyz$ des Momentvektors in G der auf die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 wirkenden Kräfte infolge von (2, 13)

$$L = -\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda} J_1 \omega_1, \quad M = -\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda} J_2 \omega_2, \quad N = -\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda} J_3 \omega_3, \tag{3, 6}$$

und die Eulerschen Gleichungen für die Bewegung des Systems lauten dann mit Beachtung der dritten Gleichung (3, 4)

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 = -\dfrac{2\dot{\lambda}}{\lambda} \omega_1, \\ \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 = -\dfrac{2\dot{\lambda}}{\lambda} \omega_2, \\ \dot{\omega}_3 + \dfrac{J_3 - J_1}{J_3} \omega_1 \omega_2 = -\dfrac{2\dot{\lambda}}{\lambda} \omega_3. \end{cases} \tag{3, 7}$$

Aus den zwei ersten Gleichungen (3, 7) ergibt sich zunächst

$$\omega_1 \dot{\omega}_2 - \omega_2 \dot{\omega}_1 = \omega_3 (\omega_1^2 + \omega_2^2), \tag{3, 8}$$

während zugleich aus denselben Gleichungen (3, 7)

$$\begin{cases} J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = \dfrac{2h}{\lambda^4}, \\ J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = \dfrac{K^2}{\lambda^4} \end{cases} \tag{3, 9}$$

folgt, wobei h die anfängliche kinetische Energie und K den absoluten Betrag des kinetischen Moments $\overline{K}'$ des Systems im Anfangszeitpunkt bedeuten.

Endlich liefert die Elimination von ω_3 zwischen den Gleichungen (3, 9) mit Rücksicht auf die dritte Gleichung (3, 4)

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{2h'}{\lambda^4}, \tag{3, 10}$$

wo h' eine von der Zeit unabhängige Größe ist.

Die Gleichungen (3, 9), eine der Gleichungen (3, 7), sowie die Energiegleichung bilden nun die Differentialgleichungen des Systems P_1, P_2, P_3 und gestatten die vier Größen ω_1, ω_2, ω_3, λ als Funktionen der Zeit zu bestimmen, wenn natürlich die Abstandsverhältnisse der drei Punkte während der Bewegung konstant bleiben und ihre Wechselwirkung festgelegt ist.

Dann lauten die Koordinaten b_i', b_i'', b_i''' der auf den Punkt P_i des Systems wirkenden Beschleunigung in bezug auf $Gxyz$ nach (2, 4) und (3, 7)

$$\begin{cases} b_i' = (\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2)\varrho_i' + \lambda\omega_1(\omega_1\varrho_i' + \omega_2\varrho_i'') - \varrho_i''(2\dot{\lambda}\omega_3 + \lambda\dot{\omega}_3), \\ b_i'' = (\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2)\varrho_i'' + \lambda\omega_2(\omega_1\varrho_i' + \omega_2\varrho_i'') + \varrho_i'(2\dot{\lambda}\omega_3 + \lambda\dot{\omega}_3), \\ b_i''' = 0, \end{cases} \tag{3, 11}$$

wo $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ ist.

4. Es sei nun $\lambda(t)$ eine Funktion von t, welche im Anfangszeitpunkt t_1 den Wert Eins annimmt und für $t \geqq t_1$ differenzierbar ist, und $\overline{K}$ ein von der Zeit unabhängiger Vektor. Bewegt sich nun das starre System $Q_1Q_2Q_3$ unter dem Einfluß eines Kräftepaares mit dem Moment

$$\overline{\mathfrak{M}}' = -\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda^3}\overline{K}$$

um den ruhenden Schwerpunkt G der drei Massen, so wird seine Bewegung durch die Gleichungen (3, 7) vollständig bestimmt, wenn gleichzeitig die Anfangswinkelgeschwindigkeit des Systems derart gewählt wird, daß sein kinetisches Moment in G anfänglich gleich $\overline{K}$ ist.

Betrachtet man ferner die Punkte P_1, P_2, P_3, deren Ortsvektoren $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ in bezug auf G als Funktionen von λ und den Ortsvektoren $\bar{\varrho}_1$, $\bar{\varrho}_2$, $\bar{\varrho}_3$ der Punkte Q_1, Q_2, Q_3 durch die Gleichungen (2, 1) ausgedrückt werden, so erkennt man aus (2, 4), (2, 9), (3, 7) und (3, 10), daß ihre Beschleunigungen $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ die Beziehung (1, 12) und die dritte Gleichung (1, 1) erfüllen. Daraus aber folgt, daß die drei Vektoren $m_i\bar{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ein mit Null äquivalentes Vektorsystem bilden; folglich bewegen sich die Punkte P_1, P_2, P_3 als drei Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2, m_3, die ein isoliertes System bilden und deren Abstandsverhältnisse konstant bleiben.

Ist nunmehr die Anfangslage der z-Ebene nicht auf dem kinetischen Moment $\overline{K}$ senkrecht, so geht bekanntlich die Anfangsdrehung des Systems $Q_1Q_2Q_3$ nicht um die auf dieser Ebene senkrecht stehende z-Achse vor sich;

deswegen erfolgt die Bewegung der Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ bzw. P_1, P_2, P_3 nicht in einer festen Ebene.

Die Bewegung eines isolierten Systems von drei Massenpunkten, bei der ihre Abstandsverhältnisse konstant bleiben, findet also im allgemeinen nicht in einer festen Ebene statt.

Geht hingegen die Anfangsdrehung des Systems $Q_1 Q_2 Q_3$ um die z-Achse, die dann notwendig zu dem Anfangswert $\overline{K}$ des kinetischen Moments in G des Systems parallel sein muß, vor sich, so bleibt die von diesen Punkten bestimmte Ebene fest, da nun alle beiden Anfangswerte von ω_1, ω_2 verschwinden; folglich wird die in (3, 10) vorkommende Konstante h' gleich Null und somit erhält diese Gleichung die Gestalt

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0, \tag{4, 1}$$

woraus unmittelbar während der ganzen Bewegung

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \tag{4, 2}$$

folgt; somit muß bekanntlich die Drehachse, die jetzt beständig mit der z-Achse zusammenfällt, auch in bezug auf das feste Koordinatensystem eine unveränderliche Lage beibehalten.

Dann findet man durch Integration aus der dritten Gleichung (3, 7)

$$\omega_3 \equiv \omega = \frac{\omega'}{\lambda^2}, \tag{4, 3}$$

wobei ω' den Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit ω darstellt; daraus wird unter Berücksichtigung von (4, 2)

$$2\dot{\lambda}\,\bar{\omega} + \lambda\dot{\bar{\omega}} = 0; \tag{4, 4}$$

zudem gilt nun

$$\bar{\varrho}_i \cdot \bar{\omega} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4, 5}$$

und die zweite Formel (2, 4) erhält die Gestalt

$$\bar{b}_i = (\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2)\,\bar{\varrho}_i. \tag{4, 6}$$

Daraus aber folgt, daß in diesem Falle die Bewegung jedes einzelnen der Punkte P_1, P_2, P_3 eine Zentralbewegung in G ist. Der Punkt D fällt also dauernd mit dem Schwerpunkt G zusammen und so wird während der ganzen Bewegung

$$\bar{d} = \varkappa_1 \bar{r}_1 + \varkappa_2 \bar{r}_2 + \varkappa_3 \bar{r}_3 = 0. \tag{4, 7}$$

Wenn also die Bewegung eines isolierten Systems von drei Körpern, bei der das von diesen Körpern gebildete Dreieck dauernd sich selbst ähnlich bleibt, in bezug auf ein festes Koordinalsystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt

der drei Massen, in einer festen Ebene stattfindet, so gehen die Angriffslinien der auf die Körper wirkenden Kräfte in jedem Zeitpunkte durch den Schwerpunkt hindurch.

Es ist zu bemerken, daß in diesem Falle *die Koeffizienten* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ *in* (1, 4) *von der Zeit unabhängig sind.*

Es ergibt sich nämlich aus (4, 7) und der ersten Beziehung (1, 1) mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die drei Körper nicht in gerader Linie liegen,

$$\frac{\varkappa_1}{m_1} = \frac{\varkappa_2}{m_2} = \frac{\varkappa_3}{m_3} \tag{4, 8}$$

und daher

$$\varkappa_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \varkappa_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \varkappa_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{4, 9}$$

da nach (1, 5)

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 1 \tag{4, 10}$$

gilt.

5. Sind umgekehrt die Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ in (1, 4) von der Zeit unabhängig, so wird, falls die Abstandsverhältnisse der drei Körper P_1, P_2, P_3 während der ganzen Bewegung konstant bleiben, infolge von (1, 9)

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{konst}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \text{konst} \tag{5, 1}$$

und die Formel (1, 4) erhält die Gestalt

$$\bar{d} = \lambda \bar{d}_1, \tag{5, 2}$$

wobei nun

$$\bar{d}_1 = \varkappa_1 \bar{\varrho}_1 + \varkappa_2 \bar{\varrho}_2 + \varkappa_3 \bar{\varrho}_3 \tag{5, 3}$$

ist. Die Koordinaten von $\bar{d}_1$:

$$d_1' = \varkappa_1 \varrho_1' + \varkappa_2 \varrho_2' + \varkappa_3 \varrho_3', \quad d_1'' = \varkappa_1 \varrho_1'' + \varkappa_2 \varrho_2'' + \varkappa_3 \varrho_3'', \quad d_1''' = 0 \tag{5, 4}$$

in bezug auf $Gxyz$ sind in diesem Falle von der Zeit unabhängig.

Demnach lassen sich die Koordinaten der auf den Punkt P_i wirkenden Kraft $m_i \bar{b}_i$ in bezug auf $Gxyz$ in der Form

$$m_i b_i' = \lambda_i \lambda (\varrho_i' - d_1'), \quad m_i b_i'' = \lambda_i \lambda (\varrho_i'' - d_1''), \quad m_i b_i''' = 0 \tag{5, 5}$$

schreiben.

Aus (5, 5) für $i = 1, i = 2$ folgert man mit Beachtung von (5, 1) und (5, 4)

$$\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{m_1}{m_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\varrho_2' - d_1'}{\varrho_1' - d_1'} = c', \qquad \frac{b_2''}{b_1''} = \frac{m_1}{m_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\varrho_2'' - d_1''}{\varrho_1'' - d_1''} = c'', \tag{5, 6}$$

wo c', c'' zwei Konstanten sind; trägt man ferner in (5, 6) die Werte von b_i', b_i'' für $i = 1, 2$ aus (3, 11) ein, so findet man

$$(5,7)\quad \begin{cases} (\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2)(\varrho_2' - c'\varrho_1') + \lambda\omega_1^2(\varrho_2' - c'\varrho_1') + \\ \qquad + (\lambda\omega_1\omega_2 - 2\dot{\lambda}\omega_3 - \lambda\dot{\omega}_3)(\varrho_2'' - c'\varrho_1'') = 0, \\ (\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2)(\varrho_2'' - c''\varrho_1'') + \lambda\omega_2^2(\varrho_2'' - c''\varrho_1'') + \\ \qquad + (\lambda\omega_1\omega_2 + 2\dot{\lambda}\omega_3 + \lambda\dot{\omega}_3)(\varrho_2' - c''\varrho_1') = 0, \end{cases}$$

wo $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ ist.

Sind nun beide Koeffizienten $\varrho_2' - c'\varrho_1'$, $\varrho_2'' - c''\varrho_1''$ von Null verschieden, so liefert die Elimination von $\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2$ zwischen den Gleichungen (5, 7)

$$\lambda(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \lambda\omega_1\omega_2\left\{\frac{\varrho_3'' - c'\varrho_1''}{\varrho_3' - c'\varrho_1'} - \frac{\varrho_3' - c''\varrho_1'}{\varrho_3'' - c''\varrho_1''}\right\} - \\ - \{2\dot{\lambda}\omega_3 + \lambda\dot{\omega}_3\}\left\{\frac{\varrho_3'' - c'\varrho_1''}{\varrho_3' - c'\varrho_1'} + \frac{\varrho_3' - c''\varrho_1'}{\varrho_3'' - c''\varrho_1''}\right\} = 0.$$

Daraus aber zusammen mit der dritten Gleichung (3, 7) folgt

$$(5,8)\quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \text{konst}$$

und somit aus (3, 8)

$$\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0.$$

Letztere Gleichung besagt aber, daß entweder $\omega_1 = \omega_2 = 0$ während der ganzen Bewegung ist und die Ebene der drei Körper fest bleibt, oder daß $\omega_3 = 0$ dauernd ist. Im letzteren Falle muß die Drehachse beständig in der Ebene der drei Körper liegen und nach (5, 8) eine unveränderliche Lage in bezug auf $Gxyz$ beibehalten; diese Achse muß also zugleich in bezug auf das ruhende Koordinatensystem fest bleiben. Andererseits liegt nach (3, 5) auch das kinetische Moment $\overline{K}'$ in derselben Ebene und zwar der Drehachse parallel, da andernfalls diese Ebene fest bleiben würde. Also geht die Drehung um eine der in der Ebene der drei Körper liegenden Hauptachsen ihrer Anfangslagen vor sich, und wenn z. B. $J_1 \neq J_2$ ist, so wird notwendig eine der Größen ω_1, ω_2 während der Bewegung gleich Null.

Ist zweitens einer der Koeffizienten von $\ddot{\lambda} - \lambda\omega^2$ in (5, 7), z. B. der zweite $\varrho_2'' - c''\varrho_1''$, gleich Null, so wird notwendig $\varrho_2' - c''\varrho_1'$ von Null verschieden, da andernfalls die drei Körper in gerader Linie liegen müßten, und die zweite Gleichung (5, 7) erhält nun die Form

$$\lambda\omega_1\omega_2 - 2\dot{\lambda}\omega_3 - \lambda\dot{\omega}_3 = 0,$$

woraus zusammen mit der dritten Gleichung (3, 7)

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 0$$

folgt; da andernfalls $J_1 - J_2 = J_3$ und somit unter Berücksichtigung der dritten Formel (3, 4) $J_2 = \sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i'^2 = 0$ wäre.

Folglich wird mindestens eine der Größen ω_1, ω_2 gleich Null und die Drehung geht notwendig um eine der Koordinatenachsen vor sich.

Wenn nämlich beide Größen ω_1, ω_2 verschwinden, so findet die Drehung um die z-Achse statt; wenn aber z. B. $\omega_2 = 0, \omega_1 \neq 0$ wird, so folgt aus der zweiten Gleichung (3, 7) auch

$$\omega_3 = 0$$

und die Drehung erfolgt in diesem Falle um die x-Achse.

Wenn also das Dreieck der drei Körper P_1, P_2, P_3 beständig sich selbst ähnlich bleibt und zugleich die Koeffizienten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ in (1, 4) von der Zeit unabhängig sind, so muß die von diesen Körpern bestimmte Ebene entweder fest bleiben oder sich um eine der in dieser Ebene liegenden Zentralhauptachsen der Anfangslage des Systems drehen.

Wenn die Drehachse beständig mit der x-Achse zusammenfällt, so wird während der ganzen Bewegung

$$\omega_2 = \omega_3 = 0 \tag{5, 9}$$

und somit ergibt sich durch Integration aus der ersten Gleichung (3, 7)

$$\omega_1 \equiv \omega = \frac{\omega'}{\lambda^2}, \tag{5, 10}$$

wobei ω' den Anfangswert von ω darstellt, während zugleich die Koordinaten in bezug auf $Gxyz$ der auf den Punkt P_i wirkenden Kraft $m_i \bar{b}_i$ infolge von (3, 11), (5, 2) und (5, 9)

$$\begin{cases} m_i b_i' &= m_i \ddot{\lambda}\, \varrho_i' = \lambda_i \lambda\, (\varrho_i' - d_1'), \\ m_i b_i'' &= m_i (\ddot{\lambda} - \lambda \omega^2)\, \varrho_i'' = \lambda_i \lambda\, (\varrho_i'' - d_1''), \\ m_i b_i''' &= 0 \end{cases} \tag{5, 11}$$

lauten.

Ebenso wird, wenn die Drehung um die y-Achse vor sich geht,

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 \equiv \omega = \frac{\omega'}{\lambda^2} \tag{5, 10'}$$

und die Koordinaten von $m_i \bar{b}_i$ lauten

$$\begin{cases} m_i b_i' &= m_i (\ddot{\lambda} - \lambda \omega^2)\, \varrho_i' = \lambda_i \lambda\, (\varrho_i' - d_1'), \\ m_i b_i'' &= m_i \ddot{\lambda}\, \varrho_i'' = \lambda_i \lambda\, (\varrho_i'' - d_1''), \\ m_i b_i''' &= 0. \end{cases} \tag{5, 12}$$

Hieraus ergibt sich zunächst, daß wenn

$$d_1' = d_1'' = 0$$

ist, d. h. wenn die Angriffslinien der auf die Körper wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt G der drei Massen hindurchgehen, ω_1 bzw. ω_2 gleich Null sein muß; folglich bleibt die Ebene der drei Körper fest.

So kann man nun in Zusammenhang mit dem in § 4 angegebenen Satze folgende Bedingung ausdrücken:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Bewegung eines isolierten Systems von drei Körpern, deren Dreieck beständig sich selbst ähnlich bleibt, in einer festen Ebene erfolgt, ist, daß der Punkt D mit dem Schwerpunkt der drei Massen zusammenfällt.

Sind hingegen d_1', d_1'' und zudem ϱ_1', ϱ_1'' von Null verschieden, so findet man aus (5, 11) für $i = 1$

$$m_1 \ddot{\lambda} = \lambda_1 \lambda \left(1 - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right) = \lambda_1 \lambda \left(1 - \frac{d_1''}{\varrho_1''}\right) + \lambda m_1 \omega_1^2 \tag{5, 13}$$

oder aus (5, 12)

$$m_1 \ddot{\lambda} = \lambda_1 \lambda \left(1 - \frac{d_1''}{\varrho_1''}\right) = \lambda_1 \lambda \left(1 - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right) + \lambda m_1 \omega_2^2 . \tag{5, 13'}$$

Daraus aber folgt zusammen mit (5, 10) bzw. (5, 10')

$$\lambda_1 = \frac{c'}{\lambda^4} \tag{5. 14}$$

und hiermit aus (5, 1)

$$\lambda_2 = \frac{c''}{\lambda^4}, \quad \lambda_3 = \frac{c'''}{\lambda^4}, \tag{5, 15}$$

während man zugleich aus (1, 8) mit Hilfe von (5, 14) und (5, 15)

$$\alpha_{12} = \frac{c_{12}}{\lambda^4}, \quad \alpha_{23} = \frac{c_{23}}{\lambda^4}, \quad \alpha_{31} = \frac{c_{31}}{\lambda^4} \tag{5, 16}$$

folgert, wo c', c'', c''', c_{12}, c_{23}, c_{31} von der Zeit unabhängige Größen sind

Somit ergibt sich aber unmittelbar aus (1, 2) und (2, 1), daß dieser Sonderfall nur dann eintritt, wenn die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper der dritten Potenz ihres Abstandes umgekehrt proportional ist.

Wenn also das Dreieck der drei Körper beständig sich selbst ähnlich bleibt und zugleich die Koeffizienten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ in (1, 4) von der Zeit unabhängig sind, so muß die Ebene der drei Körper in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt der drei Massen fest bleiben, außer im Falle, in dem die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper der dritten Potenz ihres Abstandes umgekehrt proportional ist.

6. Ist schließlich die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper dem Produkt aus den Massen beider Körper und der $-(\nu-1)$-ten Potenz ihres Abstandes proportional, so wird in (1, 2)

$$(6,1)\qquad \alpha_{12}=\varepsilon f\frac{m_1 m_2}{\gamma^\nu},\quad \alpha_{23}=\varepsilon f\frac{m_2 m_3}{\alpha^\nu},\quad \alpha_{31}=\varepsilon f\frac{m_3 m_1}{\beta^\nu},$$

wo ν eine reelle Zahl ist, f eine positive Konstante darstellt und, je nachdem die Wechselwirkung eine Anziehung oder eine Abstoßung ist, $\varepsilon=+1$ oder -1 ist.

Somit lassen sich die Koeffizienten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ in (1, 4) und λ_1, λ_2, λ_3 in (1, 6) in der Form

$$(6,2)\qquad \varkappa_1=\frac{m_1\alpha^\nu}{m_1\alpha^\nu+m_2\beta^\nu+m_3\gamma^\nu},\quad \varkappa_2=\frac{m_2\beta^\nu}{m_1\alpha^\nu+m_2\beta^\nu+m_3\gamma^\nu},$$
$$\varkappa_3=\frac{m_3\gamma^\nu}{m_1\alpha^\nu+m_2\beta^\nu+m_3\gamma^\nu},$$

$$(6,3)\qquad \lambda_1=-\varepsilon f m_1\frac{m_1\alpha^\nu+m_2\beta^\nu+m_3\gamma^\nu}{\beta^\nu\gamma^\nu},\quad \lambda_2=-\varepsilon f m_2\frac{m_1\alpha^\nu+m_2\beta^\nu+m_3\gamma^\nu}{\gamma^\nu\alpha^\nu},$$
$$\lambda_3=-\varepsilon f\frac{m_1\alpha^\nu+m_2\beta^\nu+m_3\gamma^\nu}{\alpha^\nu\beta^\nu}$$

schreiben.

Wenn nun das Dreieck der drei Körper während der ganzen Bewegung sich selbst ähnlich bleibt, indem zugleich $\nu\neq 4$ ist, so muß nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze die Ebene der drei Körper fest bleiben und der Punkt D dauernd mit dem Schwerpunkt der drei Massen zusammenfallen.

Daraus ergibt sich aber unmittelbar mit Berücksichtigung von (4, 8) und (6, 2), daß in diesem Falle das von den drei Körpern gebildete Dreieck beständig *gleichseitig* sein muß.

Andererseits folgt aus der dritten Gleichung (3, 7) durch Integration

$$(6,4)\qquad \omega_3=\frac{\omega'}{\lambda^3},$$

wobei ω' den Anfangswert von ω darstellt und λ eine Funktion von t ist, die im Anfangszeitpunkt t_1 den Wert Eins annimmt und der Differentialgleichung

$$(6,5)\qquad \ddot{\lambda}=\frac{\omega'^2}{\lambda^3}-\varepsilon f\frac{m_1+m_2+m_3}{\alpha'^\nu}\cdot\frac{1}{\lambda^{\nu-1}}$$

genügt, welche man aus der ersten Gleichung (1, 6) entnehmen kann, wenn man in sie die Werte von $\bar{b}_1$, λ_1, $\bar{r}_1$ aus (2, 4), (6, 3) und (2, 1) einsetzt und berücksichtigt, daß $\omega_1=\omega_2=0$, $d_1'=d_1''=0$, $\alpha'=\beta'=\gamma'$ und $\omega_3=\frac{\omega'}{\lambda^3}$ sind.

Die Gleichungen (6, 4) und (6, 5) bilden nun die Differentialgleichungen der Bewegung und dieser Fall, in dem das ganze Problem auf Quadraturen zurückgeführt wird, ist offenbar die Verallgemeinerung des von LAGRANGE für $\nu = 3$, d. h. für das NEWTONsche Dreikörperproblem, angegebenen Sonderfalles.

Wenn auch $\nu = 4$ ist und der Punkt D mit dem Schwerpunkt der drei Massen zusammenfällt, so muß ebenso wie für irgendein anderes ν das Dreieck der drei Körper gleichseitig sein und ihre Ebene in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt G fest bleiben.

Fällt hingegen anfänglich der Punkt D mit dem Schwerpunkt G nicht zusammen, so muß, nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze, die Ebene der drei Körper sich um eine der in dieser Ebene liegenden Zentralhauptachsen der Anfangslage des Systems $P_1 P_2 P_3$ drehen, damit ihre Abstandsverhältnisse konstant bleiben.

Sind nun zudem ϱ_i', ϱ_i'' $(i = 1, 2, 3)$ von Null verschieden, so folgt aus (5, 11) oder (5, 12)

$$(6,6)\qquad \frac{\lambda_1}{m_1}\left\{\frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\} = \frac{\lambda_2}{m_2}\left\{\frac{d_1''}{\varrho_2''} - \frac{d_1'}{\varrho_2'}\right\} = \frac{\lambda_3}{m_3}\left\{\frac{d_1''}{\varrho_3''} - \frac{d_1'}{\varrho_3'}\right\},$$

$$(6,7)\qquad \frac{\lambda_1}{m_1}\left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\} = \frac{\lambda_2}{m_2}\left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_2'}\right\} = \frac{\lambda_3}{m_3}\left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_3'}\right\}$$

und daher auch

$$(6,8)\qquad \frac{\lambda_1}{m_1}\left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_1''}\right\} = \frac{\lambda_2}{m_2}\left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_2''}\right\} = \frac{\lambda_3}{m_3}\left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_3''}\right\};$$

woraus sich unmittelbar ergibt, daß in diesem Falle beide Größen d_1', d_1'' von Null verschieden sein müssen, denn andernfalls wäre die Ebene der drei Körper fest.

Ist nämlich $d_1' = 0$, so folgt aus (6, 7)

$$\frac{\lambda_1}{m_1} = \frac{\lambda_2}{m_2} = \frac{\lambda_3}{m_3}$$

und daher nach (6, 3)

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Dann wird aber nach (6, 2), (1, 4) und (1, 1)

$$\bar{d} = 0.$$

Andererseits gilt nach (3, 3) und (3, 2)

$$(6,9)\qquad \begin{cases} m_1 \varrho_1' \varrho_1'' \left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\} + m_2 \varrho_2' \varrho_2'' \left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_2'}\right\} + m_3 \varrho_3' \varrho_3'' \left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_3'}\right\} = 0, \\ m_1 \varrho_1' \varrho_1'' \left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_1''}\right\} + m_2 \varrho_2' \varrho_2'' \left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_2''}\right\} + m_3 \varrho_3' \varrho_3'' \left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_3''}\right\} = 0, \end{cases}$$

und nach (3, 2) und (1, 10)

$$(6,10)\qquad \begin{cases} \varrho_1' \lambda_1 \left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\} + \varrho_2' \lambda_2 \left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_2'}\right\} + \varrho_3' \lambda_3 \left\{1 - \frac{d_1'}{\varrho_3'}\right\} = 0. \\ \varrho_1'' \lambda_1 \left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_1''}\right\} + \varrho_2'' \lambda_2 \left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_2''}\right\} + \varrho_3'' \lambda_3 \left\{1 - \frac{d_1''}{\varrho_3''}\right\} = 0. \end{cases}$$

Wenn also die Größen λ_1, λ_2, λ_3, d_1', d_1'', ϱ_i', ϱ_i'' $(i = 1, 2, 3)$ die Beziehungen (6, 7) und (6, 8) erfüllen, so folgt aus (6, 9) und (6, 10)

$$\frac{m_1^3 \varrho_1' \varrho_1''}{\lambda_1} + \frac{m_2^3 \varrho_2' \varrho_2''}{\lambda_2} + \frac{m_3^3 \varrho_3' \varrho_3''}{\lambda_3} = 0,$$

oder nach (6, 3) für $\nu = 4$

$$(6,11)\qquad \frac{m_1 \varrho_1' \varrho_1''}{\alpha'^4} + \frac{m_2 \varrho_2' \varrho_2''}{\beta'^4} + \frac{m_3 \varrho_3' \varrho_3''}{\gamma'^4} = 0$$

und zugleich

$$(6,12)\qquad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i' = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=3} m_i \varrho_i'' = 0.$$

Wenn umgekehrt die Größen ϱ_i', ϱ_i'' $(i = 1, 2, 3)$ die Gleichungen (6, 11), (6, 12) und (3, 3) erfüllen, ohne daß das Dreieck der drei Körper anfänglich gleichseitig ist, so werden auch infolge von (6, 9) und (6, 10) die Beziehungen (6, 7), (6, 8) befriedigt und somit auch die Beziehungen (6, 6).

Ist nun

$$-\varepsilon \left\{\frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\} > 0,$$

so geht die Drehung um die z-Achse des Systems $G\,x\,y\,z$ vor sich, denn in diesem Falle ergibt sich aus der ersten Gleichung (3, 7)

$$(6,13)\qquad \omega_1 \equiv \omega = \frac{\omega'}{\lambda^3},$$

wobei λ eine Funktion von t ist, die im Anfangszeitpunkt t_1 den Wert Eins annimmt und der Differentialgleichung

$$(6,14)\quad \ddot{\lambda} = -\varepsilon f \frac{m_1 \alpha'^4 + m_2 \beta'^4 + m_3 \gamma'^4}{\beta'^4 \gamma'^4} \left\{1 - \frac{m_1 \alpha'^4 \varrho_1' + m_2 \beta'^4 \varrho_2' + m_3 \gamma'^4 \varrho_3'}{\varrho_1' (m_1 \alpha'^4 + m_2 \beta'^4 + m_3 \gamma'^4)}\right\} \frac{1}{\lambda^3}$$

genügt, und ω' den Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit darstellt, dessen Quadrat

$$\omega'^2 = -\varepsilon f \frac{m_1 \alpha'^4 + m_2 \beta'^4 + m_3 \gamma'^4}{\beta'^4 \gamma'^4} \left\{\frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\}$$

ist, wie man durch Vergleich des Wertes von ω^2 aus (6, 13) mit demjenigen, der durch Elimination von $\ddot{\lambda}$ zwischen den zwei ersten Gleichungen (5, 11) für $i = 1$ hervorgeht, findet.

Ist hingegen

$$-\varepsilon \left\{\frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'}\right\} < 0,$$

so erfolgt die Drehung um die y-Achse des Systems $Gxyz$, denn in diesem Falle erhält man ähnlicherweise aus (5, 12)

$$(6,15) \qquad \omega_2 = \frac{\omega'}{\lambda^2},$$

wobei nun

$$\omega'^2 = \varepsilon f \frac{m_1 \alpha'^4 + m_2 \beta'^4 + m_3 \gamma'^4}{\beta'^4 \gamma'^4} \left\{ \frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'} \right\}$$

ist und λ die Differentialgleichung

$$(6,16) \quad \dot{\lambda} = -\varepsilon f \frac{m_1 \alpha'^4 + m_2 \beta'^4 + m_3 \gamma'^4}{\beta'^4 \gamma'^4} \left\{ 1 - \frac{m_1 \alpha'^4 \varrho_1'' + m_2 \beta'^4 \varrho_2'' + m_3 \gamma'^4 \varrho_3''}{\varrho_1'' (m_1 \alpha'^4 + m_2 \beta'^4 + m_3 \gamma'^4)} \right\} \frac{1}{\lambda^3}$$

befriedigt.

Die Gleichungen (6, 13), (6, 14), wenn $-\varepsilon f \left\{ \frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'} \right\} > 0$ bzw. (6, 15), (6, 16), wenn $-\varepsilon f \left\{ \frac{d_1''}{\varrho_1''} - \frac{d_1'}{\varrho_1'} \right\} < 0$ ist, bilden nun die Differentialgleichungen der Bewegung und das ganze Problem kann mit Hilfe von elementaren Funktionen integriert werden.

Man kann daher folgenden Satz formulieren:

Wenn die Wechselwirkung von je zwei der drei Körper dem Produkt aus den Massen beider Körper und einer Potenz ihres Abstandes proportional ist, so existieren nur die von Lagrange *für das* Newtonsche *Dreikörperproblem angegebenen Lösungen, in denen die Abstandsverhältnisse der drei Körper während der Bewegung konstant bleiben, ausgenommen den Fall, bei dem diese Wirkung der dritten Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist; im letzteren Falle gibt es eine weitere derartige Lösung des Problems, bei der aber die Ebene der drei Körper sich um eine der in dieser Ebene liegenden Zentralhauptachsen der Anfangslage des Systems dreht.*

(Eingegangen am 16. März 1941.)

Molekulare Verbände*).

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Im Anschluß an einige frühere Arbeiten[1]) untersuche ich im folgenden eine Klasse von Verbänden, deren Elemente eine *Zerlegung* in noch näher zu beschreibende *Grundelemente* zulassen. Das Problem ist auf dem Boden der elementaren Zahlentheorie erwachsen, wo es sich darum handelt, die zusammengesetzten Zahlen in Primzahlen aufzuspalten. Diese zahlentheoretische Zerlegung stellt einen Sonderfall der verbandstheoretischen Zerlegung dar. Die Tragweite der letzteren geht aber, wie bei dem universalen Charakter der Theorie der Verbände nicht anders zu erwarten ist[2]), ganz erheblich über das angeführte Beispiel hinaus; insbesondere umfaßt die verbandstheoretische Zerlegung auch geometrisch interessante und bedeutsame Zerlegungen.

*) Alwin Korselt, geb. 17. März 1864, zum Geburtstag.

[1]) Vgl. z. B. die im Literaturverzeichnis unter [A. V. II] und [A. V. III] aufgeführten Arbeiten.

[2]) Das Prädikat der Universalität kommt der Theorie der Verbände in doppeltem Sinne zu: Einmal lassen sich in den verschiedensten Gebieten der Mathematik verbandartige Zusammenhänge feststellen, die auf eine tiefliegende gemeinsame Wurzel hinweisen; zum anderen ist die fundamentalste aller Wissenschaften, das ist die Logik, zu einem erheblichen Teil nur verbandstheoretisch zu erfassen. Universal ist ohne Zweifel auch die Gruppentheorie. Merkwürdigerweise unterscheiden sich aber die Theorie der Verbände und die Gruppentheorie in ihrem Verhältnis zur Logik. Es kann nicht bestritten werden, daß die Theorie der Verbände in der Logik, insbesondere als Boolesche Algebra in der Logik der Aussagen, beträchtliche Erfolge zu verzeichnen hat; demgegenüber ist die Idee der Gruppe auf diesem Gebiet bisher nicht als regulatives Prinzip in Erscheinung getreten. Diese Tatsache verkennt M. Bense im „Geist der Mathematik", einem Buch, das — in der Konzeption und Kühnheit der Sprache an Oswald Spengler erinnernd — ein packendes Bild von der Kraft des mathematischen Denkens entwirft. Bense spricht nämlich von Satz*gruppen*, wo es sich in Wirklichkeit um Satz*verbände* handelt (S. 78ff.). Er übersieht, daß die *Implikation* — nach Bense „Konsequenz" — nicht das geringste mit Gruppen zu tun hat, vielmehr eine rein verbandstheoretische Begriffsbildung ist. In diesem Zusammenhang darf auf die Bedeutung der Theorie der Verbände bzw. der damit verwandten Foradorischen Teiltheorie (vgl. Foradori [1] und [3]) für das Kontinuumproblem aufmerksam gemacht werden. Während nach atomistischer Auffassung das Kontinuum eine Anhäufung von Punkten ist, sieht Brouwer (vgl. Weyl [1], S. 77ff.) die charakteristische Eigenschaft des Kontinuums darin, daß es *Teile* hat. Die fundamentale

Was den zahlentheoretischen Sonderfall anbetrifft, so ist — verbandstheoretisch gesehen — eine zusammengesetzte Zahl nicht das Produkt ihrer Primzahlen, sondern das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ihrer Primzahlpotenzen, so daß bei verbandstheoretischer Auffassung nicht die Primzahlen, sondern die Primzahlpotenzen die Rolle der Grundelemente spielen. Wie so oft in der Mathematik, so zeigt sich auch hier, daß eine neue Theorie nicht nur neue Probleme aufwirft, sondern auch bereits gelösten Problemen neue Seiten abgewinnt.

Das verbandstheoretische Zerlegungsproblem führt ebenso wie das zahlentheoretische nicht nur auf die Frage nach der *Existenz*, sondern auch auf die Frage nach der *Eindeutigkeit* der Zerlegungen. Wir gehen in der vorliegenden Arbeit auf beide Fragen ein. Zunächst charakterisieren wir die Grundelemente. Sodann schränken wir den als Operationsbereich dienenden Verband durch zusätzliche Axiome so ein, daß die Existenz der Zerlegungen gesichert ist. Es gibt sowohl Verbände, deren Elemente genau eine Zerlegung aufweisen — die Boole-Schröderschen Verbände gehören dazu —, als auch Verbände, deren Elemente mehrfach zerlegt werden können; Beispiele dafür liefert vor allem die Geometrie.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir hier diejenigen Begriffe zusammen, auf die wir im Verlauf der Arbeit verschiedentlich zurückgreifen werden.

Erklärung 1. Ein Element e eines Verbandes M heißt eine *untere Spitze* von M, wenn es in M kein von e verschiedenes Element x gibt derart, daß

$$e \succ x, \quad \text{d. h.} \quad e \cup x = e$$

ist. Besitzt M eine untere Spitze, so wird M als *unten spitz* bezeichnet.

Beziehung, die zwischen *Ganzem* und *Teil* besteht, ist aber gerade Gegenstand der Theorie der Verbände bzw. der Teiltheorie. So sind es beachtliche Gründe, die zu der Annahme berechtigen, daß in den beiden genannten Theorien die zukünftige Ausgangsstellung für den entscheidenden Angriff auf das Kontinuumproblem zu erblicken ist. — Die Theorie der Verbände hat in den letzten Jahren verschiedentlich zusammenfassende Darstellungen erfahren, so Köthe [1] und Hermes-Köthe [1]. Der durch den Krieg bedingten besonderen Verhältnisse wegen darf ich bei dieser Gelegenheit die kürzlich in Buchform erschienene „Lattice Theory" von G. Birkhoff anzeigen. Wie mir der Verfasser schreibt, beabsichtigt er damit, eine Einführung in alle Zweige der Verbandstheorie zu geben, wobei er Wert darauf legt, vor dem Leser die organische Einheit der jungen Disziplin erstehen zu lassen.

Entsprechend heißt f eine *obere Spitze*, wenn für $f \neq x$ niemals

$$f \prec x, \quad \text{d. h.} \quad f \cap x = f$$

ist. Besitzt M eine obere Spitze, so wird M als *oben spitz* bezeichnet.

Jeder Verband hat höchstens eine untere Spitze; wir bezeichnen die untere Spitze in dieser Arbeit durchweg mit e. Ist M ein unten spitzer Verband, so ist

$$e \prec x, \quad \text{d. h.} \quad e \cap x = e$$

für jedes x aus M. Insbesondere hat jeder *endliche* Verband auch wirklich eine untere Spitze. Für einen endlichen Verband ist

$$e = a_1 \cap \ldots \cap a_n,$$

wenn

$$a_1, \ \ldots, \ a_n$$

die verschiedenen Elemente des Verbandes sind. Was die *unendlichen* Verbände anbelangt, so gibt es sowohl solche mit einer unteren Spitze als auch solche, für die das nicht der Fall ist.

Entsprechendes gilt hinsichtlich der oberen Spitze, die, wenn keine andere Festsetzung getroffen ist, im folgenden stets mit f bezeichnet wird[3]).

Erklärung 2. Sind a, b zwei Elemente eines Verbandes M derart, daß

$$a \succ b, \quad a \neq b$$

ist, gibt es überdies in M kein Element x derart, daß

$$a \succ x \succ b, \quad a \neq x, \quad x \neq b$$

ist, so heißt a ein *oberer Nachbar* von b in M und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von a in M.

Sind keine Mißverständnisse zu befürchten, so lassen wir hier wie auch in den übrigen Erklärungen den Zusatz „in M“ fort.

Einer der fundamentalsten und zugleich fruchtbarsten Begriffe der Theorie der Verbände ist der Begriff der *Elementunabhängigkeit*. Ich empfehle, diesen Begriff zukünftig stärker als bisher beim systematischen Aufbau der Theorie in den Vordergrund zu stellen. Die in den weiteren Paragraphen dieser Arbeit entwickelte Begriffswelt hat ihren Ursprung im Begriff der Elementunabhängigkeit. Seine Erklärung lautet:

Erklärung 3. Zwei Elemente a, b eines Verbandes M heißen voneinander *unabhängig*, wenn weder $a \succ b$ noch $a \prec b$ ist; andernfalls heißen a und b voneinander *abhängig*.

---

[3]) Unten bzw. oben spitze Verbände habe ich in früheren Arbeiten (vgl. z. B. [Verb. 8], S. 219) als unten bzw. oben *geschlossene* Verbände bezeichnet. Zur Vermeidung von Verwechslungen gebe ich die frühere Benennung auf.

Jedes Element ist von sich selbst abhängig. Ein Verband ist dann und nur dann linear, wenn seine Elemente zu je zweien voneinander abhängig sind.

Leicht ergibt sich auch die Richtigkeit des folgenden Satzes, der häufig als Kriterium Verwendung findet.

Satz 1. *Zwei Elemente a, b sind dann und nur dann voneinander unabhängig, wenn*

$$a \cup b \neq a, \quad a \cup b \neq b$$

ist.

Neben dem Begriff der Elementunabhängigkeit ist für die weiteren Ausführungen der Begriff der *Elementfremdheit* von besonderer Bedeutung. Seine Erklärung lautet:

Erklärung 4. Sind a, b Elemente eines unten spitzen Verbandes M derart, daß die beiden Abhängigkeiten

$$a > x, \quad b > x$$

nur $x = e$ als gemeinsame Lösung haben, so heißen a und b zueinander *fremd* in M; in Zeichen: $a \perp b$.

Mit $a \perp b$ gilt $b \perp a$. Für jedes a gilt $a \perp e$. Mit $a \perp b$ gilt $a \cap b = e$ und umgekehrt. Ferner ergibt sich sofort:

Satz 2. *Gilt $a \perp b$ und sind a', b' zwei den Bedingungen*

$$a > a', \quad b > b'$$

genügende Elemente, so gilt auch $a' \perp b'$.

Im Verlauf dieser Arbeit haben wir es vielfach mit Mengen zu tun, die aus mindestens zwei Elementen bestehen. Um Weitschweifigkeiten in der Ausdrucksweise zu vermeiden, mögen derartige Mengen kurz als *Systeme* bezeichnet werden.

§ 2

Das U-System.

Von nun an setzen wir den als *Grundgegebenheit* fungierenden Verband M als *endlich* voraus, so daß auch die U-Systeme — als Teilmengen von M — endlich sind. Die Übertragung der Ergebnisse auf unendliche Verbände bzw. unendliche U-Systeme bleibe einer besonderen Untersuchung vorbehalten.

Der Begriff der Elementunabhängigkeit läßt sich folgendermaßen verallgemeinern.

Erklärung 5. Ein System von n Elementen

$$x_1, \ldots, x_n \tag{1}$$

aus M derart, daß je zwei der Elemente (1) voneinander unabhängig sind, heiße ein *U-System*, genauer ein *n-gliedriges U-System* in M.

Die $\mathfrak{U}$-Systeme sind ungeordnete Mengen, so daß also zwei $\mathfrak{U}$-Systeme, die sich nur in der Reihenfolge der konstituierenden Elemente unterscheiden, als nicht verschieden gelten.

Satz 3. *Jedes Teilsystem eines $\mathfrak{U}$-Systems ist selbst ein $\mathfrak{U}$-System.*

Erklärung 6. Ist

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

ein $\mathfrak{U}$-System in M und gilt

$$a = x_1 \cup \ldots \cup x_n,$$

so heiße X ein $\mathfrak{U}$-*System für* a oder *von* a. Daneben gebrauchen wir auch die Wendung: Das Element a wird von dem $\mathfrak{U}$-System X erzeugt. Ein von einem $\mathfrak{U}$-System erzeugtes Element heiße *gespalten* in M.

Ist X ein $\mathfrak{U}$-System für a, so folgt sofort

$$a \neq x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 4. *Es seien*

$$y_1, \ldots, y_n \qquad (n \geqq 2)$$

Elemente aus M derart, daß

$$a = y_1 \cup \ldots \cup y_n$$

ist. Ist ferner

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

ein $\mathfrak{U}$-System in M derart, daß

$$a > x_\nu > y_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt, so ist X ein $\mathfrak{U}$-System für a.

Beweis. Es ist

$$a > x_1 \cup \ldots \cup x_n > y_1 \cup \ldots \cup y_n.$$

Satz 5. *Es sei a ein Element aus M und*

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

ein $\mathfrak{U}$-System in M derart, daß

$$a > x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt. Ist dann ein Teilsystem X' von X ein $\mathfrak{U}$-System für a, so ist auch X ein $\mathfrak{U}$-System für a.

Beweis. Unbeschadet der Allgemeinheit kann

$$X' = (x_1, \ldots, x_m) \qquad (m \leqq n)$$

angenommen werden. Definieren wir nun n Elemente $y_1, \ldots, y_n$ durch

$$y_1 = x_1, \ldots, y_m = x_m, \quad y_{m+1} = e, \ldots, y_n = e,$$

so ist

$$a = y_1 \cup \ldots \cup y_n.$$

Da überdies

$$a > x_\nu > y, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist, so ergibt sich die Behauptung nach Satz 4.

Satz 6. *Sind*

(2) $$x_1, \ldots, x_m \qquad (m \geqq 2)$$

Elemente aus M derart, daß

$$a = x_1 \cup \ldots \cup x_m, \quad a \neq x_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

ist, so gibt es wenigstens ein Teilsystem von (2), *das ein* U*-System für a ist.*

Beweis. Sind die Elemente (2) zu je zweien voneinander unabhängig, so ist (2) selbst ein U-System für a. Wir können also annehmen, daß es in (2) mindestens einmal zwei Elemente gibt, die voneinander abhängig sind. Unbeschadet der Allgemeinheit darf

$$x_{m-1} > x_m$$

angenommen werden, so daß

$$a = x_1 \cup \ldots \cup x_{m-1}$$

ist. Sind die Elemente

(3) $$x_1, \ldots, x_{m-1}$$

zu je zweien voneinander unabhängig, so bilden diese ein U-System für a. Andernfalls reduzieren wir (3) in derselben Weise wie vorher (2). Dieses Reduktionsverfahren setzen wir fort, bis es abbricht.

Wir bringen noch zwei Sätze über zweigliedrige U-Systeme.

Satz 7. *Das Elementepaar* (x, y) *ist dann und nur dann ein* U*-System für a, wenn*

$$a = x \cup y, \quad a \neq x, \quad a \neq y$$

ist.

Beweis. Satz 1.

Satz 8. *Für jedes gespaltene Element gibt es wenigstens ein zweigliedriges* U*-System.*

Beweis. Ist a gespalten und

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

ein U-System für a, so ist

$$a = (x_1 \cup \ldots \cup x_{n-1}) \cup x_n.$$

Ist nun

$$x_1 \cup \ldots \cup x_{n-1} \neq a,$$

so ist die Behauptung nach Satz 7 richtig. Ist aber

$$x_1 \cup \ldots \cup x_{n-1} = a,$$

was nur für $n > 2$ möglich ist, so verfahren wir mit dem System

$$x_1, \ldots, x_{n-1}$$

genau so wie vorher mit dem System X. Das damit eingeleitete Reduktionsverfahren bricht schließlich ab.

§ 3.

Das $\mathfrak{B}$-System.

Unter den $\mathfrak{U}$-Systemen zeichnen sich die in der folgenden Erklärung beschriebenen Systeme aus:

Erklärung 7. Das $\mathfrak{U}$-System

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

werde als ein $\mathfrak{B}$-*System* bezeichnet, wenn jedes x_ν ungespalten ist.

Satz 9. *Jedes Teilsystem eines $\mathfrak{B}$-Systems ist selbst ein $\mathfrak{B}$-System.*

Erklärung 8. Ist (4) ein $\mathfrak{B}$-System und gilt

$$a = x_1 \cup \ldots \cup x_n,$$

so heiße X ein $\mathfrak{B}$-*System für* a oder *von* a.

Die drei folgenden Sätze entsprechen den Sätzen 4, 5 und 6 in § 2.

Satz 10. *Es seien*

$$y_1, \ldots, y_n \qquad (n \geqq 2)$$

Elemente aus M derart, daß

$$a = y_1 \cup \ldots \cup y_n$$

ist. Ist ferner

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

ein $\mathfrak{B}$-System in M derart, daß

$$a > x_\nu > y_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt, so ist X ein $\mathfrak{B}$-System für a.

Beweis. Satz 4.

Satz 11. *Es sei a ein Element aus M und*

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

ein $\mathfrak{B}$-System in M derart, daß

$$a > x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt. Ist dann ein Teilsystem X' von X ein $\mathfrak{B}$-System für a, so ist auch X ein $\mathfrak{B}$-System für a.

Beweis. Satz 5.

Satz 12. *Sind*

$$x_1, \ldots, x_m \qquad (m \geqq 2) \tag{5}$$

ungespaltene Elemente aus M derart, daß

$$a = x_1 \cup \ldots \cup x_m, \quad a \neq x_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

ist, so gibt es wenigstens ein Teilsystem von (5), *das ein $\mathfrak{B}$-System für a ist.*

Beweis. Satz 6.

Dem folgenden Satz kommt als Existentialsatz ein besonderes Gewicht zu.

Satz 13. *Für jedes gespaltene Element gibt es wenigstens ein $\mathfrak{B}$-System.*

Beweis. Jedem $\mathfrak{U}$-System

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

in M läßt sich eine eindeutig bestimmte Menge $[X]$ von Elementen x aus M vermöge der Vorschrift zuordnen, daß x dann und nur dann Element von $[X]$ sein soll, wenn es wenigstens ein x_ν gibt derart, daß $x_\nu > x$ ist. Hiernach gehören stets die untere Spitze e und die Elemente x_ν zu $[X]$. Ferner gilt folgendes: Ist x ein Element von $[X]$ und y ein Element von M derart, daß $x > y$ ist, so ist auch y ein Element von $[X]$.

Nunmehr sei a ein gespaltenes Element und X ein $\mathfrak{U}$-System für a. Es sei X kein $\mathfrak{B}$-System, so daß wenigstens ein x_ν, etwa x_1, gespalten ist. Nach Satz 8 gibt es für x_1 wenigstens ein zweigliedriges $\mathfrak{U}$-System, etwa (y, z). Damit bilden wir das System

$$y, z, x_2, \ldots, x_n. \tag{6}$$

Wegen

$$a = y \cup z \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n; \quad a \neq y, a \neq z, a \neq x_\nu \quad (\nu = 2, \ldots, n)$$

gibt es nach Satz 6 ein Teilsystem X' von (6), das ein $\mathfrak{U}$-System für a ist. Ein Vergleich der zugehörigen Mengen $[X]$ und $[X']$ ergibt folgendes: Einerseits ist jedes Element von $[X']$ auch Element von $[X]$. Andererseits gibt es aber Elemente von $[X]$, die nicht Elemente von $[X']$ sind; ein derartiges Element ist beispielsweise x_1. Infolgedessen enthält $[X']$ weniger Elemente als $[X]$. Wie man von X zu X' gelangt, so gelangt man von X', wenn X' kein $\mathfrak{B}$-System ist, zu einem weiteren $\mathfrak{U}$-System X'', wobei die zugehörige Menge $[X'']$ weniger Elemente enthält als $[X']$. Dieses Reduktionsverfahren setzen wir fort, bis es abbricht. Alle Glieder der so entstehenden Folge

$$X, X', X'', \ldots$$

sind $\mathfrak{U}$-Systeme für a; insbesondere ist das letzte Glied ein $\mathfrak{B}$-System für a.

§ 4.

Molekulare Verbände.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem eigentlichen Gegenstand der Arbeit zu.

1. Wir schränken den Grundverband M durch die beiden folgenden *Axiome*[4]) ein:

I. Ist a ein ungespaltenes Element aus M, ist b ein Element aus M derart, daß $a > b$ gilt, so ist auch b ungespalten.

II. Je zwei ungespaltene Elemente a, b aus M sind fremd zueinander oder voneinander abhängig, d. h. es ist

$$a \perp b \quad \text{oder} \quad a > b \quad \text{oder} \quad a < b.$$

Das Axiom I schließt den in Fig. 1 dargestellten Verband, das Axiom II den in Fig. 2 dargestellten Verband aus.

Mit I sind die beiden folgenden Fassungen gleichwertig:

I'. Ist a ein ungespaltenes Element aus M, so bilden die Unterelemente von a einen linearen Unterverband von M.

I''. Ist a ein gespaltenes Element aus M, ist b ein Element aus M derart, daß $a < b$ gilt, so ist auch b gespalten.

Fig. 1.

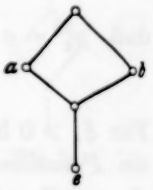

Fig. 2.

Erklärung 9. Ein endlicher Verband, der überdies den Axiomen I und II genügt, heiße ein *molekularer* Verband. Ist M molekular, so bezeichnen wir die ungespaltenen Elemente von M als die *Primärelemente*[5]) von M und die $\mathfrak{P}$-Systeme in M als die *$\mathfrak{P}$-Systeme* in M.

Der Begriff des Primärelementes ist das verbandstheoretische Analogon zum zahlentheoretischen Begriff der Primzahlpotenz.

Satz 14. *Es sei M ein molekularer Verband. Erzeugen die $\mathfrak{P}$-Systeme*

$$(x_1, \ldots, x_m), \quad (y_1, \ldots, y_n)$$

die Elemente a und b, sind ferner a und b fremd zueinander, so ist

$$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

ein $\mathfrak{P}$-System für das Element $a \cup b$.

Beweis. Nach Satz 2 gilt $x_\mu \perp y_\nu$ für alle μ und ν.

---

[4]) Dem Axiom I entsprechen die Axiome IX in [A. V. II] und (β) in [Verb. 9]; ob die beiden letzteren äquivalent sind, wie in [Verb. 9], S. 54 behauptet, ist noch nicht entschieden. Das vorliegende Axiom II besagt dasselbe wie die Axiome X in [A. V. II] und (α) in [Verb. 9]; vgl. auch Satz 15 in [Verb. 9], S. 53.

[5]) Die untere Spitze rechnen wir aber im allgemeinen nicht zu den Primärelementen.

Man kann die Primärelemente eines molekularen Verbandes M in der Weise in Klassen aufteilen, daß in derselben Klasse alle und nur die Primärelemente zusammengefaßt werden, die voneinander abhängig sind. Dabei ist es zweckmäßig, die untere Spitze von M als Primärelement zu behandeln. Jede Klasse ist ein linearer Unterverband von M und mag ein *Primärunterverband* von M genannt werden. Zwei verschiedene Primärunterverbände von M haben genau ein Element gemeinsam, nämlich die untere Spitze von M. Ist M_k ein Primärunterverband von M, so können die in M_k enthaltenen Primärelemente von M mit

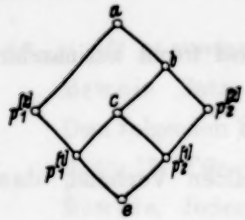

Fig. 3.

$$p_k^{[0]},\ p_k^{[1]},\ \ldots,\ p_k^{[\delta_k]}$$

bezeichnet werden; dabei sei, wenn ξ_k eine Zahl aus der Reihe

$$0,\ \ldots,\ \delta_k - 1$$

ist, $p_k^{[\xi_k]}$ der untere Nachbar von $p_k^{[\xi_k+1]}$ in M_k, so daß $p_k^{[0]} = e$ ist. Bei dieser Bezeichnungsweise gilt

$$p_k^{[0]} \prec p_k^{[1]} \prec \cdots \prec p_k^{[\delta_k]}.$$

Für $\xi_k > 0$ heiße $p_k^{[\xi_k]}$ ein *Primärelement vom Grad* ξ_k; insbesondere heiße $p_k^{[1]}$ ein *Primelement*. Offenbar sind die in M enthaltenen Primelemente mit den oberen Nachbarn von e identisch.

Wir schließen ein Beispiel an. Der in Fig. 3 dargestellte Verband achter Ordnung besitzt vier sich auf zwei Primärunterverbände verteilende Primärelemente, nämlich

$$p_1^{[1]},\ p_1^{[2]};\quad p_2^{[1]},\ p_2^{[2]},$$

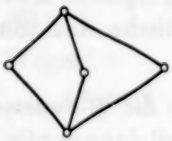
Fig. 4.

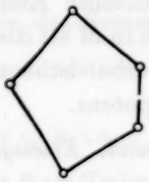
Fig. 5.

von denen $p_1^{[1]}$ und $p_2^{[1]}$ Primelemente sind. Ferner sind drei gespaltene Elemente vorhanden, nämlich a, b, c. Das Element a wird von den beiden $\mathfrak{P}$-Systemen

$$(p_1^{[2]},\ p_2^{[1]}) \quad \text{und} \quad (p_1^{[2]},\ p_2^{[2]})$$

erzeugt, während es für b und c je ein $\mathfrak{P}$-System gibt, nämlich

$$(p_1^{[1]},\ p_2^{[2]}) \quad \text{bzw.} \quad (p_1^{[1]},\ p_2^{[1]}).$$

Die linearen Verbände jeder Ordnung, insonderheit also alle Verbände erster, zweiter und dritter Ordnung, sind molekular. Ferner sind auch die nichtlinearen Verbände vierter Ordnung molekular. Erst für $m \geqq 5$ treten für jedes m neben molekularen auch nichtmolekulare Verbände m-ter Ordnung auf. So gibt es, wenn von dem linearen Fall abgesehen wird, zwei Typen molekularer Verbände fünfter Ordnung (Fig. 4 und 5) und zwei Typen nicht-

molekularer Verbände derselben Ordnung (Fig. 1 und 2). Weiter gibt es — wiederum vom linearen Fall abgesehen — sechs Typen molekularer Verbände sechster Ordnung (Fig. 6 bis 11) und acht Typen nichtmolekularer Verbände dieser Ordnung (Fig. 12 bis 19). Mit wachsender Ordnung nimmt sowohl die Anzahl der molekularen als auch der nichtmolekularen Typen rasch zu.

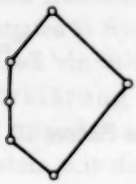

Fig. 6.

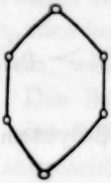

Fig. 7.

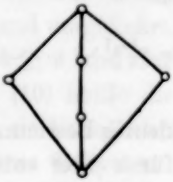

Fig. 8.

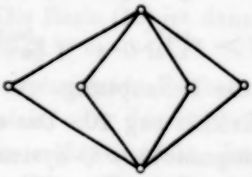

Fig. 9.

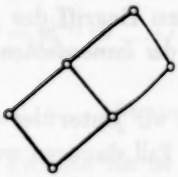

Fig. 10.

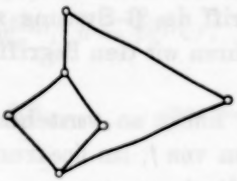

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

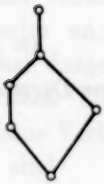

Fig. 15.

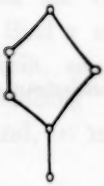

Fig. 16.

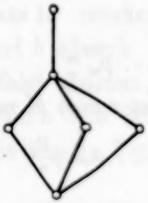

Fig. 17.

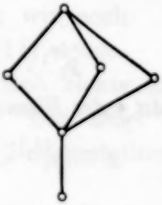

Fig. 18.

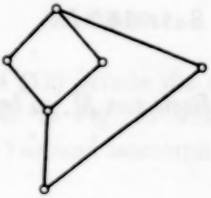

Fig. 19.

2. Weiterhin sei $\boldsymbol{M}$ ein molekularer Verband.

Satz 15. *Es sei* $\boldsymbol{M}$ *nicht linear; es sei* a *ein gespaltenes Element aus* $\boldsymbol{M}$. *Ist*

$$p_1^{[\alpha_1]}, \ldots, p_n^{[\alpha_n]} \qquad (\alpha_\nu > 0;\ \nu = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

die Gesamtheit der Primärelemente von $\boldsymbol{M}$ *derart, daß zwar*

$$a > p_\nu^{[\alpha_\nu]},$$

aber nicht mehr

$$a > p_\nu^{[\alpha_\nu + 1]}$$

ist[6]*, so ist* (7) *ein* $\mathfrak{P}$*-System für* a.

[6]) Dabei lassen wir es dahingestellt, ob $p_\nu^{[\alpha_\nu + 1]}$ überhaupt existiert.

Beweis. Nach Satz 13 gibt es wenigstens ein $\mathfrak{P}$-System für a. Unbeschadet der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß

$$p_1^{[\alpha_1']}, \ldots, p_m^{[\alpha_m']}$$

mit

$$\alpha_\mu \geqq \alpha_\mu' > 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ n \geqq m)$$

ein derartiges System ist. Aus

$$a > p_1^{[\alpha_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\alpha_n]} > p_1^{[\alpha_1]} \cup \ldots \cup p_m^{[\alpha_m]} > p_1^{[\alpha_1']} \cup \ldots \cup p_m^{[\alpha_m']}$$

folgt die Behauptung.

Erklärung 10. Das eindeutig bestimmte $\mathfrak{P}$-System des Satzes 15 heiße das *ausgezeichnete* $\mathfrak{P}$-System für a oder von a.

Beispielsweise ist $(p_1^{[2]}, p_2^{[2]})$ das ausgezeichnete $\mathfrak{P}$-System für das Element a des in Fig. 3 dargestellten Verbandes.

Wir bauen nunmehr den Begriff des $\mathfrak{P}$-Systems zum Begriff der *Basis* aus. Im Zusammenhang damit führen wir den Begriff der *kanonischen Darstellung* ein.

Erklärung 11. Ist M nicht linear, so verstehen wir unter der *Basis von* M das ausgezeichnete $\mathfrak{P}$-System von f; im linearen Fall dagegen werde f selbst als die Basis von M bezeichnet.

Ohne weiteres sieht man die Richtigkeit des folgenden Satzes ein:

Satz 16. *Ist*

$$p_1^{[\varphi_1]}, \ldots, p_n^{[\varphi_n]} \qquad (n \geqq 1) \tag{8}$$

die Basis von M, *so besitzt jedes Element* x *von* M *mindestens eine Darstellung*

$$x = p_1^{[\xi_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\xi_n]} \tag{9}$$

mit

$$\varphi_\nu \geqq \xi_\nu \geqq 0.$$

Erklärung 12. Gilt (9), so heiße

$$p_1^{[\xi_1]}, \ldots, p_n^{[\xi_n]} \tag{10}$$

eine *Basis von* x, während (9) selbst als eine *kanonische* Darstellung von x bezeichnet werde.

Zwei Basen, die sich nur in der Reihenfolge der konstituierenden Elemente unterscheiden, gelten als nicht wesentlich verschieden. „Basis von M" ist nicht dasselbe wie „Basis von f". Die untere Spitze hat eine einzige Basis, nämlich

$$p_1^{[0]}, \ldots, p_n^{[0]};$$

ebenfalls hat jedes Primärelement nur eine einzige Basis; dagegen können die übrigen Elemente mehrere Basen besitzen. Über das Verhältnis zwischen

Basis und $\mathfrak{P}$-System ist noch folgendes zu sagen: Ist (10) eine Basis von x, wobei x gespalten, d. h. sowohl von der unteren Spitze von M als auch von den in M enthaltenen Primärelementen verschieden ist, so ist die Gesamtheit der von e verschiedenen Glieder von (10) ein $\mathfrak{P}$-System von x; umgekehrt kann jedes $\mathfrak{P}$-System dadurch zu einer Elementbasis ergänzt werden, daß genügend oft das Element e hinzugefügt wird. Abgesehen von den eben erwähnten Ausnahmen kann man also auf diese Weise jeder Elementbasis ein bestimmtes $\mathfrak{P}$-System zuordnen und umgekehrt. Die Basis (10) ist dann und nur dann ein $\mathfrak{P}$-System, wenn $n \geqq 2$ und durchweg $\xi_\nu \neq 0$ ist.

Erklärung 13. Die Basis (10) heiße die *ausgezeichnete* Basis von x, wenn entweder $x = e$ ist oder x ein Primärelement ist oder das zugeordnete $\mathfrak{P}$-System mit dem ausgezeichneten $\mathfrak{P}$-System von x identisch ist. Ist (10) die ausgezeichnete Basis von x, so heiße (9) die *ausgezeichnete* Darstellung von x.

Satz 17. *Es sei* (8) *die Basis von* M. *Gilt in kanonischer Darstellung*

$$(11)\quad a = p_1^{[\alpha_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\alpha_n]}, \quad b = p_1^{[\beta_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\beta_n]},$$

so ist

$$(12)\quad a \cup b = p_1^{[\max(\alpha_1, \beta_1)]} \cup \ldots \cup p_n^{[\max(\alpha_n, \beta_n)]}.$$

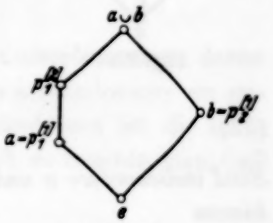

Fig. 20.

Beweis. Es ist

$$p_\nu^{[\alpha_\nu]} \cup p_\nu^{[\beta_\nu]} = p_\nu^{[\max(\alpha_\nu, \beta_\nu)]}.$$

Im Hinblick auf Satz 19 merken wir noch folgendes an: Sind a und b durch (11) *ausgezeichnet* dargestellt, so folgt daraus noch nicht, daß (12) gerade die *ausgezeichnete* Darstellung von $a \cup b$ ist. Das zeigt der in Fig. 20 wiedergegebene Verband, der mit dem in Fig. 5 dargestellten Verband isomorph ist. Hier sind

$$a = p_1^{[1]} \cup p_2^{[0]}, \quad b = p_1^{[0]} \cup p_2^{[1]}$$

ausgezeichnete Darstellungen. Gemäß (12) ist

$$a \cup b = p_1^{[1]} \cup p_2^{[1]};$$

die ausgezeichnete Darstellung ist aber

$$a \cup b = p_1^{[2]} \cup p_2^{[1]}.$$

Satz 18. *Gilt in kanonischer Darstellung*

$$(13)\quad a = p_1^{[\alpha_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\alpha_n]}, \quad b = p_1^{[\beta_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\beta_n]},$$

gilt überdies

$$(14)\quad \alpha_\nu \geqq \beta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so ist

$$(15)\quad a > b.$$

Beweis. Nach Satz 17 ist $a \cup b = a$.

Wie sofort ersichtlich ist, kann der Satz 18 folgendermaßen *umgekehrt* werden: Aus (15) folgt (14), wenn a in (13) *ausgezeichnet* dargestellt ist. Ist dagegen die Zusatzbedingung nicht erfüllt, so kann (14) nicht mehr erzwungen werden, wie der in Fig. 21 wiedergegebene Verband zeigt, der mit dem in Fig. 4 dargestellten Verband isomorph ist. Hier ist

$$a = p_1^{[1]} \cup p_2^{[1]} \cup p_3^{[0]}, \quad b = p_1^{[0]} \cup p_2^{[0]} \cup p_3^{[1]};$$

überdies ist (15) in Kraft; dagegen gilt (14) nicht durchweg.

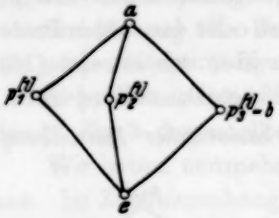

Fig. 21.

Der folgende Satz, der das auf die Verknüpfung $\frown$ bezügliche Gegenstück zu Satz 17 ist, läßt erkennen, daß die Verknüpfung $\frown$ im allgemeinen weniger leistet als die Verknüpfung $\cup$.

Satz 19. *Es seien a und b durch* (11) *kanonisch dargestellt. Setzt man*

$$c = p_1^{[\min(\alpha_1, \beta_1)]} \cup \ldots \cup p_n^{[\min(\alpha_n, \beta_n)]}, \tag{16}$$

so ist

$$a \frown b > c. \tag{17}$$

Sind insbesondere a und b durch (11) *ausgezeichnet dargestellt, so gilt über* (17) *hinaus*

$$a \frown b = c \tag{18}$$

und zugleich wird — anders wie bei Satz 17 *— das Element $a \frown b$ durch* (16) *ausgezeichnet dargestellt.*

Beweis. Nach Satz 18 ist

$$a > c, \quad b > c,$$

woraus (17) folgt. Was den zweiten Teil der Behauptung anbetrifft, so sei

$$a \frown b = p_1^{[\xi_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\xi_n]}$$

die ausgezeichnete Darstellung von $a \frown b$. Nach der Umkehrung von Satz 18 ist

$$\alpha_\nu \geqq \xi_\nu, \quad \beta_\nu \geqq \xi_\nu$$

und somit

$$\min(\alpha_\nu, \beta_\nu) \geqq \xi_\nu.$$

Wegen (17) ist andererseits

$$\xi_\nu \geqq \min(\alpha_\nu, \beta_\nu).$$

Folglich gilt (18).

Daß (18) nicht zu gelten braucht, wenn a und b nicht ausgezeichnet dargestellt sind, zeigt wiederum Fig. 21. Für

$$a = p_1^{[1]} \cup p_2^{[1]} \cup p_3^{[0]}, \quad b = p_1^{[0]} \cup p_2^{[0]} \cup p_3^{[1]}$$

liefert nämlich (16)

$$c = p_1^{[0]} \cup p_2^{[0]} \cup p_3^{[0]} = e,$$

während auf der anderen Seite

$$a > b, \quad \text{d. h.} \quad a \cap b = b$$

ist, so daß (18) nicht erfüllt ist.

Satz 20. *Es sei M nicht linear. Bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Ordnung von M, so gilt, wenn*

$$p_1^{[\varphi_1]}, \ldots, p_n^{[\varphi_n]} \qquad (n > 1)$$

die Basis von M ist,

$$2 + \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu \leqq \mathfrak{A} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} (\varphi_\nu + 1). \tag{19}$$

Beweis. Ersichtlich enthält M außer den Primärelementen, deren Anzahl gleich $\sum \varphi_\nu$ ist, und der unteren Spitze e noch mindestens ein gespaltenes Element, nämlich die obere Spitze f; infolgedessen ist die linke Hälfte von (19) richtig. Was die rechte Hälfte anbetrifft, so beachte man, daß durch den Ausdruck

$$p_1^{[\xi_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\xi_n]} \qquad (\xi_\nu = 0, \ldots, \varphi_\nu; \ \nu = 1, \ldots, n)$$

alle Elemente von M kanonisch dargestellt werden. Die Anzahl dieser Darstellungen ist gleich $\prod(\varphi_\nu + 1)$. Da es aber für dasselbe Element von M mehrere kanonische Darstellungen geben kann, erreicht $\mathfrak{A}$ möglicherweise nicht den angegebenen Wert.

Anmerkung. Ist M linear und sind

$$p^{[1]}, \ldots, p^{[\varphi]} \qquad (\varphi \geqq 1)$$

die verschiedenen Primärelemente von M, so ist

$$\mathfrak{A} = \varphi + 1.$$

§ 5.

Unimolekulare Verbände.

Die in der Einleitung aufgeworfene Frage nach der *Eindeutigkeit* der Zerlegungen führt dazu, aus der Masse der molekularen Verbände die in der folgenden Erklärung beschriebene Klasse herauszuheben.

Erklärung 14. Ein molekularer Verband M heiße *unimolekular*, wenn jedes Element von M genau eine Basis besitzt.

Hiernach ist klar, daß bei einem unimolekularen Verband die Begriffe „kanonische Darstellung" und „ausgezeichnete Darstellung" dasselbe bedeuten.

Satz 21. *Ein molekularer Verband mit der Basis*

$$p_1^{[\varphi_1]}, \ \ldots, \ p_n^{[\varphi_n]}$$

ist dann und nur dann unimolekular, wenn

$$\mathfrak{A} = \prod_{\nu=1}^{n} (\varphi_\nu + 1)$$

ist.

Beweis. Für einen unimolekularen Verband stimmt die Anzahl der Elemente mit der Anzahl der kanonischen Darstellungen überein.

Aus Satz 21 folgt sofort, daß ein unimolekularer Verband, dessen Ordnung eine Primzahl ist, linear ist.

Satz 22. *Ist M ein unimolekularer Verband und sind a, b Elemente aus M mit den kanonischen Darstellungen*

$$a = p_1^{[\alpha_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\alpha_n]}, \quad b = p_1^{[\beta_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\beta_n]}, \tag{20}$$

so ist dann und nur dann $a > b$, wenn

$$\alpha_\nu \geqq \beta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist.

Beweis. Satz 18 und Umkehrung.

Satz 23. *Ein molekularer Verband ist dann und nur dann unimolekular, wenn er zugleich distributiv ist.*

Beweis. Es sei M unimolekular. Sind a, b Elemente aus M mit den kanonischen Darstellungen (20), so ist nach Satz 17

$$a \cup b = p_1^{[\max(\alpha_1, \beta_1)]} \cup \ldots \cup p_n^{[\max(\alpha_n, \beta_n)]}$$

und nach Satz 19

$$a \cap b = p_1^{[\min(\alpha_1, \beta_1)]} \cup \ldots \cup p_n^{[\min(\alpha_n, \beta_n)]}.$$

Um die Distributivität nachzuweisen, hat man zu zeigen, daß für drei beliebige Elemente a, b, c aus M

$$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c) \tag{21}$$

ist. Der Nachweis dafür verläuft so: Gilt in kanonischer Darstellung

$$c = p_1^{[\gamma_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\gamma_n]},$$

so ist einerseits

$$(a \cup b) \cap c = p_1^{[\varrho_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\varrho_n]}$$

mit

$$\varrho_\nu = \min(\max(\alpha_\nu, \beta_\nu), \gamma_\nu);$$

andererseits ist

$$(a \cap c) \cup (b \cap c) = p_1^{[\sigma_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\sigma_n]}$$

mit

$$\sigma_\nu = \max(\min(\alpha_\nu, \gamma_\nu), \min(\beta_\nu, \gamma_\nu)).$$

Ist nun $\alpha_\nu \geqq \beta_\nu$, so ist

$$\varrho_\nu = \min(\alpha_\nu, \gamma_\nu)$$

und wegen

$$\min(\alpha_\nu, \gamma_\nu) \geqq \min(\beta_\nu, \gamma_\nu)$$

auch

$$\sigma_\nu = \min(\alpha_\nu, \gamma_\nu).$$

Ist dagegen $\alpha_\nu \leqq \beta_\nu$, so findet man

$$\varrho_\nu = \min(\beta_\nu, \gamma_\nu), \quad \sigma_\nu = \min(\beta_\nu, \gamma_\nu).$$

Es ist also stets $\varrho_\nu = \sigma_\nu$, so daß (21) in Kraft ist.

Daß umgekehrt aus der Molekularität und Distributivität von M auch die Unimolekularität von M folgt, ist bekannt. Der Beweis ist etwas langwierig. Wir verzichten deshalb auf seine Wiedergabe und bitten, den Beweis in einer früheren Arbeit[7]) nachzulesen.

Satz 24. *Ist M ein unimolekularer Verband, so ist, wenn a, b Elemente aus M mit $a > b$ sind, auch der gesättigte Unterverband $r(a, b)$ von M unimolekular.*

Beweis. Der Unterverband $r(a, b)$ besteht[8]), wenn a und b die kanonischen Darstellungen (20) haben, aus allen und nur den Elementen x, für die

$$x = p_1^{[\xi_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\xi_n]} \qquad (\alpha_\nu \geqq \xi_\nu \geqq \beta_\nu) \tag{22}$$

ist. Setzt man

$$\xi_\nu - \beta_\nu = \eta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so entspricht jedem der Elemente (22) umkehrbar eindeutig ein Element

$$y = p_1^{[\eta_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\eta_n]} \qquad (\alpha_\nu - \beta_\nu \geqq \eta_\nu \geqq 0) \tag{23}$$

aus M. Wie man leicht einsieht, ist der Verband der Elemente (22) isomorph mit dem Verband der Elemente (23); und da der letztere offenbar unimolekular ist, gilt dasselbe auch für den ersteren.

Es liegt nahe, die folgende Verallgemeinerung des Satzes 24 zu versuchen: Ist M ein *molekularer* Verband, so ist, wenn a, b Elemente aus M mit $a > b$ sind, auch $r(a, b)$ *molekular*. Diese Vermutung läßt sich jedoch nicht aufrecht

---

[7]) Vgl. z. B. [A. V. II], Satz 21–24.

[8]) Statt $r(a, b)$ findet auch die Bezeichnung a/b Verwendung.

halten, wie ein Beispiel zeigt. Es sei M der in Fig. 22 dargestellte molekulare Verband siebenter Ordnung. Hier ist der Unterverband $r(a, b)$ vom Typus der Fig. 2 und also nicht molekular.

Satz 25. *Es sei M ein unimolekularer Verband mit der Basis*

$$p_1^{[\varphi_1]}, \ldots, p_n^{[\varphi_n]}.$$

Bezeichnet $\mathfrak{B}$ die Anzahl der gesättigten Unterverbände von M, wobei auch die einzelnen Elemente von M als gesättigte Unterverbände von M aufgefaßt werden, so gilt

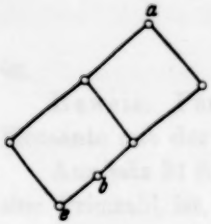

Fig. 22.

$$\mathfrak{B} = \prod_{\nu=1}^{n} \binom{\varphi_\nu + 2}{2}. \tag{24}$$

Beweis. Es seien

$$x = p_1^{[\xi_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\xi_n]}, \quad y = p_1^{[\eta_1]} \cup \ldots \cup p_n^{[\eta_n]}$$

zwei kanonisch dargestellte Elemente aus M. Offenbar stimmt $\mathfrak{B}$ mit der Anzahl der Paare (x, y) überein, für die $x > y$ ist. Diese Anzahl läßt sich folgendermaßen bestimmen. Ist y ein festes Element aus M, so ist dann und nur dann $x > y$, wenn x dem Unterverband $r(f, y)$ angehört. Dieser Unterverband enthält aber soviel Elemente, wie der Ausdruck

$$\prod_{\nu=1}^{n} (\varphi_\nu - \eta_\nu + 1)$$

angibt. Läßt man jetzt y alle Elemente von M durchlaufen, so erhält man

$$\mathfrak{B} = \sum_{\eta_1=0}^{\varphi_1} \ldots \sum_{\eta_n=0}^{\varphi_n} \prod_{\nu=1}^{n} (\varphi_\nu - \eta_\nu + 1).$$

Für die rechte Seite kann man

$$\prod_{\nu=1}^{n} \sum_{\eta_\nu=0}^{\varphi_\nu} (\varphi_\nu - \eta_\nu + 1)$$

schreiben. Wegen

$$\sum_{\eta_\nu=0}^{\varphi_\nu} (\varphi_\nu - \eta_\nu + 1) = \binom{\varphi_\nu + 2}{2}$$

folgt daraus (24).

Die linearen Verbände aller Ordnungen sind unimolekular. Ferner ist auch der nichtlineare Verband vierter Ordnung unimolekular. Abgesehen von den linearen Verbänden gibt es keinen unimolekularen Verband fünfter Ordnung; dagegen gibt es einen Typus nichtlinearer unimolekularer Verbände sechster Ordnung, nämlich den in Fig. 10 dargestellten Typ.

Betrachtet man die Fig. 4 bis 11, so könnte man zu der Vermutung kommen, daß ein molekularer Verband notwendigerweise unimolekular ist,

wenn es für die obere Spitze genau eine kanonische Darstellung gibt. Daß das allgemein aber nicht zutrifft, läßt der in Fig. 23 wiedergegebene molekulare Verband erkennen, der mit dem Verband der Fig. 22 isomorph ist. Der in Frage stehende Verband ist nicht unimolekular, wie bereits bemerkt und wie z. B. daraus hervorgeht, daß das Element a zwei wesentlich verschiedene kanonische Darstellungen, nämlich

$$a = p_1^{[1]} \cup p_2^{[1]}, \quad a = p_1^{[2]} \cup p_2^{[1]}$$

hat. Andererseits hat f nur eine einzige kanonische Darstellung, nämlich

$$f = p_1^{[3]} \cup p_2^{[1]}.$$

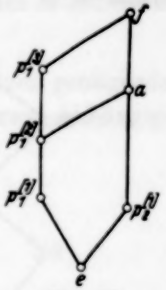

Fig. 23.

Zu den unimolekularen Verbänden gehören insbesondere die *Boole-Schröderschen* Verbände [9]), deren große Domäne die Logik der Aussagen ist. Um es noch einmal zu betonen: Die Grundgesetze der Logik sind nicht in der Sprache der Gruppen, sondern in der Sprache der Verbände geschrieben. Man zeigt leicht, daß ein unimolekularer Verband M dann und nur dann Boole-Schrödersch ist, wenn die Basis von M nur aus *Primelementen* besteht; für einen solchen Verband ist also

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 1$$

und somit

$$\mathfrak{A} = 2^n.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein unimolekularer Verband M die Eigenschaft hat, Boole-Schrödersch zu sein, ist, wie man ebenfalls leicht erkennt, ferner auch der Umstand, daß M *komplementär* ist [10]).

Für jeden Wert von n gibt es einen einzigen Typus Boole-Schröderscher Verbände; beispielsweise ist für $n = 2$ der nichtlineare Verband vierter Ordnung Boole-Schrödersch. Zu den Boole-Schröderschen Verbänden rechnen wir auch die aus einem einzigen Element bestehenden Verbände.

Satz 26. *Ist M ein Boole-Schröderscher Verband, so ist, wenn a, b Elemente aus M mit $a > b$ sind, auch $r(a, b)$ Boole-Schrödersch. Überdies ist, wenn n Primelemente in M vorhanden sind* [11]),

$$\mathfrak{B} = 3^n.$$

Beweis. Satz 24 und 25.

[9]) Näheres über derartige Verbände in [Verb. 5] und [Verb. 6].

[10]) Molekularität an Stelle von Unimolekularität reicht nicht aus, wie Fig. 4 zeigt.

[11]) Eine Berichtigung: Der Satz 28 in [Verb. 6] ist ungenau formuliert; er ist durch den ersten Teil des jetzigen Satzes 26 zu ersetzen. Ferner sind die Sätze 35 und 37 in [Verb. 6] — der letztere entspricht dem zweiten Teil des jetzigen Satzes 26 — dahin zu ergänzen, daß unter $\mathfrak{a}_\lambda$ die Anzahl der *gesättigten* Unterverbände vom Rang λ und unter $\mathfrak{a}$ die Anzahl aller *gesättigten* Unterverbände von M zu verstehen ist.

Um einen Überblick über die mannigfachen Beziehungen zu gewinnen, die zwischen den verschiedenen Verbandsarten bestehen, empfiehlt es sich, die Verwandtschaftsverhältnisse graphisch — etwa wie in Fig. 24 — darzustellen. Die Bedeutung der Buchstaben ist aus der beigefügten Tafel ersichtlich[12]).

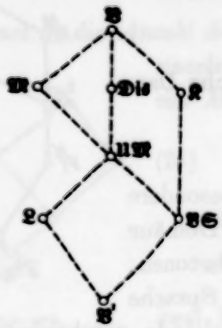

Fig. 24.

	Der Verband ist:
$\mathfrak{B}$	allgemein
$\mathfrak{M}$	molekular
$\mathfrak{UM}$	unimolekular
Dis	distributiv
$\mathfrak{K}$	komplementär
$\mathfrak{BS}$	BOOLE-SCHRÖDERsch
$\mathfrak{L}$	linear
$\mathfrak{B}'$	von der Ordnung 1 oder 2

§ 6.

Zwei Sätze über distributive Verbände.

In diesem Paragraphen sei M zunächst ein beliebiger, also nicht notwendigerweise molekularer Verband, der überdies sowohl endlich als auch unendlich sein kann.

Sind a, b, c Elemente aus M und ist $a > b$, so gilt, wie man sofort feststellt,

$$(25') \qquad (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = a \cap (b \cup c),$$

$$(25'') \qquad (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = b \cup (c \cap a).$$

Vermittelst dieser Relationen lassen sich leicht die beiden folgenden Sätze beweisen[13]):

Satz 27. *Bestehen zwischen je drei Elementen eines* DEDEKINDschen *Verbandes M höchstens zwei Unabhängigkeiten, so ist M distributiv.*

Beweis. Sind a, b, c drei der Voraussetzung des Satzes genügende Elemente aus M, so besteht zwischen denselben mindestens eine Abhängigkeit. Es genügt, den Fall $a > b$ zu betrachten. Dann gilt, da M DEDEKINDsch ist,

$$a \cap (b \cup c) = b \cup (c \cap a).$$

---

[12]) Fig. 24 darf nicht als Verband interpretiert werden, wie z. B. daraus hervorgeht, daß ein zugleich molekularer und komplementärer Verband — vgl. Fußnote 10 — nicht notwendigerweise BOOLE-SCHRÖDERsch ist.

[13]) Vgl. [Verb. 4], S. 270, Satz 17 und S. 276, Satz 27

Wegen (25′) und (25″) folgt

$$(26) \qquad (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a),$$

wodurch M als distributiv charakterisiert ist.

Satz 28. *Besteht zwischen je drei Elementen eines Verbandes M höchstens eine Unabhängigkeit, so ist M distributiv.*

Beweis. Sind a, b, c drei der Voraussetzung des Satzes genügende Elemente aus M, so bestehen zwischen denselben mindestens zwei Abhängigkeiten. Es genügt, den Fall

$$a > b, \quad a > c$$

zu betrachten. Dafür ist

$$a \cap (b \cup c) = b \cup c, \quad b \cup (c \cap a) = b \cup c.$$

Wegen (25′) und (25″) folgt wiederum (26).

Anmerkung. Für den Satz 27 muß M als *Dedekindsch* vorausgesetzt werden, wenn die Distributivität erzwungen werden soll. Das zeigt der in Fig. 5 dargestellte Verband, der nicht Dedekindsch, also auch nicht distributiv ist; trotzdem bestehen zwischen je drei Elementen desselben höchstens zwei Unabhängigkeiten.

Was die molekularen, also unimolekularen Verbände anbelangt, die den Sätzen 27 und 28 genügen, so können diese höchstens zwei verschiedene Primärunterverbände enthalten; insbesondere genügen alle linearen Verbände den beiden Sätzen. Unter den Satz 27 fallen außerdem alle unimolekularen Verbände, für die

$$f = p_1^{[\varphi_1]} \cup p_2^{[\varphi_2]}$$

ist, falls eine der beiden Hochzahlen, etwa φ_1, den Wert 1 hat, während die andere, also φ_2, beliebig ist. Ist darüber hinaus auch $\varphi_2 = 1$, so ergibt sich der nichtlineare Verband vierter Ordnung; ist dagegen $\varphi_2 = 2$, so erhält man den in Fig. 10 wiedergegebenen Verband sechster Ordnung. Unter den Satz 28 fällt nur ein nichtlinearer unimolekularer Verband, nämlich wieder der nichtlineare Verband vierter Ordnung.

Literaturverzeichnis.

M. Bense.

[1] Geist der Mathematik. München und Berlin 1939.

G. Birkhoff.

[13] Lattice Theory. American Mathematical Society 1940.

E. Foradori.

[1] Grundgedanken der Teiltheorie. Leipzig 1937.

[3] Teiltheorie und Verbände. Deutsche Math. 5 (1940), S. 37–43.

H. Hermes und G. Köthe.

[1] Theorie der Verbände. Enzykl. d. Math. Wissensch. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

S. Izumi.

[1] Lattice theoretic foundation of circle geometry. Proc. Imp. Acad. Tokyo (Japan) 16 (1940), S. 515—517.

[2] An abstract integral, IV. Ebenda 17 (1941), S. 1—4.

S. Izumi und M. Nakamura.

[1] An abstract integral, III. Proc. Imp. Acad. Tokyo (Japan) 16 (1940), S. 518—523.

F. Klein-Barmen.

[A. V. II] Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 106 (1932), S. 114—130.

[A. V. III] Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 39—60.

[Verb. 4] Dedekindsche und distributive Verbände. Ebenda 41 (1936), S. 261—280.

[Verb. 5] Boole-Schrödersche Verbände. Deutsche Math. 1 (1936), S. 528—537.

[Verb. 6] Weitere Untersuchungen über Boole-Schrödersche Verbände. Ebenda 1 (1936), S. 618—632.

[Verb. 8] Über die ausgezeichneten Darstellungen der Elemente verzahnter harmonischer Verbände. Ebenda 2 (1937), S. 216—241.

[Verb. 9] Ein weiterer Beitrag zum Problem der Zerlegung der Elemente gewisser harmonischer Verbände. Ebenda 3 (1938), S. 46—64.

[A. V. 4] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Math. Zeitschr. 47 (1940), S. 85—104.

G. Köthe.

[1] Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie. Jber. dtsch. Math.-Ver. 47 (1937), S. 125—144.

F. Maeda.

[6] Partially ordered linear spaces. Journ. of science of the Hirosima University (Japan) 10 (1940), S. 137—150.

[7] Relative dimensionality in operator rings. Ebenda 11 (1941), S. 1—6.

M. Nakamura.

[1] Partially ordered rings. The Tôhoku Math. Journ. (Japan) 47 (1940), S. 251—254.

H. Weyl.

[1] Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 39—79.

(Eingegangen am 25. März 1941.)

Einschließungssatz für die Eigenwerte von Integralgleichungen.

Von

L. Collatz in Karlsruhe.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich einen Einschließungssatz für Eigenwerte von Integralgleichungen unter speziellen Voraussetzungen bewiesen; es wurde für die hier in (2) auftretenden Größen $K(s,t) \geqq 0$, $F_0(t) \geqq 0$ verlangt. Mittlerweile gelang es von diesen speziellen Voraussetzungen freizukommen. Ich verdanke Herrn Iglisch eine Vereinfachung beim Hilfssatz 1.

Vorgelegt sei eine lineare Integralgleichung der Gestalt

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1}$$

Dabei sei $K(s,t)$ ein gegebener, symmetrischer, quadratisch integrabler Kern mit mittlerer Stetigkeit[2]).

$F_0(s)$ sei eine im abgeschlossenen Intervall a, b stetige Funktion. Nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen bildet man, von F_0 ausgehend, die Funktion

$$F_1(s) = \int K(s,t)\, F_0(t)\, dt \tag{2}$$

($\int$ ohne Angaben der Grenzen bedeutet $\int_a^b$).

Dann gilt der folgende

Einschließungssatz. Liegt die Funktion $G(s) = \frac{F_0(s)}{F_1(s)}$ im Grundgebiet zwischen endlichen Grenzen $G_{\min}$ und $G_{\max}$ und hat G ein festes Vorzeichen, so schließen $G_{\min}$ und $G_{\max}$ mindestens einen Eigenwert λ_k von (1) ein:

$$G_{\min} \leqq \lambda_k \leqq G_{\max}.$$

Beweis. Zum Beweise wird die Courantsche Maximum-Minimum-Definition der Eigenwerte für etwas allgemeinere Integralgleichungen als (1) gebraucht. Für die Eigenwerte von (1) lautet sie bekanntlich[3]): Es seien

[1]) Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 706.

[2]) G. Hamel, Integralgleichungen, S. 68. Berlin, Julius Springer, 1937.

[3]) R. Courant - D. Hilbert, Methoden d. math. Physik, Bd. I, 2. Aufl., S. 113 (1931).

$v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ irgendwelche gegebenen stetigen Funktionen und $k_n\{v_i\}$ das Maximum oder die obere Grenze, die

$$J_K(\varphi, \varphi) = \iint K(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$$

unter den Nebenbedingungen $\int \varphi^2 ds = 1$ und $\int \varphi v_i ds = 0$ annehmen kann. Dann ist der Reziprokwert des n-ten positiven Eigenwertes λ_n von (1) das Minimum von $k_n\{v_i\}$, wenn für v_i alle zulässigen Funktionssysteme in Betracht gezogen werden.

Nun sei $r(s)$ eine im abgeschlossenen Intervall a, b stetige und positive Funktion. Setzt man $\varphi(s) = \sqrt{r(s)} \cdot \psi(s)$ und $K(s,t) \cdot \sqrt{r(s)r(t)} = L(s,t)$, so geht (1) in die Integralgleichung (3) über:

$$\psi(s) \cdot r(s) = \lambda \int L(s,t)\,\psi(t)\,dt \tag{3}$$

und der Courantsche Satz lautet

Hilfssatz 1. Der Reziprokwert des n-ten positiven Eigenwertes von (3) ist der kleinste Wert, den das Maximum oder die obere Grenze von $J_L(\psi, \psi)$ annehmen kann, wenn ψ außer der Bedingung $H(\psi) = \int r(s) \cdot \psi^2(s) ds = 1$ noch $n-1$ Bedingungen der Form $\int \psi w_i ds = 0$ unterworfen ist und das Maximum in Abhängigkeit von den w_i betrachtet wird.

Entsprechend werden die negativen Eigenwerte von (3) durch das Maximum des Minimums von $J_L(\psi, \psi)$ bei den entsprechenden Bedingungen definiert.

Genau wie bei Courant-Hilbert, S. 346 und 357, kann man, anstatt J_L unter der Bedingung $H = 1$ zum Minimum zu machen, auch das Minimum von $J_L : H$ unter Verzicht auf die Nebenbedingung $H = 1$ aufsuchen, und daraus ergibt sich unmittelbar der Vergleich:

Hilfssatz 2. Wird in der Integralgleichung (3) der als positiv vorausgesetzte Koeffizient $r(s)$ durch einen nirgends kleineren Koeffizienten $r^*(s)$ ersetzt, so sind die Beträge sämtlicher Eigenwerte λ^* nicht kleiner als die der entsprechenden Eigenwerte λ von (3):

$$\lambda_k^* \geqq \lambda_k > 0, \quad \lambda_{-k}^* \leqq \lambda_{-k} < 0$$

(die Vorzeichen der Eigenwerte bleiben erhalten).

Nun werden die drei Integralgleichungen

$$\frac{\varphi(s)}{G_{\max}} = \lambda' \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

$$\frac{\varphi(s)}{G(s)} = \lambda^* \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\frac{\varphi(s)}{G_{\min}} = \lambda'' \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

betrachtet. Die Eigenwerte λ_p' und λ_p'' von (4) und (6) findet man nach (1)

$$\lambda_p = \lambda_p' \cdot G_{\max} = \lambda_p'' \cdot G_{\min}.$$

Gleichung (5) hat $F_0(s)$ als Eigenfunktion, und zwar sei F_0 die k-te, zum Eigenwert $\lambda_k^* = 1$ gehörige Eigenfunktion. Es sei $G(s)$ etwa positiv, im Falle eines negativen G betrachte man den Kern $-K(s,t)$.

Dann folgt aus Hilfssatz 2, daß beim Übergang von (4) zu (5) und beim Übergang von (5) zu (6) alle positiven Eigenwerte nicht kleiner werden können, also

$$\lambda_p' \leqq \lambda_p^* \leqq \lambda_p'',$$

insbesondere ist wegen $\lambda_k^* = 1$

$$\frac{\lambda_k}{G_{\max}} \leqq 1 \leqq \frac{\lambda_k}{G_{\min}},$$

w. z. b. w.

Beispiel. Hier sei ein Beispiel genannt, bei dem man mit einem Schlage für unendlich viele Eigenwerte Schranken erhält. Betrachtet werde die Integralgleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

mit

$$K(s,t) = \begin{cases} \dfrac{(1+s)^3 - 1}{(1+s)(1+t)} & \text{für } s \leqq t, \\ K(t,s) & \text{für } s \geqq t. \end{cases}$$

Hier ist also nach (2)

$$F_1(s) = \frac{1}{1+s} \int_0^s \left[(1+t)^2 - \frac{1}{1+t}\right] F_0(t)\, dt + \left[(1+s)^2 - \frac{1}{1+s}\right] \int_s^1 \frac{F_0(t)}{1+t}\, dt.$$

Verwendet man als Ausgangsfunktion

$$F_0(s) = \left[a^2 + \frac{2}{(1+s)^3}\right] \cdot \sin a\, s,$$

so erhält man

$$F_1(s) = 3 \sin as - \frac{1}{4}\left[(1+s)^2 - \frac{1}{1+s}\right](\sin a + 2a \cos a).$$

Damit bei der Quotientenbildung die Nullstellen von $\sin as$ sich herausheben, verlangen wir nun, daß das zweite Glied in $F_1(s)$ fortfällt, also

$$\sin a + 2a \cos a = 0.$$

Das ist eine Gleichung für a mit abzählbar unendlich vielen reellen Nullstellen; es sei a_n ihre n-te positive Nullstelle. Dann wird

$$G(s) = \frac{F_0(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{3}\left(a_n^2 + \frac{2}{(1+s)^3}\right),$$

also

$$G_{\min} = \frac{a_n^2 + \frac{1}{2}}{3}, \quad G_{\max} = \frac{a_n^2 + 2}{3}.$$

So erhält man für die ersten Eigenwerte die Schranken:

n	a_n	Untere Schranke für λ_n	Obere Schranke für λ_n	Mittelwert	Fehler höchstens
1	1,837	1,291	1,791	1,541	16 %
2	4,816	7,897	8,397	8,147	3,1 %
3	7,917	21,06	21,56	21,31	1,2 %
4	11,041	40,80	41,30	41,05	0,6 %

Daß die hier angegebenen Eigenwerte die ersten vier sind und zwischen ihnen keine weiteren mehr liegen, kann man mit Hilfe von

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_0^1 \int_0^1 K^2(s,t)\, ds\, dt = \frac{11}{20}$$

nachprüfen. Der prozentuale Fehler geht bei den höheren Eigenwerten gegen Null. Die niedrigen Eigenwerte werden hier mit einem größeren Fehler geliefert; aber gerade für die niedrigen Eigenwerte kann man mit Hilfe anderer Abschätzungen beim Verfahren der schrittweisen Näherungen enge Schranken erhalten; so liefert z. B. die Formel (5. 2) aus Math. Zeitschr. Bd. 46 (1940), S. 697, ausgehend von

$$F_0(s) = 6(1+s) - \frac{2}{1+s} - \frac{4}{(1+s)^2},$$

$$F_1(s) = \frac{3}{2}(-3s^3 + 7s),$$

für λ_1 die Schranken

$$1{,}3712 \leqq \lambda_1 \leqq 1{,}3733.$$

Der Mittelwert 1,3723 hat einen Fehler von höchstens 0,08 %.

(Eingegangen am 2. Mai 1941.)

Zur Meromorphismentheorie der elliptischen Funktionenkörper.

Von

Hermann Ludwig Schmid in Berlin.

1. Fragestellung und Ergebnisse.

Es sei $K = k(x, y)$ ein elliptischer Funktionenkörper über dem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p mit der erzeugenden Gleichung

$$F(x, y) \equiv y^2 + f(x)y + g(x) = 0,$$

wo $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ ein Polynom höchstens vom Grade 1 und $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + x^3$ ein Polynom vom genauen Grade 3 (o. B. d. A. mit höchstem Koeffizienten 1) bedeuten. x habe den genauen Nenner $\mathfrak{o}^2$, y den genauen Nenner $\mathfrak{o}^3$ ($\mathfrak{o}$ fester Primdivisor von K). Meromorphismen von K seien durchweg mit μ, ν, ϱ bezeichnet[1]).

Den Schlüssel zur Bestimmung der Struktur des Meromorphismenringes von K liefert die Normenadditionsformel

$$N(\mu + \nu) + N(\mu - \nu) = 2N(\mu) + 2N(\nu).$$

Sie entspringt durch Gradvergleich aus der Divisorendarstellung des Elements

$$x\mu - x\nu \sim \frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)}{(\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu)^2}.$$

Diese Divisorendarstellung ist das abstrakte Analogon zur bekannten Formel

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = -\frac{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{(\sigma(u_1)\,\sigma(u_2))^2}$$

in der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen. Das Ziel der Arbeit ist, zu zeigen, daß der gesamte Bestand der Formeln, welche die (in ihrer transzendenten Uniformisierung durch $\wp$ und $\wp'$ ausdrückbaren) elliptischen Funktionen als Produkt von σ Funktionen darstellen, abstrakt übertragbar ist. Dabei ist $\wp(u)$ durch $x\mu$, $\wp'(u)$ durch $y\mu$ und $\sigma(u)$ durch $\mathfrak{o}\mu$ zu ersetzen. Die Gleichheiten werden zu Divisorenäquivalenzen, die das Wesentliche, nämlich Nullstellen und Pole in Evidenz setzen.

[1]) Die Kenntnis der HASSEschen Arbeiten zur Meromorphismentheorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper setze ich als bekannt voraus. Siehe dazu: H. HASSE, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I—III, Crelle 175 (1936), im folgenden zitiert mit H und Nummer.

Der zweite Abschnitt enthält die rechnerischen Grundlagen für die folgenden Ausführungen. Es werden die Additionstheoreme für mehrgliedrige Argumentsysteme hergeleitet, also

$$x(\mu_1 + \cdots + \mu_n) \quad \text{und} \quad y(\mu_1 + \cdots + \mu_n)$$

aus $x\mu_i$ und $y\mu_i$ berechnet. Insbesondere ergibt sich dabei für $n = 2$ die wichtige Formel

$$(x(\mu+\nu) - x(\mu-\nu))(x\mu - x\nu)^2 = F_y(x\mu, y\mu)F_y(x\nu, y\nu).$$

Sie bildet das wichtigste Hilfsmittel für den neuen Beweis der Divisorendarstellung von $x\mu - x\nu$ (Abschnitt 3). Dabei wird das Additionstheorem für das ganze Differential in K nicht benötigt. Die in H II auftretenden Fallunterscheidungen hinsichtlich des Verhaltens des Inseparabilitätskoeffizienten werden auf ein Minimum reduziert.

Im vierten Abschnitt wird die Divisorendarstellung der Determinante

$$D(\mu,\nu,\varrho) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \\ 1 & x\varrho & y\varrho \end{vmatrix}$$

bestimmt. Es wird

$$D(\mu,\nu,\varrho) \cong \frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu+\varrho)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\varrho)\,\mathfrak{o}(\nu-\varrho)}{(\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu\,\mathfrak{o}\varrho)^3}$$

in Analogie zur klassischen Formel

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) \end{vmatrix} = 2\,\frac{\sigma(u_1+u_2+u_3)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_2-u_3)}{(\sigma(u_1)\,\sigma(u_2)\,\sigma(u_3))^3}.$$

Das Element

$$E(\mu,\nu,\varrho) = D(\mu,\nu,\varrho):\begin{vmatrix} 1 & x\mu & x^2\mu \\ 1 & x\nu & x^2\nu \\ 1 & x\varrho & x^2\varrho \end{vmatrix}$$

besitzt die Divisorendarstellung

$$E(\mu,\nu,\varrho) \cong \frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu+\varrho)\,\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu\,\mathfrak{o}\varrho}{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu+\varrho)\,\mathfrak{o}(\nu+\varrho)}.$$

Aus ihr entspringt durch Gradvergleich die Normenadditionsformel in der symmetrischen Gestalt

$$N(\mu+\nu+\varrho) - [N(\mu+\nu) + N(\mu+\varrho) + N(\nu+\varrho)] + N(\mu) + N(\nu) + N(\varrho) = 0.$$

Nach diesen Überlegungen gelingt die Übertragung der Formel

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-2)}(u_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-2)}(u_n) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} i!\; \frac{\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) \prod_{i>j} \sigma(u_i - u_j)}{\prod_{i=1}^{n} \sigma(u_i)^n}.$$

Ist $z_1, \ldots, z_n$ eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{o}^{-n}$, so gilt hier für die Determinante

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \begin{vmatrix} z_1\mu_1 & \ldots & z_n\mu_1 \\ . & \ldots & . \\ z_1\mu_n & \ldots & z_n\mu_n \end{vmatrix}$$

die Divisorendarstellung

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_n) \simeq \frac{\mathfrak{o}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) \prod_{i>j} \mathfrak{o}(\mu_i - \mu_j)}{\prod_{i=1}^{n} (\mathfrak{o}\mu_i)^n}.$$

In der klassischen Theorie gelingt der Beweis sehr einfach durch Induktion nach n unter wesentlicher Benutzung des ersten Liouvilleschen Satzes. Die Schwierigkeiten sind im abstrakten Fall wesentlich größer. Der Beweis der angegebenen Divisorendarstellung von $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ gelingt hier durch Induktion nach n nach Bestätigung folgender beider Identitäten:

(a) $$D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})\, D(\mu_1, \ldots, -\mu_{n+1}) = (x\mu_{n+1} - x(\sum_{i=1}^{n} \mu_i))\, D(\mu_1, \ldots, \mu_n)^2 \prod_{i=1}^{n} (x\mu_{n+1} - x\mu_i),$$

(b) $$D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})\, D(\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1})\, D(\mu_1, \mu_2, -\mu_{n+1})$$ ist invariant bei Ersetzung von μ_{n+1} durch $-\mu_{n+1}$.

Trotz der komplizierten Gestalt von (a) und (b) ist ihre Bestätigung auf begrifflichem Wege mit nur geringem Rechenaufwand möglich.

In den bisherigen Formeln müssen die auftretenden Meromorphismen voneinander verschieden sein. Sind alle μ_i einander gleich, so tritt an Stelle von $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ die Differentialdeterminante

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} z_1\mu & \ldots & z_n\mu \\ D^{(1)}z_1\mu & \ldots & D^{(1)}z_n\mu \\ . & \ldots & . \end{vmatrix}$$

mit der Divisorendarstellung

$$\Delta(\mu) = \frac{\mathfrak{o}(n\mu)}{(\mathfrak{o}\mu)^{n^2}}$$

in Analogie zur klassischen Formel

$$\begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \ldots & \wp^{(n-1)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \ldots & \wp^{(n)}(u) \\ . & . & \ldots & . \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \ldots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} i! \, \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}.$$

2. Rechnerische Grundlagen.

Die von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K sind vermöge $x \equiv a$, $y \equiv b \bmod \mathfrak{p}$ umkehrbar eindeutig den konstanten Realisierungen (a, b) mit $F(a, b) = 0$ von (x, y) zugeordnet. Die Divisorenklassen nullten Grades C_0 entsprechen vermittels $C_0 \sim \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K. Die Divisorenklassengruppe nullten Grades von K stellt sich als additive Gruppe $\mathfrak{D}_0$ mit dem Nullelement $\mathfrak{o}$ dar:

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 \longleftrightarrow \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{o}} \cdot \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{o}} \sim \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}}.$$

$\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$ ist der zu $\mathfrak{p}$ (in bezug auf $k(x)$) konjugierte Primdivisor. Hat $\mathfrak{p}$ die konstante Realisierung (a, b), so hat $\mathfrak{p}'$ die konstante Realisierung $(a, -b - f(a))$.

Es seien nun $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ n voneinander und von $\mathfrak{o}$ verschiedene Primdivisoren mit $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{o}$. Wir suchen den durch $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ eindeutig bestimmten Primdivisor $\mathfrak{q}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i + \mathfrak{q} = \mathfrak{o}, \text{ d. h. } \mathfrak{q} \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \sim \mathfrak{o}^{n+1}.$$

$\mathfrak{q}$ habe die konstante Realisierung (a, b). Eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{o}^{-(n+1)}$ ist gegeben durch

a) $1, x, y, \ldots, x^{k-2}y, x^k$ für $n + 1 = 2k$,

b) $1, x, y, \ldots, x^k, x^{k-1}y$ für $n + 1 = 2k + 1$.

Wir werden in Zukunft stets solche Basen verwenden und ihre Glieder grundsätzlich nach steigenden Nennerpotenzen von $\mathfrak{o}$ ordnen. Wir schreiben für diese Basis auch $z_1, \ldots, z_{n+1}$. Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} z_1, & \ldots, & z_{n+1} \\ z_1(a_i, b_i), & \ldots, & z_{n+1}(a_i, b_i) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

hat den genauen Nenner $\mathfrak{o}^{n+1}$ und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ zu Nullstellen. Um ihre letzte Nullstelle $\mathfrak{q}$ zu finden, bilden wir die Norm von $D = A(x) + yB(x)$ bezüglich $k(x)$:

$$\begin{aligned} N(D) &= (A + yB)(A + y'B) \\ &= A^2 - AB f(x) + B^2 g(x). \end{aligned}$$

Da $N(D)$ die Nullstellen $a, a_1, \ldots, a_n$ besitzt, gilt

$$c(x - a) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) = A^2 - AB f(x) + B^2 g(x) \tag{1}$$

mit einer Konstanten c. Aus (1) gewinnen wir durch Koeffizientenvergleich in x^{n+1} und x^n die Größen c und a. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $n+1 = 2k$. Es ist

$$A(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i x^i \quad \text{und} \quad B(x) = \sum_{i=1}^{k-2} B_i x^i$$

mit

$$\begin{aligned} A_k &= -|z_1(a_i, b_i), \ldots, z_n(a_i, b_i)|, \\ A_{k-1} &= -|z_1(a_i, b_i), \ldots, z_{n-2}(a_i, b_i), z_n(a_i, b_i), z_{n+1}(a_i, b_i)|, \\ B_{k-2} &= |z_1(a_i, b_i), \ldots, z_{n-1}(a_i, b_i), z_{n+1}(a_i, b_i)| \\ &\qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich der Glieder x^{n+1} und x^n in (1) ergibt $c = A_k^2$ und

$$(2\,a) \qquad -A_k^2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i + a\Big) = 2A_{k-1}A_k + B_{k-2}^2 - \alpha_1 A_k B_{k-2}.$$

b) $n+1 = 2k+1$. Es ist

$$A(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i x^i \quad \text{und} \quad B(x) = \sum_{i=1}^{k-1} x^i B_i$$

mit

$$\begin{aligned} B_{k-1} &= |z_1(a_i, b_i), \ldots, z_n(a_i, b_i)|, \\ B_{k-2} &= |z_1(a_i, b_i), \ldots, z_{n-2}(a_i, b_i), z_n(a_i, b_i), z_{n+1}(a_i, b_i)|, \\ A_k &= -|z_1(a_i, b_i), \ldots, z_{n-1}(a_i, b_i), z_{n+1}(a_i, b_i)| \\ &\qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich der Glieder x^{n+1} und x^n in (1) ergibt $c = B_{k-1}^2$ und

$$(2\,b) \qquad -B_{k-1}^2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i + \beta_2 + a\Big) = A_k^2 + 2B_{k-1}B_{k-2} - \alpha_1 A_k B_{k-1}.$$

Wegen $Dq = 0$ berechnet sich b aus

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} z_1(a, b), & \ldots, & z_{n+1}(a, b) \\ z_1(a_i, b_i), & \ldots, & z_{n+1}(a_i, b_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Nun seien $\mu_1, \ldots, \mu_n$ n von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$. Die Meromorphismen μ von K entsprechen umkehrbar eindeutig den Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{P}$ des Doppelkörpers $\mathfrak{K} = K^2$, indem $(x\mu, y\mu)$ die konstante Realisierung von $\mathfrak{P}$ in K ist. Es sei

$$\mu_i \longleftrightarrow \mathfrak{P}_i \longleftrightarrow (x\mu_i, y\mu_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Der Summe $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ entspricht der Primdivisor $\mathfrak{Q}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i = \mathfrak{Q} \longleftrightarrow \Big(x\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\Big), y\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\Big)\Big).$$

Die Formeln (2a), (2b) und (3) liefern ohne weiteres die Additionstheoreme für $x\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)$ und $y\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)$. Um die Fälle a) und b) einheitlich schreiben zu können, führen wir neben

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = |z_1\mu_i, \ldots, z_n\mu_i| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die n-reihigen Determinanten

$$D^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = |z_1\mu_i, \ldots, z_{r-1}\mu_i, z_{r+1}\mu_i, \ldots, z_{n+1}\mu_i| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ein, in denen die Spalte des Basisgliedes mit dem genauen Nenner σ^r fehlt. Es sei definitionsgemäß $D^{(1)} = 0$ und $2\varepsilon = 1 + (-1)^n$. Aus (2a) und (2b) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} &- D(\mu_1, \ldots, \mu_n)^2\left[x\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right) + \sum_{i=1}^{n} x\mu_i + \varepsilon\beta_2\right] \\ &= D^{(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_n)^2 + 2D(\mu_1, \ldots, \mu_n)\, D^{(n-1)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) - \\ &\qquad - \alpha_1 D(\mu_1, \ldots, \mu_n) D^{(n)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \end{aligned}$$

oder kürzer

$$(4) \qquad \boxed{- D^2\left[x\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right) + \sum_{i=1}^{n} x\mu_i + \varepsilon\beta_2\right] = D^{(n)2} + 2DD^{(n-1)} - \alpha_1 DD^{(n)}.}$$

$y\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)$ berechnet sich nach (3) aus

$$(5) \qquad \boxed{\begin{vmatrix} z_1(\xi, \eta), & \ldots, & z_{n+1}(\xi, \eta) \\ z_1(x\mu_i, y\mu_i), & \ldots, & z_{n+1}(x\mu_i, y\mu_i) \end{vmatrix} = 0, \qquad \xi = x\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right), \quad \eta = y'\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right) \quad (i = 1, \ldots, n).}$$

Aus (4) ergibt sich insbesondere für $n = 2$, wenn wir μ_1, μ_2 durch μ, ν ersetzen

$$\begin{aligned} - x(\mu + \nu) &= x\mu + x\nu + \beta_2 + \left(\frac{y\mu - y\nu}{x\mu - x\nu}\right)^2 + \alpha_1 \frac{y\mu - y\nu}{x\mu - x\nu} \\ - x(\mu - \nu) &= x\mu + x\nu + \beta_2 + \left(\frac{y\mu + y\nu + f(x\nu)}{x\mu - x\nu}\right)^2 + \alpha_1 \frac{y\mu + y\nu + f(x\nu)}{x\mu - x\nu}. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir

$$x(\mu + \nu) - x(\mu - \nu) = \frac{4\, y\mu\, y\nu + 2(y\mu + y\nu) f(x\nu) + f(x\nu)^2}{(x\mu - x\nu)^2} + \alpha_1 \frac{2\, y\nu + f(x\nu)}{x\mu - x\nu}.$$

Bringen wir die rechte Seite auf den gemeinsamen Nenner $(x\mu - x\nu)^2$, so finden wir nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} x(\mu + \nu) - x(\mu - \nu) &= \frac{(2\, y\mu + f(x\mu))\,(2\, y\nu + f(x\nu))}{(x\mu - x\nu)^2} \\ &= \frac{F_y(x\mu, y\mu)\, F_y(x\nu, y\nu)}{(x\mu - x\nu)^2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir den für den nächsten Abschnitt wichtigen Satz bewiesen:

Satz 1. *Für zwei Meromorphismen μ, ν mit μ, ν, $\mu \pm \nu \neq 0$ gilt stets die Formel*

$$(6) \qquad (x(\mu+\nu) - x(\mu-\nu))\,(x\mu - x\nu)^2 = F_y(x\mu, y\mu)\,F_y(x\nu, y\nu).$$

Es ist $\frac{dx}{F_y(x,y)} \cong 1$ (das einzige in K existierende ganze Differential). Wir können daher (6) auch in der Form

$$(6a) \qquad (x(\mu+\nu) - x(\mu-\nu))\,(x\mu - x\nu)^2 \cong d(x\mu)\,d(x\nu)$$

schreiben. Für $p \neq 2$ und $f(x) = 0$ endlich nimmt (6) die Gestalt

$$(6b) \qquad (x(\mu+\nu) - x(\mu-\nu))\,(x\mu - x\nu)^2 = 4\,y\mu\,y\nu$$

an. Wir vermerken noch den Sonderfall von (5) für $n = 2$. Es ist

$$(5a) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x(\mu+\nu) & -y(\mu+\nu) - f(x(\mu+\nu)) \\ 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \end{vmatrix} = 0.$$

3. Divisorendarstellung von $x\mu - x\nu$.

Wir wollen die Divisorendarstellung des Elements $x\mu - x\nu$ in K studieren. $x\mu - x\nu$ ist jedenfalls mit dem Nenner $(\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu)^2$ darstellbar. Wir setzen

$$x\mu - x\nu \cong \frac{\mathfrak{z}(\mu,\nu)}{(\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu)^2}.$$

In $\mathfrak{z}(\mu,\nu)$ können sich nur solche Primdivisoren $\mathfrak{p}$ ganz oder teilweise gegen den Nenner wegheben, welche gleichzeitig in $\mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{o}\nu$ aufgehen, für welche also $\mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ ist. Für solche $\mathfrak{p}$ ist dann auch $(\mu+\nu)\,\mathfrak{p} = (\mu-\nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$. Im übrigen gehen in $\mathfrak{z}(\mu,\nu)$ nur Primdivisoren $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}/\mathfrak{o}(\mu+\nu)$ oder $\mathfrak{p}/\mathfrak{o}(\mu-\nu)$, also mit $(\mu+\nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ oder $(\mu-\nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ auf und umgekehrt. Es ist also

$$(7) \qquad \mathfrak{p}/\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu) \longleftrightarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{z}(\mu,\nu).$$

Wir führen eine abkürzende Schreibweise ein, die für das Folgende nützlich ist.

$$\mathfrak{a} \underset{\mathfrak{p}}{=} \mathfrak{b}\,(E)$$

soll bedeuten: Alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$, welche die in der beigefügten Klammer angegebene Eigenschaft E nicht besitzen, liefern zu den ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die gleichen Beiträge. Nun beweisen wir

Satz 2. *Es ist*

$$dx = \frac{\mathfrak{o}(2)}{\mathfrak{o}^4}.$$

Insbesondere gilt für den Inseparabilitätskoeffizienten $I(2)$

$$I(2) = 1 \quad \text{für } p \neq 2,$$

$$I(2) = \begin{cases} 2 \text{ für } p = 2 \text{ und } A \neq 0, \\ 4 \text{ für } p = 2 \text{ und } A = 0\ ^{2}). \end{cases}$$

Beweis. Die Verzweigungspunkte von $K/k(x)$ seien $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ für $p \neq 2$ und $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_1$ bzw. $\mathfrak{o}$ für $p = 2$ und $A \neq 0$ bzw. $A = 0$. Dann ist

$$dx = \frac{\mathfrak{o}\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{v}_3}{\mathfrak{o}^4},\ \mathfrak{o}(2) = (\mathfrak{o}\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{v}_3)^{I(2)} \quad \text{für } p \neq 2,$$

$$dx = \frac{\mathfrak{o}^2\,\mathfrak{v}_1^3}{\mathfrak{o}^4},\ \mathfrak{o}(2) = (\mathfrak{o}\,\mathfrak{v}_1)^{I(2)} \quad \text{für } p = 2 \text{ und } A \neq 0,$$

$$dx = \frac{\mathfrak{o}^4}{\mathfrak{o}^4},\ \mathfrak{o}(2) = \mathfrak{o}^{I(2)} \quad \text{für } p = 2 \text{ und } A = 0.$$

Es ist also in jedem Falle $dx = \frac{\mathfrak{o}(2)^{\frac{\varkappa}{I(2)}}}{\mathfrak{o}^4}$ mit $\varkappa = 1, 2$ oder 4. Diese Divisorendarstellung setzen wir in (6a) ein und erhalten

$$(8) \qquad (\mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu))^{\frac{\varkappa}{I(2)}}\,\mathfrak{o}(\mu+\nu)^2\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)^2 = \mathfrak{z}(\mu,\nu)^2\,\mathfrak{z}(\mu+\nu,\mu-\nu).$$

Unter Berücksichtigung von (7) ergibt sich aus (8)

$$\mathfrak{z}(\mu,\nu) \underset{\mathfrak{p}}{=} \mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu) \quad ((\mu+\nu)\,\mathfrak{p} = (\mu-\nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}).$$

Angewandt auf $\mu+\nu$, $\mu-\nu$ statt μ, ν besagt dies

$$(9) \qquad \mathfrak{z}(\mu+\nu,\mu-\nu) \underset{\mathfrak{p}}{=} \mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu) \quad (2\mu\mathfrak{p} = 2\nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}).$$

Andererseits ergibt sich unter Berücksichtigung von (7) und (8)

$$(10) \qquad \mathfrak{z}(\mu+\nu,\mu-\nu) \underset{\mathfrak{p}}{=} (\mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu))^{\frac{\varkappa}{I(2)}} \quad (2\mu\mathfrak{p} = 2\nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}).$$

Nun wählen wir μ und ν so, daß $\mathfrak{o}(2\mu)^{\frac{1}{I(\mu)}} \neq \mathfrak{o}(2\nu)^{\frac{1}{I(\nu)}}$ ist. Dann gibt es o. B. d. A. einen Primdivisor $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}/\mathfrak{o}(2\mu)$, $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{o}(2\nu)$. Für ein solches $\mathfrak{q}$ ist der Beitrag zu

$$\mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu) \quad \text{gleich } \mathfrak{q}^{I(2\mu)},$$

$$(\mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu))^{\frac{\varkappa}{I(2)}} \quad \text{gleich } \mathfrak{q}^{I(2\mu)\frac{\varkappa}{I(2)}}.$$

---

[2]) Es sei für $p > 0$ w ein ganzes Multiplum von $\mathfrak{o}^{-p}$ mit

$$w = \omega^{-p} + A\omega^{-1} + \cdots \qquad (\omega \text{ Primelement zu } \mathfrak{o}).$$

Die Alternative $A = 0$, $A \neq 0$ ist eine Invariante von K.

Durch Vergleich von (9) und (10) folgt daraus $\varkappa = I(2)$ und damit alle Behauptungen unseres Satzes [3]).

Setzen wir jetzt die in Satz 2 bewiesene Divisorendarstellung von dx in (6a) ein, so erhalten wir

$$(11) \qquad \mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu)\,\mathfrak{o}(\mu+\nu)^2\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)^2 = \mathfrak{z}(\mu,\nu)^2\,\mathfrak{z}(\mu+\nu,\mu-\nu).$$

Aus (11) folgt sofort der Hilfssatz

Hilfssatz 1. *Die Beiträge der Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ *mit* $\mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ *zu* $\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)$ *und* $\mathfrak{z}(\mu,\nu)$ *sind gleich.*

Beweis. Ist $I(\mu) \neq I(\nu)$ und o. B. d. A. $I(\mu) < I(\nu)$, so ist $I(\mu+\nu) = I(\mu-\nu) = I(\mu)$, also der Beitrag eines $\mathfrak{p}$ mit $\mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ zu $\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)$ gleich $\mathfrak{p}^{2I(\mu)}$. Wegen $x\mu - x\nu \sim \mathfrak{p}^{-2I(\nu)} = \frac{\mathfrak{p}^{2I(\mu)}}{\mathfrak{p}^{2I(\mu)}\,\mathfrak{p}^{2I(\nu)}}$ liefert $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{z}(\mu,\nu)$ denselben Beitrag.

Ist $I(\mu) = I(\nu)$, aber $I(\mu+\nu) \neq I(\mu-\nu)$, so können wir dieselbe Betrachtung für $\mathfrak{z}(\mu+\nu,\mu-\nu)$ und $\mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu)$ anstellen und unter Berücksichtigung von (11) folgt wieder die Behauptung über $\mathfrak{z}(\mu,\nu)$ und $\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)$.

Es bleibt also nur noch der Fall $I(\mu) = I(\nu)$ *und* $I(\mu+\nu) = I(\mu-\nu)$. Für $p \neq 2$ ist dann notwendig

$$I = I(\mu) = I(\nu) = I(\mu+\nu) = I(\mu-\nu).$$

Denn wäre $I(\mu+\nu) > I(\nu)$, so wäre wegen $I(2) = 1$

$$I(\mu+\nu) = \mathrm{Min}\,(I(\mu-\nu),\, I(2\nu)) = I(\nu)$$

in Widerspruch zur Annahme. Nun ist der Beitrag eines $\mathfrak{p}$ mit $\mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ zu $x\mu - x\nu$ mindestens gleich $\mathfrak{p}^{-2I}$, also der Beitrag zu $\mathfrak{z}(\mu,\nu)^2$ mindestens gleich $\mathfrak{p}^{4I}$. Ebenso ist der Beitrag zu $\mathfrak{z}(\mu+\nu,\ \mu-\nu)$ mindestens gleich $\mathfrak{p}^{2I}$. Aus (11) folgt, daß die Summe dieser Beiträge gleich $\mathfrak{p}^{6I}$ ist. Also gilt überall die Gleichheit und damit unsere Behauptung.

Den Fall $p = 2$ und $I(\mu) = I(\nu)$ *und* $I(\mu+\nu) = I(\mu-\nu)$ werden wir noch nachholen.

Satz 3. *Für* $\mu, \nu, \mu+\nu, \mu-\nu \neq 0$ *hat* $x\mu - x\nu$ *in* K *die Divisorendarstellung*

$$x\mu - x\nu \cong \frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)}{(\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu)^2}.$$

---

[3]) $dx = \frac{\mathfrak{o}(2)}{\mathfrak{o}4}$ wurde in H III für $p \neq 2$ aus $I(2) = 1$ geschlossen. $I(2) = 1$ wiederum war eine Folge aus dem Additionstheorem für das ganze Differential. Für $p = 2$ mußte erst die Normenadditionsformel in solchem Umfange bewiesen sein, daß man daraus $N(2) = 4$ schließen konnte.

Beweis. Wir haben bereits beim Beweis des Satzes 2 festgestellt:

$$\mathfrak{z}(\mu, \nu) \underset{\mathfrak{p}}{=} \mathfrak{o}(\mu + \nu)\,\mathfrak{o}(\mu - \nu) \quad ((\mu + \nu)\,\mathfrak{p} = (\mu - \nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}).$$

Unter Berücksichtigung von (11) folgt daraus einerseits:

$$\mathfrak{z}(\mu + \nu, \mu - \nu) \underset{\mathfrak{p}}{=} \mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu) \quad ((\mu + \nu)\,\mathfrak{p} = (\mu - \nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}).$$

Wenden wir unseren Hilfssatz auf $\mu + \nu, \mu - \nu$ statt μ, ν an, so gilt andererseits: Die Primteiler $\mathfrak{p}$ mit $(\mu + \nu)\,\mathfrak{p} = (\mu - \nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ liefern zu $\mathfrak{z}(\mu + \nu, \mu - \nu)$ und $\mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu)$ dieselben Beiträge. Zusammen ergibt sich also $\mathfrak{z}(\mu + \nu, \mu - \nu) = \mathfrak{o}(2\mu)\,\mathfrak{o}(2\nu)$ und damit nach (11)

$$\mathfrak{z}(\mu, \nu) = \mathfrak{o}(\mu + \nu)\,\mathfrak{o}(\mu - \nu),$$

w. z. b. w.

Wir müssen, um die uneingeschränkte Gültigkeit von Satz 3 zu zeigen, noch eine Ergänzung für $p = 2$ bringen[4]). Satz 3 gilt auch für $p = 2$, wenn nicht zugleich

$$I(\mu) = I(\nu), \quad I(\mu + \nu) = I(\mu - \nu) \tag{12}$$

ist. μ, ν mögen jetzt die Bedingungen (12) erfüllen. Dann ist entweder

$$I(\mu) = I(\nu) < I(\mu + \nu) = I(\mu - \nu) \tag{12a}$$

oder

$$I(\mu) = I(\nu) = I(\mu + \nu) = I(\mu - \nu). \tag{12b}$$

Gilt (12b), so ist wegen $I(2) > 1$

$$I(\mu + \nu) = I(\mu - \nu) < I(2\mu) = I(2\nu).$$

Die Bedingung (12a) ist also sicher entweder für μ, ν oder für $\mu + \nu, \mu - \nu$ erfüllt. Im letzteren Falle beweisen wir Satz 3 für $\mu + \nu, \mu - \nu$ und schließen aus (11) die Gültigkeit von Satz 3 auch für μ, ν. Wir können also o. B. d. A. das Erfülltsein von (12a) voraussetzen. Wir wählen einen Meromorphismus ϱ mit den Eigenschaften

a) $\mu \pm \varrho \neq 0, \quad \mu \pm \nu \pm \varrho \neq 0,$

b) $I(\mu + \varrho) \neq I(\mu - \varrho), \quad I(\mu \pm \nu) \neq I(\varrho), \quad I(\mu \pm \varrho) \neq I(\nu).$

Z. B. besitzt jedes $\varrho = -\mu \pm 2^{\alpha}$ mit $\alpha > I(\mu)$ die Eigenschaften b). Denn es ist $I(\mu + \varrho) = \alpha I(2), \quad I(\mu - \varrho) = I(2)\, I(\mu - 2^{\alpha - 1}) = I(2)\, I(\mu)$, $I(\varrho) = I(\mu)$, also

$$I(\mu + \varrho) > I(\mu - \varrho), \quad I(\mu \pm \nu) > I(\mu) = I(\varrho), \quad I(\mu + \varrho) > I(\nu),$$
$$I(\mu - \varrho) > I(\nu).$$

---

[4]) In H III wird Satz 3 nur insoweit bewiesen, als es zum Rückschluß auf die Normenadditionsformel hinreichend ist. Der HASSEsche Rückschluß versagt für $p = 2$ und $2\mu \pm \nu = 0$.

Für ein ϱ mit den Eigenschaften a) und b) haben wir die Divisorendarstellungen der Elemente

$$x\mu - x\varrho, \quad x(\mu \pm \nu) - x\varrho, \quad x(\mu \pm \varrho) - x\nu$$

in der in Satz 3 angegebenen Gestalt schon bewiesen. Es ist also nach Satz 3

$$\frac{(x(\mu+\varrho) - x\nu)(x(\mu-\varrho) - x\nu)(x\mu - x\varrho)^2}{(x(\mu+\nu) - x\varrho)(x(\mu-\nu) - x\varrho)} \cong \left(\frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\mathfrak{o}(\mu-\nu)}{(\mathfrak{o}\mu\mathfrak{o}\nu)^2}\right)^2.$$

Wenn wir noch nachweisen können, daß das Element

$$X(\mu, \nu, \varrho) = (x(\mu+\nu) - x\varrho)(x(\mu-\nu) - x\varrho)(x\mu - x\nu)^2$$

invariant ist gegenüber der Vertauschung von ν und ϱ, so ist Satz 3 auch für $p = 2$ vollständig bewiesen. Wir wollen die Symmetrieeigenschaft von X nur für $p = 2$ beweisen, was ja hier ausreicht. Um die Rechnung zu vereinfachen, normieren wir y so, daß $\beta_2 = 0$ wird. Dann wird

$$x(\mu+\nu) = \frac{y\mu f(x\nu) + y\nu f(x\mu)}{(x\mu + x\nu)^2} + \frac{x\mu\, x\nu + \beta_1}{x\mu + x\nu},$$

$$x(\mu-\nu) = x(\mu+\nu) + \frac{f(x\mu) f(x\nu)}{(x\mu + x\nu)^2}.$$

Wir bilden zuerst den Ausdruck

$$Y(\mu, \nu) = x(\mu+\nu)\, x(\mu-\nu)\, (x\mu + x\nu)^2$$

$$= x(\mu+\nu)\left(x(\mu+\nu) + \frac{f(x\mu) f(x\nu)}{(x\mu + x\nu)^2}\right)(x\mu + x\nu)^2$$

$$= (x\mu\, x\nu + \beta_1)^2 + \frac{(x\mu\, x\nu + \beta_1) f(x\mu) f(x\nu)}{x\mu + x\nu} + \frac{g(x\mu) f(x\nu)^2 + g(x\nu) f(x\mu)^2}{(x\mu + x\nu)^2}$$

$$= (x\mu\, x\nu + \beta_1)^2 + \alpha_0\alpha_1(x\mu\, x\nu + \beta_1) + \alpha_0^2(x\mu + x\nu).$$

Dann wird

$$X(\mu, \nu, \varrho) = Y(\mu, \nu) + x\varrho\,(x(\mu+\nu) + x(\mu-\nu))(x\mu + x\nu)^2 + (x\varrho\,(x\mu + x\nu))^2$$

$$= Y(\mu, \nu) + x\varrho f(x\mu) f(x\nu) + (x\varrho\,(x\mu + x\nu))^2 \qquad \text{[nach (6)]}.$$

Setzen wir hier das für $Y(\mu, \nu)$ erhaltene Resultat ein, so ergibt sich

$$X(\mu, \nu, \varrho) = \alpha_0^2(x\mu + x\nu + x\varrho) + \alpha_0\alpha_1(x\mu\, x\nu + x\mu\, x\varrho + x\nu\, x\varrho + \beta_1) + \alpha_1^2 x\mu\, x\nu\, x\varrho + (x\mu\, x\nu + x\mu\, x\varrho + x\nu\, x\varrho + \beta_1)^2.$$

Dies ist ein in $x\mu$, $x\nu$, $x\varrho$ symmetrischer Ausdruck. Also ist sicher $X(\mu, \nu, \varrho) = X(\mu, \varrho, \nu)$, w. z. b. w.

4. Divisorendarstellung der Determinante dritten Grades.

In der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen gilt bekanntlich die Formel

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) \end{vmatrix} = c\,\frac{\sigma(u_1+u_2+u_3)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_2-u_3)}{(\sigma(u_1)\,\sigma(u_2)\,\sigma(u_3))^3}$$

mit einer Konstanten c. Das abstrakte Analogon dieser Formel sprechen wir aus in dem

Satz 4. *Sind μ, ν, ϱ drei von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit $\mu+\nu+\varrho \neq 0$, so hat die Determinante*

$$D(\mu,\nu,\varrho) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \\ 1 & x\varrho & y\varrho \end{vmatrix}$$

die Divisorendarstellung

$$D(\mu,\nu,\varrho) \simeq \frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu+\varrho)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\varrho)\,\mathfrak{o}(\nu-\varrho)}{(\mathfrak{o}\,\mu\;\mathfrak{o}\,\nu\;\mathfrak{o}\,\varrho)^3}. \tag{13}$$

Beweis. Wir müssen zwei einfache Sonderfälle vorweg erledigen.

a) Zwei von den drei Meromorphismen μ, ν, ϱ seien entgegengesetzt gleich: O. B. d. A. $\nu+\varrho=0$. Dann wird

$$D(\mu,\nu,-\nu) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \\ 1 & x\nu & -y\nu - f(x\nu) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \\ 0 & 0 & -(2y\nu + f(x\nu)) \end{vmatrix} = F_y(x\nu, y\nu)\,(x\mu - x\nu)$$

$$\simeq \frac{\mathfrak{o}(2\nu)\,\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)}{(\mathfrak{o}\,\nu)^4\,(\mathfrak{o}\,\mu\;\mathfrak{o}\,\nu)^3} \qquad \text{(nach Satz 2 und 3)}$$

in Übereinstimmung mit (13).

b) Einer der Meromorphismen μ, ν, ϱ sei die Summe der beiden anderen, o. B. d. A. $\varrho = \mu+\nu$. Es ist

$$D(\mu,\nu,\mu+\nu) = -y(\mu+\nu)\,(x\mu - x\nu) + x(\mu+\nu)\,(y\mu - y\nu) + \\ + x\mu\,y\nu - x\nu\,y\mu.$$

Nach Formel (5a) im Abschnitt 2 ist

$$0 = \big(y(\mu+\nu) + f(x(\mu+\nu))\big)\,(x\mu - x\nu) + x(\mu+\nu)\,(y\mu - y\nu) + \\ + x\mu\,y\nu - x\nu\,y\mu.$$

Durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} D(\mu,\nu,\mu+\nu) &= \big(2\,y(\mu+\nu)+f(x(\mu+\nu))\big)\,(x\mu-x\nu)\\ &= F_y\big(x(\mu+\nu),\,y(\mu+\nu)\big)\,(x\mu-x\nu)\\ &\cong \frac{\sigma\,(2\,(\mu+\nu))\,\sigma\,(\mu+\nu)\,\sigma\,(\mu-\nu)}{\sigma\,(\mu+\nu)^4\,(\sigma\,\mu\,\sigma\,\nu)^2} \qquad \text{(nach Satz 2 und 3)}\\ &= \frac{\sigma\,(2\,(\mu+\nu))\,\sigma\,(\mu-\nu)}{\sigma\,(\mu+\nu)^3\,(\sigma\,\mu\,\sigma\,\nu)^2} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (13).

c) Für den weiteren Beweis können wir annehmen, daß über die Voraussetzungen des Satzes 4 hinaus keine der unter a) und b) genannten Fälle vorliegen. Unter diesen erweiterten Voraussetzungen beweisen wir die Formel

$$\begin{aligned} (14)\quad & D(\mu,\nu,\varrho)^2\,(x\mu-x(\nu-\varrho))\\ &= (x(\mu+\nu)-x\varrho)\,(x(\mu+\varrho)-x\nu)\,(x\mu-x\nu)^2(x\mu-x\varrho)^2. \end{aligned}$$

Aus (14) ergibt sich dann unter Anwendung von Satz 3 ohne weiteres die Richtigkeit der in Satz 4 behaupteten Divisorendarstellung von $D(\mu,\nu,\varrho)$.

Wir beweisen (14) zuerst für $p \neq 2$. Wir setzen $v = x\mu + x\nu + x\varrho + \beta_2$ und $R(\mu,\nu) = v(x\mu - x\nu)^2 + (y\mu - y\nu)^2$. Dann wird

$$\begin{aligned} x\mu - x(\nu-\varrho) &= v + \left(\frac{y\nu+y\varrho}{x\nu-x\varrho}\right)^2,\\ -\,(x(\mu+\varrho)-x\nu)\,(x\mu-x\varrho)^2 &= R(\mu,\varrho),\\ -\,(x(\mu+\nu)-x\varrho)\,(x\mu-x\nu)^2 &= R(\mu,\nu). \end{aligned}$$

Wir haben also

$$(14\,a)\qquad D(\mu,\nu,\varrho)^2\left(v+\left(\frac{y\nu+y\varrho}{x\nu-x\varrho}\right)^2\right) = R(\mu,\nu)\,R(\mu,\varrho)$$

zu zeigen. Zu diesem Zwecke gehen wir aus von der Identität

$$\begin{aligned} (15)\quad & (y\mu)^2\,(x\nu-x\varrho)+(y\nu)^2\,(x\varrho-x\mu)+(y\varrho)^2\,(x\mu-x\nu)+\\ &+v(x\mu-x\nu)\,(x\mu-x\varrho)\,(x\nu-x\varrho)=0. \end{aligned}$$

Nach Division von (15) durch $x\nu - x\varrho$ und leichter Umordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{x\mu-x\varrho}{x\nu-x\varrho}\,((y\nu)^2-(y\varrho)^2)-(y\nu+y\varrho)\,(y\mu-y\varrho)\\ &\quad = v(x\mu-x\nu)\,(x\mu-x\varrho)+(y\mu-y\nu)\,(y\mu-y\varrho), \end{aligned}$$

also

$$D(\mu,\nu,\varrho)\,\frac{y\nu+y\varrho}{x\nu+x\varrho} = v\,(x\mu-x\nu)\,(x\mu-x\varrho)+(y\mu-y\nu)\,(y\mu-y\varrho).$$

Diese Gleichung quadrieren wir und addieren auf beiden Seiten den Ausdruck

$$v\big((x\mu-x\nu)^2\,(y\mu-y\varrho)^2+(x\mu-x\varrho)^2\,(y\mu-y\nu)^2\big).$$

Dann ergibt sich unmittelbar die Beziehung (14a). Damit ist (14), also auch Satz 4 für $p \neq 2$ bewiesen.

Der Beweis von (14) für $p = 2$ ist formal etwas komplizierter. Statt (14a) muß hier die Beziehung

$$(14\,b)\quad D(\mu,\nu,\varrho)^2\left(v+\left(\frac{y_\nu+y_\varrho}{x_\nu+x_\varrho}\right)^2+\alpha_1\frac{y_\nu+y_\varrho}{x_\nu+x_\varrho}+\frac{f(x_\nu)f(x_\varrho)}{(x_\nu+x_\varrho)^2}\right)=\overline{R}(\mu,\nu)\,\overline{R}(\mu,\varrho)$$

mit

$$\overline{R}(\mu,\nu)=v(x_\mu+x_\nu)^2+(y_\mu+y_\nu)^2+\alpha_1(y_\mu+y_\nu)(x_\mu+x_\nu)$$

gezeigt werden. An Stelle von (15) müssen wir von der Identität

$$(15a)\quad (y_\mu)^2(x_\nu+x_\varrho)+(y_\nu)^2(x_\varrho+x_\mu)+(y_\varrho)^2(x_\mu+x_\nu)+ \\ +v(x_\mu+x_\nu)(x_\mu+x_\varrho)(x_\nu+x_\varrho)+S(\mu,\nu,\varrho)=0$$

mit

$$S(\mu,\nu,\varrho)=f(x_\mu)(x_\nu+x_\varrho)\,y_\mu+f(x_\nu)(x_\varrho+x_\mu)\,y_\nu+f(x_\varrho)(x_\mu+x_\nu)\,y_\varrho$$

ausgehen. Durch denselben Rechenprozeß, der vorhin von (15) auf (14a) führte, erhalten wir jetzt

$$D(\mu,\nu,\varrho)^2\left(v+\left(\frac{y_\nu+y_\varrho}{x_\nu+x_\varrho}\right)^2\right)=R(\mu,\nu)\,R(\mu,\varrho)+\left(\frac{S(\mu,\nu,\varrho)}{x_\nu+x_\varrho}\right)^2.$$

(14b) wird also bewiesen sein, wenn wir

$$(14c)\quad D(\mu,\nu,\varrho)^2\left(\alpha_1\frac{y_\nu+y_\varrho}{x_\nu+x_\varrho}+\frac{f(x_\nu)f(x_\varrho)}{(x_\nu+x_\varrho)^2}\right)=T(\mu,\nu,\varrho) \\ +\alpha_1 D(\mu,\nu,\varrho)\left(v(x_\mu+x_\nu)(x_\mu+x_\varrho)+(y_\mu+y_\nu)(y_\mu+y_\varrho)\right)$$

mit

$$T(\mu,\nu,\varrho)=\alpha_1^2(x_\mu+x_\nu)(x_\mu+x_\varrho)(y_\mu+y_\nu)(y_\mu+y_\varrho)+\left(\frac{S(\mu,\nu,\varrho)}{x_\nu+x_\varrho}\right)^2$$

zeigen können. Nun ist

$$T(\mu,\nu,\varrho)=\alpha_1^2(x_\mu+x_\nu)(y_\mu+y_\varrho)\,D(\mu,\nu,\varrho)+(\alpha_0+\alpha_1 x_\nu)^2\left(\frac{D(\mu,\nu,\varrho)}{x_\nu+x_\varrho}\right)^2.$$

Also ist (14c) gleichwertig mit

$$D(\mu,\nu,\varrho)^2(\alpha_1(x_\nu+x_\varrho)(y_\nu+y_\varrho)+f(x_\nu)f(x_\varrho)+\alpha_0^2+\alpha_1^2(x_\nu)^2) \\ =\alpha_1 D(\mu,\nu,\varrho)(x_\nu+x_\varrho)^2\left(v(x_\mu+x_\nu)(x_\mu+x_\varrho)+(y_\mu+y_\nu)(y_\mu+y_\varrho)\right. \\ \left.+(x_\mu+x_\nu)(y_\mu+y_\varrho)\right)$$

oder, nach Division durch $\alpha_1(x_\nu+x_\varrho)\,D(\mu,\nu,\varrho)$, mit

$$(14d)\quad D(\mu,\nu,\varrho)(y_\nu+y_\varrho+f(x_\nu)) \\ =(x_\nu+x_\varrho)\left(v(x_\mu+x_\nu)(x_\mu+x_\varrho)+(y_\mu+y_\varrho)(x_\mu+x_\nu+y_\mu+y_\nu)\right).$$

(14d) ist aber nur eine formale Umformung der Identität (15a). Damit ist (14c), also auch (14b) bewiesen. Nun ist der Beweis von Satz 4 in allen Teilen erbracht.

Aus Satz 4 folgern wir

Satz 5. *Sind μ, ν, ϱ drei Meromorphismen mit μ, ν, ϱ, $\mu \pm \nu$, $\mu \pm \varrho$, $\nu \pm \varrho$, $\mu + \nu + \varrho \neq 0$, so hat das Element*

$$E(\mu, \nu, \varrho) = \frac{D(\mu, \nu, \varrho)}{(x\mu - x\nu)(x\mu - x\varrho)(x\nu - x\varrho)}$$

die Divisorendarstellung

$$E(\mu, \nu, \varrho) \simeq \frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu+\varrho)\,\mathfrak{o}\mu\,\mathfrak{o}\nu\,\mathfrak{o}\varrho}{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\,\mathfrak{o}(\mu+\varrho)\,\mathfrak{o}(\nu+\varrho)}.$$

Der Gradvergleich des Elementes $E(\mu, \nu, \varrho)$ ergibt die Normenadditionsformel in der symmetrischen Gestalt

$$N(\mu+\nu+\varrho) - (N(\mu+\nu) + N(\mu+\varrho) + N(\nu+\varrho)) + \\ + N(\mu) + N(\nu) + N(\varrho) = 0. \tag{16}$$

In der Tat ergibt sich die Divisorendarstellung von $E(\mu, \nu, \varrho)$ in der behaupteten Form direkt aus Satz 3 und Satz 4.

Wir wollen jetzt diejenigen Elemente bestimmen, aus deren Gradvergleich die durch die Voraussetzungen von Satz 5 ausgeschlossenen Sonderfälle entspringen. Dazu bemerken wir zuerst, daß für jeden der Fälle $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\varrho = 0$, $\mu + \nu + \varrho = 0$ die Normenadditionsformel (16) trivialerweise erfüllt ist. Weiter sehen wir, daß die Fälle $\mu + \nu = 0$, $\mu + \varrho = 0$, $\nu + \varrho = 0$ durch Satz 3 erledigt werden. Wir brauchen also nur noch den Fall zu betrachten, daß zwei oder alle drei der Meromorphismen μ, ν, ϱ einander gleich sind. Es sei zuerst o. B. d. A. $\nu = \varrho \neq \mu$, aber natürlich $\mu + \nu + \varrho = \mu + 2\nu \neq 0$. Wir beweisen den

Satz 6. *Sind μ, ν zwei von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit $\mu + 2\nu \neq 0$, so hat das Element*

$$G(\mu, \nu) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \\ 0 & dx\mu & dy\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\nu & y\nu \\ 0 & F_y(x\nu, y\nu) & -F_x(x\nu, y\nu) \end{vmatrix}$$

die Divisorendarstellung

$$G(\mu, \nu) \simeq \frac{\mathfrak{o}(\mu+2\nu)\,\mathfrak{o}(\mu-\nu)^3}{(\mathfrak{o}\mu)^3(\mathfrak{o}\nu)^6}. \tag{17}$$

Beweis. Wir nehmen den Fall $\mu + \nu = 0$ vorweg. Es ist

$$G(\mu, -\mu) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu & y\mu \\ 1 & x\mu & -y\mu - f(x\mu) \\ 0 & dx(-\mu) & dy(-\mu) \end{vmatrix}$$

$$= dx\mu\, dx(-\mu) = (dx\mu)^2$$

$$= \frac{\mathfrak{o}(2\mu)^2}{\mathfrak{o}\mu^4} \qquad \text{(nach Satz 2)}$$

in Übereinstimmung mit (17).

Es sei jetzt auch $\mu + \nu \neq 0$. Dann beweisen wir die Beziehung

$$G(\mu, \nu) = (x(\mu + \nu) - x\nu)(x\mu - x\nu)^2. \tag{18}$$

Aus (18) folgt wieder unter Anwendung von Satz 3 sofort (17). Es ist

$$\begin{aligned}
&(x(\mu + \nu) - x\nu)(x\mu - x\nu)^2 \\
&= -(x\mu + 2x\nu + \beta_2)(x\mu - x\nu)^2 - (y\mu - y\nu)^2 - \alpha_1(y\mu - y\nu)(x\mu - x\nu) \\
&= (\alpha_1 y\nu + g'(x\nu))(x\mu - x\nu) + (2y\nu + f(x\nu))(y\mu - y\nu) \\
&\quad - (x\mu + 2x\nu + \beta_2)(x\mu - x\nu)^2 + g(x\mu) - g(x\nu) - g'(x\nu)(x\mu - x\nu) \\
&= F_x(x\nu, y\nu)(x\mu - x\nu) + F_y(x\nu, y\nu)(y\mu - y\nu) \\
&= G(\mu, \nu),
\end{aligned}$$

w. z. b. w.

(16) geht für $\nu = \varrho$ über in

$$N(\mu + 2\nu) - 2N(\mu + \nu) - N(2\nu) + N(\mu) + 2N(\nu) = 0. \tag{16a}$$

Aus Satz 2, 3 und 6 folgt, daß das Element

$$H(\mu, \nu) = \frac{G(\mu, \nu)}{(x\mu - x\nu)^2 F_y(x\nu, y\nu)}$$

die Divisorendarstellung

$$H(\mu, \nu) \simeq \frac{\mathfrak{o}(\mu + 2\nu)\,\mathfrak{o}\mu\,(\mathfrak{o}\nu)^2}{\mathfrak{o}(\mu + \nu)^2\,\mathfrak{o}(2\nu)}$$

besitzt. $H(\mu, \nu)$ liefert also durch Gradvergleich die Normenadditionsformel (16a).

Um auch noch den Fall $\mu = \nu = \varrho$ zu erledigen, müssen wir statt des Elementes $D(\mu, \nu, \varrho)$ eine Differentialdeterminante betrachten. Diese Untersuchungen wollen wir im letzten Abschnitt in allgemeinerer Form vornehmen.

5. Divisorendarstellung der Determinante n-ten Grades.

Es sei $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ wie im Abschnitt 2 erklärt. Die Bestimmung der Divisorendarstellung von $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ gelingt im wesentlichen durch den Beweis zweier wichtiger Hilfssätze:

Hilfssatz 2. *Sind* $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ $n + 1$ *von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit* $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \neq 0$, $\mu_j + \mu_{n+1} \neq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, *so gilt die Beziehung*

$$\begin{aligned}
&D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})\, D(\mu_1, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1}) \\
&\quad = -\Big(x\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\Big) - x\mu_{n+1}\Big)\, D(\mu_1, \ldots, \mu_n)^2 \prod_{i=1}^{n} (x\mu_{n+1} - x\mu_i).
\end{aligned} \tag{19}$$

Beweis. Wir entwickeln $D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ nach den Elementen der letzten Zeile und erhalten

$$D = D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) = A(x\mu_{n+1}) + y\mu_{n+1} B(x\mu_{n+1})$$

mit

$$A(x\mu_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu_i & y\mu_i & x^2\mu_i & (xy)\mu_i & \ldots \\ 1 & x\mu_{n+1} & 0 & x^2\mu_{n+1} & 0 & \ldots \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und

$$B(x\mu_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x\mu_i & y\mu_i & x^2\mu_i & (xy)\mu_i & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & x\mu_{n+1} & 0 & \ldots \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Entsprechend ergibt sich

$$D' = D(\mu_1, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1}) = A(x\mu_{n+1}) + y'\mu_{n+1} B(x\mu_{n+1}),$$

also

$$D \cdot D' = A^2 - AB f(x\mu_{n+1}) + B' g(x\mu_{n+1}).$$

DD' ist also ein Polynom $P(x\mu_{n+1})$ in $x\mu_{n+1}$ vom Grade $n+1$. Wir zeigen, daß $P(x\mu_{n+1})$ die Nullstellen $x\mu_1, \ldots, x\mu_n$ und $\sum_{i=1}^{n} x\mu_i$ besitzt. Für $x\mu_1, \ldots, x\mu_n$ folgt dies aus

$$A(x\mu_i) = -y\mu_i B(x\mu_i) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

also

$$\begin{aligned} P(x\mu_i) &= B(x\mu_i)^2 [(y\mu_i)^2 + f(x\mu_i) y\mu_i + g(x\mu_i)] \\ &= B(x\mu_i)^2 F(x\mu_i, y\mu_i) = 0. \end{aligned}$$

Um auch $x(\sum_{i=1}^{n} \mu_i)$ als Nullstelle von $P(x\mu_{n+1})$ zu erkennen, berücksichtigen wir die Formel (5) im Abschnitt 2 und finden

$$A\left(x\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)\right) = y'\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) B\left(x\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)\right),$$

also

$$P\left(x\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)\right) = B\left(x\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)\right)^2 F\left(x\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right), y'\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)\right) = 0.$$

Auch die rechte Seite von (19) ist ein Polynom $Q(x\mu_{n+1})$ in $x\mu_{n+1}$ vom genauen Grade $n+1$ mit den Nullstellen $x\mu_1, \ldots, x\mu_n$ und $x(\sum_{i=1}^{n} \mu_i)$. Der Koeffizient der höchsten Potenz $(x\mu_{n+1})^{n+1}$ ist in $P(x\mu_{n+1})$ und $Q(x\mu_{n+1})$ gleich $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)^2$. Damit ist die Identität von P und Q, also Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. *Sind* $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ $n+1$ *von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit* $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq \pm \mu_{n+1}, \mu_1 + \mu_2 \neq \pm \mu_j, \mu_j + \mu_{n+1} \neq 0$ $(j = 3, \ldots, n)$, *so ist das Determinantenprodukt*

$$(20)\quad \Pi = D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) D(\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1})\, D(\mu_1, \mu_2, -\mu_{n+1})$$

invariant bei Ersetzung von μ_{n+1} *durch* $-\mu_{n+1}$.

Beweis. Wir entwickeln die Determinanten in (20) wieder nach den Elementen der letzten Zeile und erhalten

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) = A(x\mu_{n+1}) + y\mu_{n+1} B(x\mu_{n+1})$$

wie beim Beweis des Hilfssatzes 2, ferner

$$D(\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{n+1}) = A_1(x\mu_{n+1}) + y\mu_{n+1} B_1(x\mu_{n+1})$$

mit

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & x(\mu_1 + \mu_2) & y(\mu_1 + \mu_2) & \ldots \\ 1 & x\mu_i & y\mu_i & \ldots \\ 1 & x\mu_{n+1} & 0 & \ldots \end{vmatrix} \qquad (i = 3, \ldots, n)$$

und

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & x(\mu_1 + \mu_2) & y(\mu_1 + \mu_2) & \ldots \\ 1 & x\mu_i & y\mu_i & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \qquad (i = 3, \ldots, n),$$

schließlich

$$D(\mu_1, \mu_2, \mu_{n+1}) = A_2(x\mu_{n+1}) + y\mu_{n+1} B_2(x\mu_{n+1})$$

mit

$$A_2 = x\mu_1\, y\mu_2 - x\mu_2\, y\mu_1 + x\mu_{n+1}(y\mu_1 - y\mu_2) \text{ und } B_2 = x\mu_2 - x\mu_1.$$

Dann wird

$$\Pi = (A + y\mu_{n+1} B)(A_1 + y'\mu_{n+1} B_1)(A_2 + y'\mu_{n+1} B_2).$$

Beachten wir die Beziehungen

$$y\mu_{n+1} + y'\mu_{n+1} = -f(x\mu_{n+1}), \quad y\mu_{n+1} y'\mu_{n+1} = g(x\mu_{n+1}),$$

so erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\Pi = \Pi_1 + y\mu_{n+1}\Pi_2.$$

Dabei ist Π_1 von $y\mu_{n+1}$ unabhängig und

$$\Pi_2 = A_2(A_1 B - A B_1) - B_2(A A_1 + g(x\mu_{n+1}) B B_1 - f(x\mu_{n+1}) A B_1).$$

Die Invarianz von Π bei Ersetzung von μ_{n+1} durch $-\mu_{n+1}$ ist wegen $x(-\mu_{n+1}) = x\mu_{n+1}$ gleichbedeutend mit $\Pi_2 = 0$. Nun ist aber $\Pi_2 = \Pi_2(x\mu_{n+1})$ ein Polynom in $x\mu_{n+1}$ höchstens vom Grade n. Wir zeigen, daß Π_2 in $x\mu_{n+1}$ die $n+1$ verschiedenen Nullstellen $x\mu_1, \ldots, x\mu_n$,

$x(\mu_1 + \mu_2)$ besitzt. Dies ist aber nur möglich, wenn Π_2 identisch verschwindet. In der Tat, ist i zunächst einer der Werte $3, \ldots, n$, so ist

$$A(x\mu_i) = -y\mu_i B(x\mu_i), \quad A_1(x\mu_i) = -y\mu_i B_1(x\mu_i),$$

also

$$\begin{aligned}\Pi_2(x\mu_i) &= 0 + B_2 B(x\mu_i) B_1(x\mu_i)\,(y\mu_i)^2 + f(x\mu_i) y\mu_i + g(x\mu_i)) \\ &= -B_2 B(x\mu_i) B_1(x\mu_i) F(x\mu_i, y\mu_i) = 0.\end{aligned}$$

Ist i gleich 1 oder 2, so ist

$$A(x\mu_i) = -y\mu_i B(x\mu_i), \quad A_2(x\mu_i) = y\mu_i (x\mu_1 - x\mu_2),$$

also

$$\begin{aligned}\Pi_2(x\mu_i) = &-y\mu_i(x\mu_2 - x\mu_1) B(x\mu_i)\,(A_1(x\mu_i) + y\mu_i B_1(x\mu_i)) \\ &-(x\mu_2 - x\mu_1) B(x\mu_i)\,(-y\mu_i A_1(x\mu_i) + g(x\mu_i) B_1(x\mu_i) + \\ &\qquad + y\mu_i f(x\mu_i) B_1(x\mu_i)) \\ = &-(x\mu_2 - x\mu_1) B(x\mu_i) B_1(x\mu_i) F(x\mu_i, y\mu_i) = 0.\end{aligned}$$

Ist schließlich $x\mu_{n+1} = x(\mu_1 + \mu_2)$ und setzen wir zur Abkürzung

$$x(\mu_1 + \mu_2) = \xi, \quad y(\mu_1 + \mu_2) = \eta,$$

so ist

$$A(\xi) + \eta B(\xi) = D(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu_1 + \mu_2), \; A_1(\xi) = -\eta B_1(\xi),$$

also

$$\begin{aligned}\Pi_2(\xi) = &\; A_2(\xi) B_1(\xi)\,(-\eta B(\xi) - A(\xi)) - \\ &- B_1(\xi) B_2(\xi)\,(-\eta A(\xi) + g(\xi) B(\xi) - f(\xi) A(\xi)) \\ = &-B_1(\xi) D(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu_1 + \mu_2) \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta' \\ 1 & x\mu_1 & y\mu_1 \\ 1 & x\mu_2 & y\mu_2 \end{vmatrix} - B_1(\xi) B_2(\xi) F(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Nun ist $F(\xi, \eta) = 0$ und nach (5a)

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta' \\ 1 & x\mu_1 & y\mu_1 \\ 1 & x\mu_2 & y\mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Also ist $\Pi_2(\xi) = 0$. Damit ist Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

In der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen gilt bekanntlich die Formel

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \ldots & \wp^{(n-2)}(u_1) \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \ldots & \wp^{(n-2)}(u_n) \end{vmatrix} = d\, \frac{\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) \prod_{i>j} \sigma(u_i - u_j)}{\prod \sigma(u_i)^n}$$

(d Konstante).

Das abstrakte Analogon sprechen wir aus im

Satz 7. *Sind* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit* $\mu_1 + \cdots + \mu_n \neq 0$, *so hat die Determinante* $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *die Divisorendarstellung*

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \frac{\mathfrak{o}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) \prod_{i>j} \mathfrak{o}(\mu_i - \mu_j)}{\left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{o}\,\mu_i\right)^n}.$$

Beweis. Für $n = 2$ und $n = 3$ ist Satz 7 schon bewiesen. Wir machen Induktion nach n und nehmen Satz 7 für n schon als bewiesen an. Dann wollen wir Satz 7 für $n + 1$ beweisen. $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ ist jedenfalls mit dem Nenner $\left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{o}\,\mu_i\right)^{n+1}$ darstellbar. Wir setzen

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \frac{\mathfrak{z}(\mu_1, \ldots, \mu_n)}{\left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{o}\,\mu_i\right)^{n+1}}$$

und $\mathfrak{Z}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \mathfrak{o}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) \prod_{i>j} \mathfrak{o}(\mu_i - \mu_j)$ und behaupten $\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}$. Aus Hilfssatz 2 folgt, da wir auf Grund der Induktionsannahme die Divisorendarstellungen auf der rechten Seite von (19) schon kennen,

$$\mathfrak{z}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})\,\mathfrak{z}(\mu_1, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1}) = \mathfrak{Z}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})\,\mathfrak{Z}(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}). \tag{21}$$

Hilfssatz 3 besagt

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})D(\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \ldots, -\mu_{n+1})D(\mu_1, \mu_2, -\mu_{n+1}) = D(\mu_1, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1})D(\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{n+1})D(\mu_1, \mu_2, \mu_{n+1}).$$

Setzen wir auch hier in die n- und dreireihigen Determinanten auf Grund unserer Induktionsannahme die Divisorendarstellungen ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{z}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})\,\mathfrak{Z}(\mu_1, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1}) = \mathfrak{z}(\mu_1, \ldots, \mu_n, -\mu_{n+1})\,\mathfrak{Z}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}). \tag{22}$$

Durch Multiplikation von (21) und (22) folgt

$$\mathfrak{z}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})^2 = \mathfrak{Z}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})^2,$$

also $\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}$, w. z. b. w.

Der Übergang von (19) und (20) zu den Divisorengleichungen (21) und (22) ist nach unserer Induktionsannahme nur statthaft, wenn die Meromorphismen $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ über die Voraussetzungen von Satz 7 hinaus folgenden Bedingungen genügen:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq \mu_{n+1}, \quad \mu_i + \mu_{n+1} \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\mu_1 + \mu_2 \neq \mu_j \qquad (j = 3, \ldots, n+1),$$
$$\mu_1 + \mu_2 \neq -\mu_{n+1}. \tag{23}$$

Von diesen Bedingungen können wir uns nachträglich freimachen. Wir können analog wie im Abschnitt 4 bei der Divisorendarstellung der Determinante dritten Grades die Divisorendarstellung von $D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ für die Sonderfälle (23) direkt beweisen. Noch einfacher benutzen wir aber die Symmetrieeigenschaften von $D(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ in $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$. Wir können z. B. die Meromorphismen $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ stets so numerieren, daß die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 0$ von selbst erfüllt ist. Auf diese Weise können wir uns schrittweise von den Bedingungen (23) freimachen. Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

In den Sätzen 3, 4 und 7 mußten wir den Fall, daß die Summe der betrachteten Meromorphismen gleich Null ist, ausschließen. Es gilt der

Satz 8. *Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ n von Null und voneinander verschiedene Meromorphismen mit*

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = 0,$$

so ist

$$D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = 0.$$

Beweis. Es seien $\mathfrak{P}_i$ die den μ_i entsprechenden Primdivisoren ersten Grades von $\mathfrak{K}$. Die Relation $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$ ist dann gleichbedeutend mit $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i = \mathfrak{D}$, d. h. mit der Existenz eines nicht verschwindenden ganzen Multiplums

$$Z = \gamma_1 Z_1 + \cdots + \gamma_n Z_n \qquad (\gamma_i \text{ in } K)$$

von $\mathfrak{D}^{-n}$ in $\mathfrak{K}$, für welches

$$Z\mathfrak{P}_i = \gamma_1 z_1 \mu_i + \cdots + \gamma_n z_n \mu_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist. Das Gleichungssystem $Z\mathfrak{P}_i = 0$ hat aber gerade die behauptete Determinantenbedingung zur Folge.

6. Divisorendarstellung der Differentialdeterminante.

In der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen gilt bekanntlich die Formel

$$\begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \ldots & \wp^{(n-1)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \ldots & \wp^{(n)}(u) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \ldots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix} = e\,\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} \qquad (e \text{ Konstante}).$$

Das abstrakte Analogon dieser Formel sprechen wir aus im

Satz 9. *Es sei $n > 2$ und $z_1, \ldots, z_n$ eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{o}^{-n}$. Dann hat die Differentialdeterminante*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ D^{(1)} z_1 & \ldots & D^{(1)} z_n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ D^{(n-1)} z_1 & \ldots & D^{(n-1)} z_n \end{vmatrix}$$

die Divisorendarstellung

$$\Delta_n = \frac{\mathfrak{o}\, \mathfrak{n}}{\mathfrak{o}^{n^2}}$$ [5]).

Satz 2 ist offenbar der Spezialfall $n = 2$ des Satzes 9. Satz 9 ist eigentlich nur eine kurze und zusammenfassende Schreibweise der Resultate in HI. Wir ergreifen hier zugleich die Gelegenheit, zu zeigen, wie die Beweise in HI vereinfacht werden können. Dazu schicken wir folgende Bemerkung voraus.

Es sei C eine Divisorenklasse vom Grade $n > 1$ und $\mathfrak{a}$ ein ganzer Divisor aus C. $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sei eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{a}^{-1}$. Dann ist die Differentialdeterminante der y_i in der Form

$$|D^{(\varkappa)} y_i| = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{a}^n} \quad (i = 1, \ldots, n;\ \varkappa = 0, \ldots, n-1)$$

darstellbar, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor vom Grade n^2 ist. Dabei müssen wir noch voraussetzen, daß die Differentialdeterminante verschieden von Null ist. Ist $\mathfrak{b}$ ein anderer ganzer Divisor aus C und $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{b}^{-1}$, so ist

$$|D^{(\varkappa)} \bar{y}_i| = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}^n} \quad (i = 1, \ldots, n;\ \varkappa = 0, \ldots, n-1)$$

mit *demselben* Zählerdivisor $\mathfrak{g}$.

Diese Bemerkung benutzen wir bei der Bestimmung des der Determinante Δ_n zugeordneten Divisors. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $(n, p) = 1$. Dann liefert $\mathfrak{o}$ zu Δ_n nach HI den Beitrag $\mathfrak{o}^{-(n^2-1)}$. Es ist also

$$\Delta_n = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{o}^{n^2}}, \quad \mathfrak{o} \nmid \mathfrak{g},\ \mathfrak{o}^2 \nmid \mathfrak{g}.$$

Ist $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedener in $\mathfrak{g}$ aufgehender Primdivisor, $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ eine Basis der ganzen Multipla von $\mathfrak{p}^{-n}$, so ist, da $\mathfrak{p}^n$ und $\mathfrak{o}^n$ zur gleichen Klasse gehören, nach unserer Vorbemerkung

$$\bar{\Delta}_n = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}^{n^2}}, \quad \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{g},\ \mathfrak{p}^2 \nmid \mathfrak{g}.$$

---

[5]) $D^{(\varkappa)}$ bedeuten die für Primzahlcharakteristik modifizierten höheren Differentiale.

$\mathfrak{g}$ ist also aus n^2 verschiedenen Primdivisoren zusammengesetzt. Es gibt also n^2 Klassen C_0 mit $C_0^n = 1$.

b) $n = p^\nu$. Dann liefert $\mathfrak{o}$ zu Δ_n nach HI den Beitrag $\mathfrak{o}^{-p^\nu(p^\nu-1)}$ oder einen höheren, je nachdem $A \neq 0$ oder $A = 0$ ist. Wie in a) folgt auf Grund unserer Vorbemerkung, daß $\mathfrak{g}$ alle seine Teiler in der gleichen Potenz enthält. Für $A = 0$ ergibt sich hieraus, daß

$$\bar{\Delta}_n = \frac{\mathfrak{g}_1^{p^\nu}}{\mathfrak{o}^{p^{2\nu}}}$$

und $\mathfrak{g}_1$ aus p^ν verschiedenen Primdivisoren zusammengesetzt ist. Es gibt p^ν Klassen C_0 nullten Grades mit $C_0^{p^\nu} = 1$.

Für $A = 0$ stellen wir zunächst fest, daß $\Delta_n \neq 0$ ist (was in den vorigen Fällen auf Grund der Kenntnis des genauen $\mathfrak{o}$-Beitrages selbstverständlich war). Wäre nämlich $\Delta_n = 0$, so wäre die p^ν-te Potenz aller Klassen nullten Grades gleich 1, im Widerspruch zu a). $\mathfrak{g}$ enthält alle seine Teiler in einer höheren als der p^ν-ten Potenz. Die Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^{p^\nu} = 1$ ist also kleiner als p^ν. Daraus folgt wegen der gruppentheoretischen Bedeutung dieser Anzahl, daß in Wahrheit $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}^{p^{2\nu}}$ ist. Außer der Einsklasse gibt es keine Klasse C_0 mit $C_0^{p^\nu} = 1$.

c) $n = m\,p^\nu$, $(m, p) = 1$. Aus a) und b) folgt, daß die Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^n = 1$ gleich $m^2 p^\nu$ oder m^2 ist, je nachdem $A \neq 0$ oder $A = 0$ ist. Es ist also unter Berücksichtigung unserer Vorbemerkung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1^{p^\nu} \quad \text{für } A \neq 0,$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2^{p^{2\nu}} \quad \text{für } A = 0.$$

$\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ enthalten ihre Primteiler genau in der ersten Potenz.

Um den Beweis von Satz 9 zu vollenden, bemerken wir, daß $\mathfrak{o}\,n$ und $\mathfrak{g}$ aus denselben Primteilern zusammengesetzt sind: $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\,n \longleftrightarrow n\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \longleftrightarrow \mathfrak{p}^n \sim \mathfrak{o}^n$. Aus der Normenadditionsformel folgt in bekannter Weise $N(n) = n^2$. Es ist $N(n) = N_0(n)\,I(n)$ und $N_0(n)$ die Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^n = 1$. Also $I(n) = 1$ für $(n, p) = 1$ und $I(p) = p$ oder p^2, je nachdem $A \neq 0$ oder $A = 0$ ist. Ein Vergleich mit a), b), c) lehrt, daß $\mathfrak{g}$ alle seine Primteiler genau in der $I(n)$-ten Potenz enthält. Also ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}\,n$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 12. Mai 1941.)

Ganze Lösungen der Differentialgleichung $w'' = f(w)$.

Von

Hans Wittich in Göttingen.

In dieser Zeitschrift bewies Herr RELLICH [1]) den folgenden Satz: Es sei $w = w(z)$ eine ganze Funktion der komplexen Veränderlichen z und Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^2w}{dz^2} = f(w)$, in der $f(w)$ eine ganze, aber nichtlineare Funktion von w bedeutet. Dann ist $w(z)$ eine Konstante. Für diesen Satz soll ein Beweis angegeben werden, bei dem Hilfsmittel aus der Wertverteilungslehre [2]) herangezogen werden.

Ausgangspunkt bildet die Differentialgleichung

$$w^{(n)} + p_1(z)\, w^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(z)\, w' = f(w), \quad n \geqq 2. \tag{1}$$

Die $p_j(z) \not\equiv 0$ sind Polynome vom Grad g_j, und $f(w)$ ist eine ganze [3]) Funktion, über die noch nähere Voraussetzungen zu machen sind. (1) besitze eine ganze Lösung $w = w(z)$. Übergang zur Schmiegungsfunktion

$$m\left(r, F(z)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

ergibt die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} m\left(r, f(w(z))\right) &\leqq m\left(r, w^{(n)}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} m\left(r, p_j(z)\, w^{(n-j)}\right) + c_1 \\ &\leqq \sum_{j=0}^{n-1} m\left(r, w^{(n-j)}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} m\left(r, p_j(z)\right) + c_2 \\ &\leqq \sum_{j=0}^{n-1} m\left(r, w^{(n-j)}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} g_j \log r + c_3 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} m\left(r, w^{(n-j)}\right) + g \log r + c_3, \end{aligned}$$

---

[1]) F. RELLICH, Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$. Math. Zeitschr. **47** (1940).

[2]) Für die Bezeichnungen und benutzten Sätze vgl. R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

[3]) $f(w)$ ist ein Polynom oder eine ganze transzendente Funktion.

wobei $g = \sum_{j=1}^{n-1} g_j$ gesetzt wurde. Die Summe über die Schmiegungsfunktionen $m(r, w^{(n-j)})$ läßt sich weiter umformen. Aus der Beziehung

$$w^{(\varkappa)} = w^{(\varkappa-1)} \cdot \frac{w^{(\varkappa)}}{w^{(\varkappa-1)}}$$

folgt

$$m(r, w^{(\varkappa)}) \leqq m(r, w^{(\varkappa-1)}) + m\left(r, \frac{w^{(\varkappa)}}{w^{(\varkappa-1)}}\right).$$

Auf den zweiten Summanden rechts wird der Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung angewandt. Da mit $w(z)$ auch $w^{(\varkappa-1)}(z)$ eine ganze Funktion ist, folgt unter Beachtung des ersten Hauptsatzes: $m(r, w^{(\varkappa)}) = m(r, w^{(\varkappa-1)}) + 0(\log r \cdot m(r, w)^{(\varkappa-1)})$. Wendet man diese Umformungen für $\varkappa = n-j, n-(j+1), \ldots, 1$ an, so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} m(r, w^{(n-j)}) &< m(r, w) + 0(\log r \cdot m(r, w)) \\ &= T(r, w) + 0(\log r \cdot T(r, w)). \end{aligned}$$

Somit folgt aus (1)

$$(2)\quad m(r, f(w(z))) = T(r, f(w(z))) \leqq n \cdot T(r, w) + g \log r + 0(\log r \cdot T(r, w)).$$

Wegen der in dem Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung auftretenden Ausnahmeintervalle gilt (2) für alle r, außer höchstens für eine Menge Δ_r von Werten r, für welche $\int_{\Delta_r} r^{\lambda-1}\, dr$, $\lambda \geqq 0$, beschränkt ist. Im Falle $p_j(z) \equiv 0$, also $w^{(n)}(z) = f(w)$, vereinfacht sich (2) zu

$$(2')\qquad T(r, f(w(z))) \leqq T(r, w) + 0(\log r \cdot T(r, w)).$$

Wir schätzen jetzt die Charakteristik $T(r, f(w(z)))$ der zusammengesetzten Funktion $f(w(z))$ ab. Falls $f(w)$ ein Polynom vom Grade q in w ist, $f(w) = P_q(w)$, gilt $T(r, f(w(z))) = q\,T(r, w) + 0(1)$ nach Definition der Schmiegungsfunktion und nach dem ersten Hauptsatz. Wenn $f(w)$ eine ganze transzendente Funktion ist, kann man zu einer passenden, für den vorliegenden Zweck ausreichenden Abschätzung etwa auf folgendem Wege gelangen. Zu einem Wert c, der nicht Picardscher Ausnahmewert für die Funktion $f(w)$ ist, gehören unendlich viele Werte $w_1, w_2, \ldots$, für welche $f(w_j) - c = 0$ gilt. Wir fixieren eine beliebige natürliche Zahl k und betrachten k c-Stellen $w_1, w_2, \ldots, w_k$ der Funktion $f(w)$. Dann gilt sicher für die Anzahlfunktionen die Schätzung

$$N\left(r, \frac{1}{f(w(z)) - c}\right) \geqq \sum_{j=1}^{k} N\left(r, \frac{1}{w - w_j}\right)$$

und nach dem ersten Hauptsatz weiter

$$\sum_{j=1}^{k} N\left(r, \frac{1}{w - w_j}\right) < T\left(r, f(w(z))\right). \tag{3}$$

In (3) führen wir nun noch die Charakteristik von $w(z)$ ein. Das gelingt mit einem Satz von VALIRON[4]), den wir hier so formulieren: $w = w(z)$ sei eine beliebige gebrochene Funktion. Dann gilt bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ für alle a, außer höchstens einer Wertmenge vom linearen Maß Null,

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{N\left(r, \frac{1}{w - a}\right)}{T(r, w)}$$

für alle $r > r_\varepsilon$, höchstens ausgenommen eine Menge von r-Werten, die vollständig durch eine Intervallfolge mit endlicher Gesamtlänge überdeckt werden kann.

Danach gibt es bei gegebenem k mindestens einen Wert c, so daß für die zugeordneten w_j, $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$(1 - \varepsilon) < \frac{N\left(r, \frac{1}{w - w_j}\right)}{T(r, w)}$$

gilt, für alle $r > r_\varepsilon$ außerhalb der Ausnahmemenge. Aus (2) folgt also $k(1 - \varepsilon)\, T(r, w) \leqq T\left(r, f(w(z))\right)$ oder mit $\varepsilon = \frac{1}{2k}$

$$(k - \tfrac{1}{2})\, T(r, w) \leqq T\left(r, f(w(z))\right). \tag{3'}$$

(2) und (3') zusammen führt zu

$$\begin{aligned}(k - \tfrac{1}{2})\, T(r, w) &\leqq n \cdot T(r, w) + g \log r + 0(\log r \cdot T(r, w)) \\ &\leqq n \cdot T(r, w) + C \cdot \log\left(r \cdot T(r, w)\right),\end{aligned} \tag{4'}$$

wobei C eine endliche positive Konstante ist. (4') gilt für alle $r > r_\varepsilon$, ausgenommen höchstens eine Menge $\bar{\Delta}_r$ von r-Werten, für welche etwa $\int_{\bar{\Delta}_r} dr < \infty$ ausfällt. In

$$(K - n) T(r, w) < C \cdot \log\left(r \cdot T(r, w)\right) \tag{4}$$

---

[4]) G. VALIRON, Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. Acta math. **47** (1925). Eine Verallgemeinerung dieses VALIRONschen Satzes lautet: Für eine nicht beschränktartige Funktion gilt $\lim_{r \to R} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1$, außer höchstens für eine Wertmenge (a) von verschwindender innerer Kapazität. Vgl. R. NEVANLINNA, l. c. [2]), S. 264.

ist $K = k - \frac{1}{2}$ und bei $f(w) = P_q(w)$ $K = q$ zu setzen. Im Falle $p_j(z) \equiv 0$ ist in (4) n durch 1 zu ersetzen.

Aus (4) lassen sich nun leicht einige Aussagen über die ganzen Lösungen von (1) ablesen.

a) $f(w)$ ist kein Polynom, also nach Voraussetzung eine ganze transzendente Funktion. Dann kann die Differentialgleichung (1) keine ganzen Lösungen haben. Für ganze Lösungen wächst $T(r, w)$ mindestens wie $\log r$ bei $r \to \infty$. Da man $(K - n) > C$ erreichen kann, führt nach (4) die Annahme, daß eine ganze Lösung von (1) existiert, zum Widerspruch.

b) $f(w)$ ist ein Polynom $P_q(w)$ vom Grad q. Aus (4) folgt, daß bei $q \geqq (n + 1)$ (1) keine ganze transzendente Lösung haben kann. Dieser Schluß kann im Falle b) versagen, wenn $T(r, w) = 0\,(\log r)$ gilt, wie man aus (4) erkennt. Da $w(z)$ eine ganze Lösung sein soll, zieht die Annahme $T(r, w) = 0\,(\log r)$ $w(z) = P_m(z)$ nach sich. (1) kann also im Falle b) Polynomlösungen haben. Daß solche Lösungen unter den angegebenen Bedingungen tatsächlich existieren können, zeigt man leicht.

Damit haben wir das folgende Ergebnis gewonnen:

In der Differentialgleichung

$$w^{(n)}(z) + p_1(z) w^{(n-1)}(z) + \cdots + p_{n-1}(z)\, w'(z) = f(w)$$

sind die $p_j(z) \not\equiv 0$ Polynome, $f(w)$ ist eine ganze Funktion von w. Falls $f(w)$ ganz transzendent ist, gibt es keine ganze Funktion $w = w(z)$, die dieser Differentialgleichung genügt.

Wenn $f(w)$ ein Polynom $P_q(w)$ vom Grade $q \geqq (n + 1)$ ist, dann muß jede ganze Lösung der Differentialgleichung, wenn überhaupt eine solche existiert, eine ganze rationale Funktion sein.

Genügt eine ganze Funktion der Differentialgleichung $w^{(n)} = f(w)$, $n \geqq 2$ und $f(w)$ eine ganze nichtlineare Funktion von w, dann gilt statt (4) sicher

$$(4'') \qquad \tfrac{1}{2}\, T(r, w) < C \cdot \log\left(r \cdot T(r, w)\right).$$

Daraus folgt zunächst, daß $w(z)$ keine transzendente Funktion sein kann. Daß auch keine ganze rationale Funktion Lösung von $w^{(n)}(z) = f(w)$ sein kann, zeigt man sofort. Mithin gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes von Rellich keine ganze Funktion der komplexen Veränderlichen z, die der Differentialgleichung $w^{(n)}(z) = f(w)$, $n \geqq 2$ genügt.

Es liegt nahe, als Koeffizienten $p_j(z)$ der Differentialgleichung (1) allgemein ganze Funktionen, also auch ganze transzendente, zuzulassen. Aus

Voraussetzungen über das Wachstumsverhalten der Koeffizienten $p_j(z)$ kann man dann Schlüsse ziehen über das Wachstumsverhalten der möglichen transzendenten Lösungen von (1).

Es sei noch auf eine interessante Anwendung von R. Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen hingewiesen, die vor einigen Jahren K. Yosida[5]) machte. Er bewies neben einigen Sätzen über eindeutige und endlich vieldeutige Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen in wenigen Zeilen das Ergebnis von Malmquist: Wenn die rationale Differentialgleichung $w' = R(z, w)$ keine Riccatische ist, dann ist jedes eindeutige Integral derselben eine rationale Funktion.

---

[5]) K. A. Yosida, Generalisation of a Malmquist's theorem. Japanese Journ. of Math. 9, S. 253–256.

(Eingegangen am 11. März 1941.)

Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter.

Von

Georg Hajós in Budapest.

Inhalt.

§ 1. Einleitung 427
§ 2. Geometrische Fassung 429
§ 3. Hilfssätze für reguläre Punktsysteme, Punktgitter und Würfelgitter 431
§ 4. Rationales Würfelgitter 433
§ 5. Gruppenalgebra 437
§ 6. Zuordnung einer Gruppe zu einem rationalen Würfelgitter . . . 439
§ 7. Gruppenalgebraische Fassung 441
§ 8. Mehrfach raumbedeckende Würfelgitter 443
§ 9. Gruppenalgebraische Hilfssätze 446
§ 10. Irreduzibel verschwindende Produkte 453
§ 11. Sätze über Produkte von Primreihen 457
§ 12. Bestätigung der Minkowskischen Vermutung 462

§ 1.

Einleitung.

Vor etwa einem halben Jahrhundert erschien das Werk „Geometrie der Zahlen" von Minkowski [9][1]), worin er unter anderem eine seitdem vielbehandelte Frage aufwarf. Diese wollen wir in vorliegender Arbeit beantworten; sie hängt mit dem folgenden in genanntem Werk bewiesenen Satz von Minkowski zusammen:

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ homogene lineare Formen in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, mit reellen Koeffizienten und der Determinante 1, *so gibt es ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle verschwinden und für welche*

$$|\xi_1| \leqq 1, \ldots, |\xi_n| \leqq 1$$

ist.

[1]) Die in eckige Klammern gesetzten Ziffern weisen auf die am Ende stehende Zusammenstellung der Literatur hin.

Läßt man hierbei das Gleichheitszeichen weg, so ist der Satz nicht mehr für alle zugelassenen Formensysteme richtig. Das zeigt z. B. das Formensystem

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1,\\ \xi_2 &= a_{21}x_1 + x_2,\\ &\vdots\\ \xi_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + x_n.\end{aligned}$$

Wendet man auf dieses System eine homogene lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante 1 an, so ergibt sich wiederum ein Formensystem, bei welchem der Satz ohne Gleichheitszeichen falsch ist. Bei all diesen Systemen hat eine Form lauter ganzzahlige Koeffizienten.

Minkowski warf die Frage auf, ob es außer den eben gekennzeichneten auch noch andere derartige Ausnahmefälle gibt. Für $n \leqq 3$ bewies er[2]), daß dies nicht der Fall ist. Es gelang ihm aber nicht, die Vermutung zu beweisen, daß dies auch für jedes n gilt[3]). Seiner Vermutung kann folgende Fassung gegeben werden:

1. Fassung. *Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ homogene lineare Formen in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, mit reellen Koeffizienten und der Determinante* 1, *besitzt weiter keine dieser Formen nur ganzzahlige Koeffizienten, so gibt es ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle verschwinden und für welche*

$$|\xi_1| < 1, \ldots, |\xi_n| < 1$$

ist[4]).

Es gibt eine Reihe von Verfassern, die sich mit dieser Vermutung beschäftigt haben, ohne jedoch eine endgültige Antwort geben zu können. H. Jansen [4] bewies ihre Richtigkeit für $n \leqq 6$, Th. Schmidt [15] für $n \leqq 7$, O.-H. Keller [6] für $n \leqq 8$. Bezüglich der genannten Arbeiten vgl. jedoch die kritischen Bemerkungen von O. Perron [13], der einen klaren Beweis für $n \leqq 9$ gab [14]. B. Levi [8], S. L. van Oss [12] und C. L. Siegel [16] beschäftigten sich mit der allgemeinen Vermutung, ihre Beweise enthalten aber Lücken, bzw. sind nicht ausgearbeitet worden. J. F. Koksma [7] und L. J. Mordell [11] gaben Berichte von der Lage des ganzen Problemkreises. In vorliegender Arbeit wird die Richtigkeit der Vermutung für jedes n bewiesen. Aus meinen beiden ungarisch geschriebenen Arbeiten [2], [3] geht auch eine Bestätigung der Vermutung hervor, die aber von vorliegender Arbeit bezüglich der Beweisanordnung wesentlich verschieden ist.

---

[2]) [9], S. 106–107 und [10], S. 24–28, 67–75.

[3]) [9], S. 105 und [10], S. 28.

[4]) Diese von Minkowski stammende Fassung scheint weniger zu sagen als die ursprüngliche. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß sie äquivalent sind.

Der Vermutung gab man verschiedene Fassungen. Eine geometrische stammt von MINKOWSKI; im folgenden wollen wir die Vermutung auch in dieser geometrischen Fassung behandeln. Ich gab [2] der Vermutung eine gruppenalgebraische Form; da wir bei unserer Beweisführung diese Form brauchen werden, wird sie im folgenden von der geometrischen Fassung ausgehend abgeleitet. In einem speziellen Falle gab D. DERRY [1] eine gruppentheoretische Fassung.

O.-H. KELLER [5] verallgemeinerte die Vermutung wesentlich, um ihren Beweis dadurch zu ermöglichen; diese verallgemeinerte Vermutung bewies er [6] für $n \leqq 6$. Man vgl. jedoch die diesbezügliche Bemerkung von O. PERRON [13], der ihr ebenfalls im Falle $n \leqq 6$ einen einwandfreien Beweis gab. Wir werden ebenfalls neben der MINKOWSKISCHEN Frage auch eine verallgemeinerte Frage behandeln. Es wird jedoch bewiesen, daß bei dieser Fragestellung eine der MINKOWSKISCHEN entsprechende Vermutung nur für $n \leqq 3$ richtig ist.

§ 2.

Geometrische Fassung.

Bevor wir die geometrische Fassung der Vermutung angeben, wollen wir einige geometrische Begriffe klar darlegen.

Wir werden im n-dimensionalen euklidischen Raume R_n arbeiten. In diesem denken wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ein für allemal gegeben. Wir benützen die wie üblich definierten Begriffe: Abstand, r-Umgebung eines Punktes (mit dem Radius r), Verbindungsvektor zweier Punkte, mit n Vektoren als Kanten gebildetes Parallelotop.

Die Menge jener Punkte des R_n, deren Koordinaten $(n - m)$ lineare unabhängige und widerspruchsfreie Relationen erfüllen, wird ein *m-dimensionaler Unterraum* des R_n genannt. Ein eindimensionaler Unterraum ist eine *Gerade*. Zwei Unterräume sind *parallel*, wenn die entsprechenden Relationen sich voneinander nur in den absoluten Gliedern unterscheiden.

Von einer Punktmenge P des R_n sagen wir, daß sie ein *reguläres Punktsystem* ist, wenn die von einem Punkt A nach allen zu P gehörenden Punkten führenden Vektoren (bezüglich der Vektoraddition als Gruppenoperation) eine Gruppe bilden. Diese Vektoren nennen wir *P-Vektoren*, ihre Gruppe *P-Gruppe* und die zu P gehörenden Punkte *P-Punkte*. Es folgt aus der Definition, daß als Punkt A ein beliebiger P-Punkt gewählt werden kann und die P-Gruppe unabhängig von dieser Wahl ist. Wegen der Kommutativität der Vektoraddition ist die P-Gruppe abelsch. Ein jeder Unterraum ist z. B. ein reguläres Punktsystem.

Hat das reguläre Punktsystem P keinen Häufungspunkt, so nennen wir es ein *Punktgitter*. Zwei derselben nennen wir *kongruent*, wenn sie durch eine Translation auseinander hervorgehen. Vom Punktgitter P sagen wir, daß es *m-dimensional* ist, wenn es einen m-dimensionalen Unterraum gibt, der P enthält, aber keinen Unterraum geringerer Dimensionszahl von dieser Beschaffenheit. Diesen m-dimensionalen Unterraum bezeichnen wir als *P-Raum*.

Die Menge jener Punkte, deren Koordinaten die Bedingungen

$$(1) \qquad |x_1 - a_1| \leqq \tfrac{1}{2}, \ \ldots, \ |x_n - a_n| \leqq \tfrac{1}{2} \qquad (a_1, \ \ldots, \ a_n \text{ fest})$$

erfüllen, wird als *Würfel* bezeichnet. Den Punkt mit den Koordinaten $a_1, \ldots, a_n$ nennen wir seinen *Mittelpunkt*. Die Punkte, für deren x_i-Koordinate (für ein gewisses i)

$$x_i - a_i = \tfrac{1}{2} \text{ bzw. } -\tfrac{1}{2}$$

gilt und deren übrige Koordinaten die Bedingungen (1) erfüllen, bilden eine *Seitenfläche* des Würfels.

Eine Menge W von Würfeln, deren Mittelpunkte ein Punktgitter bilden, heiße *Würfelgitter*[5]). Die zu W gehörenden Würfel nennen wir *W-Würfel*. Das durch die Mittelpunkte der W-Würfel gebildete Punktgitter bezeichnen wir mit $P(W)$. Die Seitenflächen der W-Würfel werden *W-Seitenflächen* genannt.

Vom Würfelgitter W sagen wir, daß es *raumbedeckend* ist, wenn ein jeder Punkt des R_n, der auf keiner W-Seitenfläche liegt, in gleich vielen W-Würfeln enthalten ist. Ist diese Zahl k, so sagen wir, daß W den Raum *k-fach bedeckt*.

Zwei Würfelgitter W_1 und W_2 sind *kongruent*, wenn $P(W_1)$ und $P(W_2)$ kongruent sind. Zwei Würfelgitter W_1 und W_2 werden *äquivalent* genannt, wenn ein jeder Punkt des R_n, der auf keiner W_1- oder W_2-Seitenfläche liegt, in ebenso vielen W_1-Würfeln wie in W_2-Würfeln enthalten ist.

Ein Würfelgitter W heißt *balkenförmig*[6]), wenn es zwei verschiedene W-Würfel gibt, die eine ganze gemeinsame Seitenfläche besitzen. Anders ausgedrückt kann man also sagen: ein Würfelgitter W ist dann und nur dann balkenförmig, wenn in der $P(W)$-Gruppe ein mit einer Koordinatenachse paralleler Einheitsvektor vorkommt. — Ist W balkenförmig, so folgt aus der Regularität, daß es zu jedem W-Würfel einen „Nachbarwürfel" gibt, der mit ihm eine ganze gemeinsame Seitenfläche hat.

Wir sind nun in der Lage, die schon angedeutete geometrische Fassung der Minkowskischen Vermutung in knapper Form auszusprechen.

---

[5]) Wir erlauben also, daß die zum Würfelgitter gehörenden Würfel eventuell gemeinsame innere Punkte haben. Die Bezeichnung „Würfelgitter" ist als genaues Analogon des Punktgitters zu betrachten.

[6]) Über diese Bezeichnung vgl. Perron [13], S. 2.

2. Fassung. *Jedes den R_n einfach bedeckende Würfelgitter ist balkenförmig.*

Daß diese und die 1. Fassung gleich viel aussagen, ist in fast jedem Werke der einschlägigen Literatur ausführlich behandelt. Im folgenden gehen wir von dieser 2. Fassung aus.

Neben der Untersuchung der Richtigkeit dieser Vermutung werfen wir auch folgende allgemeinere Frage auf:

Ist jedes raumbedeckende Würfelgitter des R_n balkenförmig?

Wie in der Einleitung schon erwähnt, werden wir zeigen, daß diese Frage nur für $n \leqq 3$ bejahend zu beantworten ist.

§ 3.

Hilfssätze über reguläre Punktsysteme, Punktgitter und Würfelgitter.

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze bewiesen werden, von denen der Leser vielleicht annimmt, daß sie evident seien. Wir beweisen sie jedoch, da wir keine „anschauliche" Vorstellung des mehrdimensionalen Raumes als Beweismittel benutzen wollen.

Satz 1. *Der Durchschnitt P zweier regulärer Punktsysteme P_1 und P_2 ist ein reguläres Punktsystem.*

Beweis. A sei ein Punkt von P. Die von A nach den Punkten von P führenden Vektoren sind sowohl P_1-Vektoren als P_2-Vektoren. Trägt man umgekehrt einen Vektor, der sowohl P_1-Vektor als P_2-Vektor ist, von A aus ab, so führt er nach einem Punkt von P. Der Durchschnitt der P_1-Gruppe und der P_2-Gruppe ist aber eine Gruppe. D. h. die von A nach den Punkten von P führenden Vektoren bilden eine Gruppe.

Satz 2. *Zum regulären Punktsystem P kann man einen Abstand r so angeben, daß die r-Umgebung eines beliebigen im P-Raum liegenden Punktes mindestens einen P-Punkt enthält.*

Beweis. Ist P m-dimensional, so gibt es m P-Vektoren, die nicht in einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum liegen. Wir bauen von einem gewissen P-Punkt ausgehend mit diesen m Vektoren ein Punktgitter P' auf. P' ist also eine Teilmenge von P. Es ist nun klar, daß, wie man auch das mit diesen m Vektoren als Kanten gebildete Parallelotop im P-Raum verschiebt, es immer einen P'-Punkt, also auch einen P-Punkt enthält. Wählt man r so groß, daß ein solches Parallelotop im Inneren einer r-Umgebung liegt, so entspricht dieses r der Anforderung unseres Satzes.

Satz 3. *Liegen in einem m-dimensionalen Unterraum unendlich viele voneinander verschiedene kongruente m-dimensionale Punktgitter, so besitzen ihre Punkte Häufungspunkte.*

Beweis. Zu den kongruenten Punktgittern gibt es einen dem Satz 2 entsprechenden Abstand r. Die r-Umgebung eines beliebigen im Unterraum liegenden Punktes enthält also wenigstens je einen Punkt der unendlich vielen Punktgitter. Diese haben also, da sie alle verschieden sind, mindestens einen Häufungspunkt.

Wir bemerken als klare Folgerung, daß der Satz auch dann richtig bleibt, wenn die kongruenten Punktgitter nicht in demselben m-dimensionalen Unterraum liegen, sondern in parallelen, sich häufenden Unterräumen.

Ist P ein Punktgitter und sind die unabhängigen Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ von der Beschaffenheit, daß jeder P-Vektor in der Form

$$a_1\mathfrak{v}_1 + \cdots + a_m\mathfrak{v}_m \qquad (a_1, \ldots, a_m \text{ ganz})$$

aufschreibbar ist, so nennen wir $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ *Grundvektoren* des Punktgitters P [7]). Bezüglich dieser beweisen wir den

Satz 4. *Zu einem m-dimensionalen Punktgitter P kann man m Grundvektoren finden.*

Beweis. Wir beweisen den Satz mit vollständiger Induktion bezüglich m. Ist $m = 1$, so ist unsere Behauptung fast trivial. Man braucht nur einen P-Vektor geringster Länge auszusuchen. Einen solchen gibt es, da P keinen Häufungspunkt hat.

Es sei $m > 1$. Da P m-dimensional ist, gibt es $(m + 1)$ nicht in einem $(m - 1)$-dimensionalen Unterraum liegende P-Punkte. m unter diesen bestimmen einen $(m - 1)$-dimensionalen Unterraum U. Da U selbst auch ein reguläres Punktsystem ist, bilden die in U liegenden P-Punkte nach Satz 1 ein reguläres Punktsystem, und zwar ein $(m - 1)$-dimensionales Punktgitter. Dieses besitzt laut der Induktionsvoraussetzung $(m - 1)$ Grundvektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{m-1}$. Ein jeder mit U paralleler P-Vektor läßt sich also in der Form

$$a_1\mathfrak{v}_1 + \cdots + a_{m-1}\mathfrak{v}_{m-1} \qquad (a_1, \ldots, a_{m-1} \text{ ganz}) \tag{2}$$

schreiben.

Unter den nicht in U liegenden P-Punkten gibt es einen Punkt minimalen [8]) Abstandes von U. Wenn das nämlich nicht so wäre, so gäbe es eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von P-Punkten, deren Abstände verschieden sind und nach einem Grenzwert streben. Legt man durch jeden Punkt dieser Folge einen mit U parallelen Unterraum, so enthält jeder dieser Unterräume ein aus P-Punkten bestehendes Punktgitter, das mit dem in U liegenden kongruent ist. Da aber diese Unterräume sich häufen, müßten auch die P-Punkte nach unserer Bemerkung zum Satz 3 einen Häufungspunkt besitzen. Da dies ausgeschlossen ist, gibt es wirklich einen nicht in U liegenden P-Punkt A minimalen Ab-

[7]) Diese Grundvektoren sind keineswegs eindeutig durch P bestimmt.

[8]) In dem Sinne, daß kein anderer P-Punkt einen kleineren Abstand hat.

standes von U. $\mathfrak{v}_m$ sei nun ein Vektor, der von einem in U liegenden P-Punkt nach A führt. Wir behaupten, daß $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ Grundvektoren des Punktgitters P sind.

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger P-Vektor, so gibt es unter den Vektoren

$$\mathfrak{p} - a_m \mathfrak{v}_m \qquad (a_m \text{ ganz}) \tag{3}$$

einen, der mit U parallel läuft. Im entgegengesetzten Falle müßte nämlich ein gewisser Vektor der Form (3) von einem in U liegenden P-Punkt aus nach einem P-Punkt führen, der nicht in U liegt und dessen Abstand von U geringer wäre, als der Abstand des Punktes A. Da aber dies der Definition von A widerspricht, muß es tatsächlich einen mit U parallelen Vektor der Form (3) geben. Dieser läßt sich dann in der Form (2) schreiben, was für $\mathfrak{p}$ die behauptete Form liefert.

Satz 5. *Bilden die in einem i-dimensionalen Unterraum liegenden Punkte des m-dimensionalen Punktgitters P ein i-dimensionales Punktgitter mit den Grundvektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_i$, so kann man die Vektoren $\mathfrak{v}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{v}_m$ so angeben, daß $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ Grundvektoren des Punktgitters P sind.*

Dieser Satz geht direkt aus dem Beweise des Satzes 4 hervor.

Satz 6. *Sind die Würfelgitter W_1 und W_2 bzw. W_2 und W_3 einander äquivalent, so sind auch W_1 und W_3 einander äquivalent.*

Beweis. Es sei A ein Punkt, der auf keiner W_1- oder W_3-Seitenfläche liegt. Liegt A auf keiner W_2-Seitenfläche, so folgt direkt aus der Definition der Äquivalenz, daß A in ebenso vielen W_1-Würfeln, wie in W_3-Würfeln enthalten ist. Liegt aber A auf einer W_2-Seitenfläche, so kann man ihn mit Punkten der schon besprochenen Art annähern. Da all diese in gleich vielen W_1- und W_3-Würfeln enthalten sind, trifft das auch für A zu.

Satz 7. *Bedeckt das Würfelgitter W_1 den Raum k-fach, und sind W_1 und W_2 einander äquivalent, so bedeckt auch W_2 den Raum k-fach.*

Beweis. Es sei A ein Punkt, der auf keiner W_2-Seitenfläche liegt. Liegt A auf keiner W_1-Seitenfläche, so folgt aus der Äquivalenz, daß A in k W_2-Würfeln enthalten ist. Liegt aber A auf einer W_1-Seitenfläche, so kann man ihn mit Punkten der schon besprochenen Art annähern. Da all diese in k W_2-Würfeln enthalten sind, gilt das auch für A.

§ 4.

Rationales Würfelgitter.

Ein Würfelgitter W heißt *rational*, wenn sämtliche Koordinaten eines jeden $P(W)$-Vektors rationale Zahlen sind. Folgender Satz wird uns berechtigen, bei unseren Untersuchungen nur rationale Würfelgitter zu betrachten.

Satz 8. *Wenn es im R_n ein nichtbalkenförmiges, den Raum k-fach bedeckendes Würfelgitter W gibt, so gibt es im R_n auch ein rationales Würfelgitter mit denselben Eigenschaften*[9]).

Beweis. Wir nehmen an, daß es einen $P(W)$-Vektor gibt, dessen x_1-Koordinate irrational ist.

Wir teilen die W-Würfel in *Klassen* ein. Zwei Würfel sollen derselben Klasse angehören, wenn die x_1-Koordinate des Verbindungsvektors ihrer Mittelpunkte rational ist. Da diese Eigenschaft reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, sind dadurch wirklich Klassen definiert worden. Da W ein Würfelgitter ist, sind sämtliche Klassen kongruent.

Die Würfel einer Klasse K bilden ein Würfelgitter. Die Menge ihrer Mittelpunkte ist nämlich der Durchschnitt des Punktgitters $P(W)$ und der Menge aller jener Punkte, deren x_1-Koordinaten um eine rationale Zahl von der x_1-Koordinate eines gewissen $P(W)$-Punktes abweichen, welche letzte Menge offenbar ein reguläres Punktsystem ist. Dem Satz 1 zufolge ist also $P(K)$ ein reguläres Punktsystem, und als Teilmenge von $P(W)$ hat es keinen Häufungspunkt.

a) Verschiebt man eine Klasse K in der x_1-Richtung, so entsteht ein mit K äquivalentes Würfelgitter K'. Mit Rücksicht auf Satz 6 genügt es, unsere Behauptung nur für solche Verschiebungen zu beweisen, deren Länge kleiner als 1 ist. Wäre nun in einem solchen Falle unsere Behauptung falsch, so gäbe es zwei Punkte A und B mit folgenden Eigenschaften: 1. die Strecke AB ist kürzer als 1 und liegt in der x_1-Richtung; 2a. A und B liegen auf keiner K-Seitenfläche; 3. A ist nicht in gleich vielen K-Würfeln enthalten wie B. Verschiebt man A und B in derselben Richtung und über gleichlange Strecken, so ist klar, daß auch die so erhaltenen Punkte die aufgezählten Eigenschaften besitzen, wenn nur die Verschiebungsstrecke genügend kurz gewählt wurde. Auf diese Weise ist es möglich, die Punkte A und B durch solche Punkte zu ersetzen, die: 2. auf keiner W-Seitenfläche liegen. A und B sollen auch diese Eigenschaften besitzen. — Aus 1 und 2 folgt, daß ein Punkt der Strecke AB nur auf einer solchen W-Seitenfläche liegen kann, die auf der x_1-Achse orthogonal ist. Wegen 3 muß es wenigstens einen solchen Punkt geben. Diese Punkte haben keinen Häufungspunkt (da sonst eine genügend groß gewählte Umgebung des Häufungspunktes unendlich viele $P(W)$-Punkte enthalten müßte), sie teilen also die Strecke AB in Teilstrecken ein. Wegen 3 gibt es unter diesen zwei Teilstrecken t_1 und t_2 mit gemeinsamem Endpunkt C, die nicht in gleich vielen K-Würfeln enthalten sind; es gibt also einen K-Würfel, dessen eine Seitenfläche die Strecke AB in C orthogonal schneidet. Andererseits sind aber t_1 und t_2, da W raumbedeckend ist, in gleich vielen W-Würfeln

[9]) Für einfache Bedeckung findet sich dieser Satz bei TH. SCHMIDT [15].

enthalten; da das für die K-Würfel nicht zutrifft, gibt es einen W-Würfel, der kein K-Würfel ist und dessen eine Seitenfläche die Strecke AB ebenfalls in C orthogonal schneidet. Die Differenz der x_1-Koordinaten der Mittelpunkte der beiden Würfel, deren Existenz eben nachgewiesen wurde, ist (wegen dem gemeinsamen Schnittpunkt C) entweder 0 oder 1. Es folgt also, gegen ihre Definition verstoßend, daß sie zur selben Klasse gehören müssen.

b) Außer den $P(K)$-Punkten gibt es im $P(K)$-Raum keinen $P(W)$-Punkt. Wäre dies falsch, so gäbe es im $P(K)$-Raum einen $P(W)$-Punkt B, der kein $P(K)$-Punkt ist. A sei ein $P(K)$-Punkt. Der $P(K)$-Raum enthält mit A und B zusammen auch das ganze aus ihnen aufgebaute eindimensionale Punktgitter. Da die x_1-Koordinaten der Punkte A und B voneinander um eine irrationale Zahl abweichen, sind sämtliche Punkte dieses eindimensionalen Punktgitters Mittelpunkte von W-Würfeln, die alle verschiedenen Klassen zugehören. Da aber die Klassen kongruent sind, enthält der $P(K)$-Raum die Mittelpunkte eines jeden Würfels dieser unendlich vielen Klassen. Nach Satz 3 ergibt sich also der Widerspruch, daß $P(W)$ einen Häufungspunkt besitzt.

$P(K)$ sei i-dimensional. Da $P(W)$ n-dimensional ist, muß nach b) $i < n$ sein. Sind $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_i$ Grundvektoren des Punktgitters $P(K)$, so kann man dem Satz 5 und b) zufolge $\mathfrak{v}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{v}_n$ so bestimmen, daß $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ Grundvektoren des Punktgitters $P(W)$ sind. Laut der Klassendefinition sind die x_1-Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_i$ rational, die der Vektoren $\mathfrak{v}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{v}_n$ irrational.

Wir wählen einen Würfel W_0 aus der Klasse K aus. Der Mittelpunkt von W_0 gelte im folgenden als Anfangspunkt der Ortsvektoren. Der Ortsvektor des Mittelpunktes eines W-Würfels läßt sich also in der Form

$$a_1\mathfrak{v}_1 + \cdots + a_n\mathfrak{v}_n \qquad (a_1, \ldots, a_n \text{ ganz})$$

schreiben. Zu einem jeden W-Würfel gehören also gewisse ganzzahlige Werte $a_1, \ldots, a_n$. Zu Würfeln derselben Klasse gehören als $a_{i+1}, \ldots, a_n$ dieselben Werte.

Es gibt nur endlich viele solche W-Würfel, mit denen W_0 gemeinsame Punkte hat. Wir können also eine obere Schranke S finden, daß für diese Würfel

$$\text{Max}\,(|a_{i+1}|, \ldots, |a_n|) < S \tag{4}$$

ist.

Es kann der Fall eintreten, daß gewisse W-Würfel, in der x_1-Richtung verschoben, eine ganze Seitenfläche mit W_0 gemeinsam haben. Die dazu nötigen Verschiebungslängen haben, da $P(W)$ keinen Häufungspunkt hat, eine positive untere Schranke s. Tritt dieser Fall nicht ein, so sei s irgendeine positive Zahl.

Wir lassen nun den Vektoren $\mathfrak{v}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{v}_n$ gewisse neue Vektoren $\mathfrak{v}'_{i+1}, \ldots, \mathfrak{v}'_n$ entsprechen. Und zwar so, daß wir ihre x_2-, …, x_n-Koordinaten ungeändert lassen, ihre x_1-Koordinaten aber um je einen Wert $\xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$ so abändern, daß die x_1-Koordinaten der neuen Vektoren schon rational sind und

$$\text{Max}\,(|\xi_{i+1}|, \ldots, |\xi_n|) < \frac{s}{(n-i)\,S} \tag{5}$$

ist. Mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}'_{i+1}, \ldots, \mathfrak{v}'_n$, als Grundvektoren, bauen wir von W_0 ausgehend *ein neues Würfelgitter* W' auf. Den einzelnen W'-Würfeln werden, auf gleiche Weise wie oben, ganzzahlige Werte $a_1, \ldots, a_n$ zugeordnet.

Die x_1-Koordinaten der $P(W')$-Vektoren sind alle *rational*.

Einem jeden W-Würfel lassen wir jenen W'-Würfel entsprechen, dem dieselben Werte $a_1, \ldots, a_n$ zugehören. In diesem Sinne kann man sagen, daß bei dem Aufbau des Würfelgitters W' ein jeder W-Würfel in der x_1-Richtung verschoben wurde. Die Verschiebungslänge eines W-Würfels mit zugehörigen Werten $a_1, \ldots, a_n$ ist

$$a_{i+1}\xi_{i+1} + \cdots + a_n\xi_n. \tag{6}$$

Die Verschiebungslängen von Würfeln derselben Klasse sind demnach gleich. Es handelt sich also um eine Verschiebung der Klassen. Die verschobenen Klassen sind aber nach a) mit den ursprünglichen äquivalent. Als Summen dieser Klassen sind daher auch W und W' einander äquivalent. Da aber W den Raum k-fach bedeckt, ist auch W' nach Satz 7 *k-fach raumbedeckend*.

Wir untersuchen nun, ob W' balkenförmig sein kann. Ist es balkenförmig, so hat W_0 mit einem gewissen W'-Würfel W'_1 eine ganze gemeinsame Seitenfläche. W'_1 entstand durch eine Verschiebung aus dem W-Würfel W_1, der zur Klasse K_1 gehört. Da nach a) die Klassen „in sich selbst" verschoben wurden, besitzt W_0 gemeinsame Punkte auch mit wenigstens einem K_1-Würfel. Für diesen K_1-Würfel gilt also (4) und folglich gilt dies auch für W_1. Die Länge (6) der Verschiebung, durch welche W'_1 aus W_1 entstanden ist, ist aber dann nach (4) und (5) kürzer als s. Da dies jedoch der Definition von s widerspricht, muß W' *nichtbalkenförmig* sein.

Das Würfelgitter W' ist also k-fach raumbedeckend, nichtbalkenförmig, und die x_1-Koordinaten sämtlicher $P(W')$-Vektoren sind rational. Während des ganzen Verfahrens, mit welchem wir W' von W ausgehend erhielten, sind die übrigen Koordinaten unverändert geblieben. Man kann also dasselbe Verfahren auch für die anderen Koordinaten wieder anwenden, ohne daß die schon früher rational gemachten Koordinaten gestört sind. Nach höchstens n Schritten erhält man so ein rationales Würfelgitter, das nichtbalkenförmig ist und den R_n k-fach bedeckt. Unser Satz behauptete aber eben die Existenz eines solchen Würfelgitters.

§ 5.

Gruppenalgebra.

Wir wollen der MINKOWSKISCHEN Vermutung eine gruppenalgebraische Fassung geben. Zu diesem Zweck brauchen wir die Definition der Gruppenalgebra und führen einige diesbezügliche Bezeichnungen und Benennungen ein.

$\mathfrak{G}$ sei eine endliche Gruppe r-ter Ordnung mit den Elementen $A_1, \ldots, A_r$. Das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit 1. Γ sei ein beliebiger Ring.

Als *Gruppenalgebra* oder *Gruppenring*[10]) $\Gamma[\mathfrak{G}]$ wird ein Ring mit den Elementen $a_1 A_1 + \cdots + a_r A_r$ bezeichnet, wobei $a_1, \ldots, a_r$ Elemente des Ringes Γ sind. Die Operationen in $\Gamma[\mathfrak{G}]$ sind dadurch definiert, daß man die Vertauschbarkeit der Gruppenelemente mit den Ringelementen, die Kommutativität und Assoziativität der Summen und die Distributivität und Assoziativität aller vorkommenden Produkte voraussetzt; bei Produkten der Gruppenelemente gelten auch weiter die Gruppenoperationsgesetze, bei Operationen mit den Ringelementen bleiben die Ringoperationsgesetze gültig. Zwei Elemente der Gruppenalgebra sind dann und nur dann gleich, wenn die in ihnen vorkommenden *Koordinaten* $a_1, \ldots, a_r$ paarweise gleich sind.

Bei uns wird $\mathfrak{G}$ immer eine abelsche Gruppe und Γ der Ring der ganzen Zahlen sein. Die Gruppenalgebra wird also zu einem kommutativen Ring. Wir identifizieren weiter das Element $1\,A$ der Gruppenalgebra mit dem Gruppenelement A, fassen also die Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$ als Erweiterung der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf. Im folgenden werden wir, ohne dies immer zu betonen, mit den Gruppenelementen so in der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$ rechnen. Wir werden also z. B. neben dem Produkt der Gruppenelemente auch von ihrer Summe sprechen.

Man kann diese Rechnungsweise auch anders kennzeichnen. Ist $(t_1, \ldots, t_s)$ der Typus der endlichen abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, so bilde man aus dem Ring Γ der ganzen Zahlen, mit den Unbestimmten $E_1, \ldots, E_s$, den Polynomring $\Gamma[E_1, \ldots, E_s]$, darin das Polynomideal

$$\mathfrak{g} = (E_1^{t_1} - 1, \ldots, E_s^{t_s} - 1)$$

und den zugehörigen Restklassenring $\Gamma[E_1, \ldots, E_s]/\mathfrak{g}$. Dieser Restklassenring ist isomorph mit der oben definierten Gruppenalgebra. Mit den Gruppenelementen in der Gruppenalgebra rechnen heißt also mit anderen Worten: statt mit den Gruppenelementen mit den ihnen entsprechenden Restklassen rechnen.

Ganz einfach könnte man diese Rechnungsart auch so charakterisieren, daß man die Gruppenelemente durch die erzeugenden Elemente $E_1, \ldots, E_s$ ausdrückt und dann mit ihnen formal, jedoch unter Beachtung der definierenden Relationen

$$E_1^{t_1} = 1, \ \ldots, \ E_s^{t_s} = 1 \tag{7}$$

[10]) Vgl. z. B. DEURING, Algebren. Ergebn. d. Math. IV, 1 (1935), S. 2.

rechnet. In den Beispielen werden wir eine Gruppe immer mit den Gleichungen der Art (7) definieren.

Wir führen nun einige Bezeichnungen und Benennungen für jene Elemente der Gruppenalgebra ein, die in unseren Untersuchungen eine führende Rolle spielen werden.

Die Summe sämtlicher Elemente einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\Sigma[\mathfrak{H}]$. Für jede Untergruppe ist also

$$\Sigma[\mathfrak{H}] \neq 0. \tag{8}$$

Ist A ein Element der Untergruppe $\mathfrak{H}$, so ist

$$A \cdot \Sigma[\mathfrak{H}] = \Sigma[\mathfrak{H}]. \tag{9}$$

Eine mit dem Element A von $\mathfrak{G}$ gebildete Summe

$$S = 1 + A + A^2 + \cdots + A^{m-1} \qquad (m > 1) \tag{10}$$

nennen wir eine zu $\Gamma[\mathfrak{G}]$ gehörende *Reihe*. Ist hierbei $A^m = 1$, so heißt diese Reihe *zyklisch*, sonst *nichtzyklisch*. Ist die Reihe (10) zyklisch, so ist

$$S(A - 1) = 0. \tag{11}$$

Ist die Anzahl m der Glieder einer Reihe eine Primzahl, so nennen wir sie eine *Primreihe*.

Ist A ein vom Einheitselement verschiedenes Element der Gruppe $\mathfrak{G}$, so nennen wir den Ausdruck

$$D = A - 1 \tag{12}$$

eine zu $\Gamma[\mathfrak{G}]$ gehörende *Differenz*. Ist die Reihe (10) nichtzyklisch, so heißt die Differenz $A^m - 1$ die *der Reihe S zugeordnete Differenz*. Bezüglich der zugeordneten Differenz werden wir folgenden einfachen Satz gebrauchen:

Satz 9. *Ist für ein Element B der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$ und für die nichtzyklische Reihe S*

$$BS = k \cdot \Sigma[\mathfrak{G}],$$

wobei k eine ganze Zahl ist, so ist für die der Reihe S zugeordnete Differenz D

$$BD = 0.$$

Beweis. Hat S die Form (10), so braucht man nur die Bedingungsgleichung mit $A - 1$ zu multiplizieren, um unter Berücksichtigung von (9) die Behauptung zu erhalten.

Wir wollen den Fall $k = 0$ des Satzes 9 besonders hervorheben. In diesem Spezialfalle ergibt sich folgender

Satz 9a. *Ist für das Gruppenalgebraelement B und für die nichtzyklische Reihe S*

$$BS = 0,$$

so ist für die der Reihe S zugeordnete Differenz D

$$BD = 0.$$

§ 6.

Zuordnung einer Gruppe zu einem rationalen Würfelgitter.

W sei ein rationales Würfelgitter im R_n. Die Koordinaten der $P(W)$-Vektoren sind also rational. Es sei α_1 ein gemeinsames Vielfaches von den Nennern der x_1-Koordinaten der beliebig ausgewählten Grundvektoren der $P(W)$-Gruppe und zwar $\alpha_1 > 1$; ähnlich sei $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestimmt. Demnach ist z. B. $\frac{1}{\alpha_1}$ gemeinsamer Teiler von 1 und von der x_1-Koordinate eines jeden $P(W)$-Vektors.

Als Koordinatenursprung wählen wir eine Ecke eines W-Würfels. Wir betrachten die $(n-1)$-dimensionalen Unterräume $x_i = \frac{m}{\alpha_i}$, wobei m eine beliebige ganze Zahl ist. Diese Unterräume teilen den R_n in rechtwinklige Parallelotope ein. Ihr System sei mit D, die Menge ihrer Mittelpunkte mit $P(D)$ bezeichnet. $P(D)$ ist also ein n-dimensionales Punktgitter, dessen Grundvektoren z. B. die in den Koordinatenrichtungen liegenden Vektoren $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ sind, deren Längen $\frac{1}{\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}$ sind.

Da die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nicht eindeutig bestimmt sind, kann man auf vielerlei Art ein solches geeignetes Parallelotopensystem D zum Würfelgitter W finden.

Da die W-Seitenflächen in den das D-System definierenden Unterräumen liegen, enthält ein W-Würfel ein D-Parallelotop entweder völlig, oder sie haben keinen gemeinsamen inneren Punkt. Man kann also die W-Würfel aus D-Parallelotopen „aufbauen". Folglich führt die Verschiebung um einen $P(W)$-Vektor alle D-Parallelotope wieder in D-Parallelotope über. Die $P(W)$-Vektoren sind demzufolge zugleich auch $P(D)$-Vektoren. Die $P(W)$-Gruppe ist eine Untergruppe der $P(D)$-Gruppe. Wir bilden die Faktorgruppe der $P(D)$-Gruppe nach der $P(W)$-Gruppe. Diese Faktorgruppe $P(D)/P(W)$, oder genauer die mit ihr isomorphe abstrakte Gruppe, sei als (bezüglich D gebildete) *W-Gruppe* bezeichnet[11]).

Jedem Element der W-Gruppe entspricht je eine Nebengruppe der $P(W)$-Gruppe. Dem Einheitselement der W-Gruppe entspricht die $P(W)$-Gruppe selbst. Einem $P(D)$-Vektor ordnen wir jenes Element der W-Gruppe zu, welches der diesen $P(D)$-Vektor enthaltenden Nebengruppe entspricht. Den $P(W)$-Vektoren ist also auf diese Weise das Einheitselement der W-Gruppe

[11]) Man beachte, daß die W-Gruppe und die $P(W)$-Gruppe wesentlich verschieden sind. Die erste ist eine abstrakte Gruppe und im allgemeinen [wenn nämlich $P(W)$ n-dimensional ist, also im folgenden immer] endlich. Die zweite ist dagegen eine Vektorgruppe und immer unendlich.

zugeordnet worden. Die den $P(D)$-Vektoren $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ zugeordneten Elemente der W-Gruppe seien $A_1, \ldots, A_n$.

Die W-Gruppe wird im folgenden die Rolle von $\mathfrak{G}$ des vorigen Paragraphen spielen. Wir werden mit den Elementen der W-Gruppe in der aus ihr gebildeten Gruppenalgebra rechnen. Zunächst wollen wir dem Würfelgitter W ein gewisses Element dieser Gruppenalgebra zuordnen.

Da ein W-Würfel W_0 aus D-Parallelotopen zusammensetzbar ist, hat der Mittelpunkt eines gewissen „Eckparallelotopes" unter diesen die kleinsten Koordinaten. Wir wählen nun diesen Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Ortsvektoren. So sind die Ortsvektoren der $P(D)$-Punkte $P(D)$-Vektoren.

W_1 sei ein beliebiger W-Würfel. Wir betrachten die Ortsvektoren der Mittelpunkte jener D-Parallelotope, die in W_1 enthalten sind. Zu jedem dieser Ortsvektoren ist, da sie $P(D)$-Vektoren sind, je ein Element der W-Gruppe zugeordnet. Die Summe aller dieser Elemente ist jenes Gruppenalgebraelement, welches wir dem Würfelgitter W zuordnen. Dieses Gruppenalgebraelement ist nämlich, wie das auch die folgende Rechnung zeigt, unabhängig davon, von welchem W-Würfel W_1 wir ausgegangen sind.

Es sei $\mathfrak{v}_1$ der Ortsvektor des Mittelpunktes des Eckparallelotops von W_1. Also ist $\mathfrak{v}_1$ ein $P(W)$-Vektor. Die Ortsvektoren der Mittelpunkte der in W_1 enthaltenen D-Parallelotope sind dann

$$\mathfrak{v}_1 + a_1 \mathfrak{d}_1 + \cdots + a_n \mathfrak{d}_n \qquad (0 \leqq a_i < \alpha_i). \tag{13}$$

Da dem Vektor $\mathfrak{v}_1$ das Einheitselement der W-Gruppe zugeordnet ist, sind die den Vektoren (13) zugeordneten Elemente der W-Gruppe

$$A_1^{a_1} \ldots A_n^{a_n} \qquad (0 \leqq a_i < \alpha_i). \tag{14}$$

Wir führen die Bezeichnung

$$S_i = 1 + A_i + A_i^2 + \cdots + A_i^{\alpha_i - 1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ein und nennen $S_1, \ldots, S_n$ die zum Würfelgitter W (bezüglich D) *zugeordneten Reihen*[12]). Mit dieser Bezeichnung ist dann das dem Würfelgitter W (bezüglich D) *zugeordnete Gruppenalgebraelement*, d. h. die Summe der Elemente (14)

$$\sum_{0 \leqq a_i < \alpha_i} A_1^{a_1} \ldots A_n^{a_n} = S_1 S_2 \ldots S_n. \tag{15}$$

Aus dieser Rechnung tritt wirklich hervor, daß das Gruppenalgebraelement (15) unabhängig von der Wahl des Ausgangswürfels W_1 ist.

---

[12]) Bei der Definition der Reihen beschränkten wir uns auf den Fall, daß die Anzahl der Glieder größer als 1 ist. Die Ausdehnung der Reihendefinition auf Reihen mit einem einzigen Gliede machte nämlich Schwierigkeiten bei der Definition der Zyklizität. Wenn also auch eventuell ein α_i als 1 gewählt werden könnte (welcher Fall sonst von keinem Interesse ist), so haben wir zu Beginn dieses § doch $\alpha_i > 1$ verlangt, damit wir in Einklang mit unserer Reihendefinition bleiben.

§ 7.

Gruppenalgebraische Fassung.

Wir wollen erst untersuchen, inwieweit die zu einem rationalen Würfelgitter zugeordneten Reihen und das zugeordnete Gruppenalgebraelement (15) davon abhängig sind, ob das Würfelgitter balkenförmig bzw. raumbedeckend ist.

Satz 10. *Ein rationales Würfelgitter ist dann und nur dann balkenförmig, wenn unter den ihm (bezüglich irgendeines geeigneten D-Systems) zugeordneten Reihen wenigstens eine zyklische vorkommt.*

Beweis. Das rationale Würfelgitter W ist dann und nur dann balkenförmig, wenn unter den $P(W)$-Vektoren ein mit irgendeiner x_i-Achse paralleler Einheitsvektor $\mathfrak{e}_i$ vorkommt. $\mathfrak{e}_i = \alpha_i \mathfrak{d}_i$ ist aber ein $P(D)$-Vektor und das ihm zugeordnete Element der W-Gruppe ist $A_i^{\alpha_i}$. Der Vektor $\mathfrak{e}_i$ ist folglich dann und nur dann $P(W)$-Vektor, wenn das ihm zugeordnete Element der W-Gruppe die Einheit ist, d. h. wenn $A_i^{\alpha_i} = 1$, also wenn die Reihe S_i zyklisch ist.

Satz 11. *Ein rationales Würfelgitter W ist dann und nur dann k-fach raumbedeckend, wenn das ihm (bezüglich irgendeines geeigneten D-Systems) zugeordnete Gruppenalgebraelement das k-fache der Summe aller Elemente der W-Gruppe ist.*

Beweis. W ist dann und nur dann k-fach raumbedeckend, wenn jedes D-Parallelotop in genau k W-Würfeln enthalten ist, d. h. wenn ein jeder $P(D)$-Vektor mit k verschiedenen $P(W)$-Vektoren $\mathfrak{v}_1$ in der Form (13) aufschreibbar ist. Für einen $P(D)$-Vektor $\mathfrak{v}$ tritt aber dieser Fall dann und nur dann ein, wenn es k verschiedene Vektoren

$$a_1 \mathfrak{d}_1 + \cdots + a_n \mathfrak{d}_n \qquad (0 \leqq a_i < \alpha_i)$$

gibt, deren mit $\mathfrak{v}$ gebildete Differenzen zur $P(W)$-Gruppe gehören, d. h. denen dasselbe Element V der W-Gruppe zugeordnet ist, welches dem Vektor $\mathfrak{v}$ zugeordnet wurde. Das Element V muß also genau k-mal in der Summe (15) als Glied vorkommen. W ist also dann und nur dann k-fach raumbedeckend, wenn ein jedes Element der W-Gruppe genau k-mal in der Summe (15) als Glied vorkommt. Das bedeutet aber mit anderen Worten, daß die Summe (15) das k-fache der Summe aller Elemente der W-Gruppe ist.

Satz 12. *Soll es im R_n ein nichtbalkenförmiges und k-fach raumbedeckendes Würfelgitter geben, so ist als notwendige und hinreichende Bedingung erforderlich, daß es eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ und n nichtzyklische Reihen gibt, deren Produkt das k-fache von $\sum[\mathfrak{G}]$ ist.*

Beweis. Daß die angegebene Bedingung notwendig ist, folgt unmittelbar aus den Sätzen 8, 10 und 11. Wir müssen also nur beweisen, daß sie auch hinreichend ist.

Es gebe also eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ und n zu $\Gamma[\mathfrak{G}]$ gehörende nichtzyklische Reihen

$$S_i = 1 + A_i + A_i^2 + \cdots + A_i^{\alpha_i - 1} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

die die Bedingung

$$S_1 S_2 \ldots S_n = k \cdot \Sigma[\mathfrak{G}] \tag{17}$$

erfüllen.

Wir bezeichnen die mit den Koordinatenachsen parallelen Vektoren von der Länge $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}$ mit $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ und betrachten jene Vektoren

$$l_1 \mathfrak{d}_1 + \cdots + l_n \mathfrak{d}_n,$$

bei welchen die ganzen Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ die Bedingung

$$A_1^{l_1} A_2^{l_2} \ldots A_n^{l_n} = 1$$

erfüllen. Diese Vektoren bilden (bezüglich der Vektoraddition als Gruppenoperation) eine Gruppe, die wir zur $P(W)$-Gruppe wählen und mit deren Hilfe wir ein Würfelgitter W konstruieren. Wir beweisen, daß dieses Würfelgitter nichtbalkenförmig und k-fach raumbedeckend ist.

Die Vektoren $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ bestimmen ein Parallelotopensystem D, das den im § 6 angegebenen Forderungen entspricht. Einem $P(D)$-Vektor

$$l_1 \mathfrak{d}_1 + \cdots + l_n \mathfrak{d}_n$$

ordne man das Element

$$A_1^{l_1} A_2^{l_2} \ldots A_n^{l_n} = L \tag{18}$$

von $\mathfrak{G}$ zu. Den $P(W)$-Vektoren und nur diesen ist also das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ zugeordnet. Ist einem $P(D)$-Vektor durch (18) das Gruppenelement L_1, einem anderen L_2 zugeordnet, so ist ihrer Summe $L_1 L_2$ zugeordnet. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also isomorph mit der Faktorgruppe $P(D)/P(W)$. D. h. $\mathfrak{G}$ ist eben die bezüglich D gebildete W-Gruppe.

Da den $P(D)$-Vektoren $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_n$ durch (18) eben $A_1, \ldots, A_n$ zugeordnet ist, sind die Reihen (16) eben die dem Würfelgitter W (bezüglich D) zugeordneten Reihen. (17) ist dann das dem Würfelgitter W (bezüglich D) zugeordnete Gruppenalgebraelement.

Da die Reihen (16) und das Gruppenalgebraelement (17) die Bedingungen der Sätze 10 und 11 erfüllen, ist das Würfelgitter W — wie das behauptet wurde — nichtbalkenförmig und k-fach raumbedeckend.

Nach dem Satz 12 können wir nun der Minkowskischen Vermutung folgende gruppenalgebraische Fassung geben:

3. Fassung. *Wenn für die endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ und für die Reihen $S_1, \ldots, S_n$*

$$S_1 S_2 \ldots S_n = \Sigma[\mathfrak{G}]$$

ist, so muß wenigstens eine der Reihen $S_1, \ldots, S_n$ zyklisch sein.

Unserer am Ende des § 2 aufgeworfenen Frage können wir laut des Satzes 12 ebenfalls eine gruppenalgebraische Fassung geben:

Wenn für die endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ und für die Reihen $S_1, \ldots, S_n$

$$S_1 S_2 \ldots S_n = k \cdot \Sigma[\mathfrak{G}]$$

ist, muß dann wenigstens eine der Reihen $S_1, \ldots, S_n$ zyklisch sein?

Die Äquivalenz der Fassungen geht in beiden Fällen unmittelbar aus Satz 12 hervor.

§ 8.

Mehrfach raumbedeckende Würfelgitter.

Wir wollen zuerst die bezüglich mehrfach raumbedeckender Würfelgitter aufgeworfene Frage erledigen. Die Antwort ist in den unten folgenden Sätzen 14 und 15 enthalten.

Satz 13. *Gibt es im R_n ein nichtbalkenförmiges raumbedeckendes Würfelgitter, so gibt es ein solches auch in jedem R_m, wenn nur $m > n$ ist.*

Beweis. Laut der Voraussetzung unseres Satzes und dem Satz 12 zufolge gibt es eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ und nichtzyklische Reihen $S_1, \ldots, S_n$, für welche

$$S_1 S_2 \ldots S_n = k \cdot \Sigma[\mathfrak{G}]$$

ist. Multipliziert man diese Gleichung mit einer beliebigen nichtzyklischen Reihe der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$ (z. B. mit S_1), so entsteht wieder eine Gleichung derselben Art [man beachte (9)]. In dieser steht aber auf der linken Seite das Produkt von $n+1$ Reihen und auf der rechten Seite kommt eine andere ganze Zahl k' vor. Wendet man also diese Operation $(m-n)$-mal an, so entsteht eine Gleichung, die im Sinne des Satzes 12 unsere Behauptung bestätigt.

Satz 14. *Ist $n \leqq 3$, so gibt es im R_n kein nichtbalkenförmiges raumbedeckendes Würfelgitter.*

Beweis. Nach Satz 13 genügt es, unsere Behauptung nur für $n = 3$ zu beweisen. Wir nehmen an, daß unser Satz falsch ist, daß also die Gruppe $\mathfrak{G}$ und die nichtzyklischen Reihen S_1, S_2, S_3 die Gleichung

$$S_1 S_2 S_3 = k \cdot \Sigma[\mathfrak{G}] \tag{19}$$

erfüllen. Das wird zu einem Widerspruch führen.

Die Reihen S_1, S_2, S_3 seien von der Form

$$S_i = 1 + A_i + A_i^2 + \cdots + A_i^{a_i - 1} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

und der Kürze halber sei $A_i^{a_i} = B_i$. Die den Reihen S_1, S_2, S_3 zugeordneten Differenzen sind also

$$D_i = B_i - 1 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Gemäß Satz 9 folgt aus (19)

$$S_1 S_2 D_3 = 0$$

und, den Satz 9a zweimal anwendend,

(21) $$S_1 D_2 D_3 = 0,$$
$$D_1 D_2 D_3 = 0.$$

Setzt man die Ausdrücke (20) ein, so hat man

(22) $$B_1 B_2 B_3 + B_1 + B_2 + B_3 = B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 + 1.$$

Auf der rechten Seite kommt als Glied 1 vor, auf der linken muß also auch ein Glied gleich 1 sein. Da die Reihen S_1, S_2, S_3 nichtzyklisch sind, d. h. $B_i \neq 1$ ist, kann dieses Glied nur das erste sein:

(23) $$B_1 B_2 B_3 = 1.$$

Nach (22) ist also

$$B_1 + B_2 + B_3 = B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3.$$

Ein Glied der rechten Seite muß aber nun gleich B_1 sein. Aus denselben Gründen wie oben kann dieses nur das letzte sein:

(24) $$B_2 B_3 = B_1.$$

Aus (23) und (24) folgt also

$$B_1^2 = 1,$$

und aus analogen Überlegungen ergibt sich

(25) $$B_2^2 = 1, \quad B_3^2 = 1.$$

Wegen (24) kann man (21) in der Form

$$(1 + A_1 + \cdots + A_1^{a_1 - 1})(1 + A_1^{a_1}) = (1 + A_1 + \cdots + A_1^{a_1 - 1})(B_2 + B_3)$$

schreiben. Multipliziert man aus, so stehen auf der linken Seite nur Potenzen von A_1, auf der rechten kommen als Glieder auch B_2 und B_3 vor. Die sind also auch Potenzen von A_1. In Anbetracht von (25) folgt aber daraus, da $B_i \neq 1$ ist,

$$B_2 = B_3.$$

Nach (24) und (25) ist also

$$B_1 = B_2^2 = 1,$$

was der Annahme $B_1 \neq 1$ widerspricht.

Satz 15. *Ist $n > 3$, so gibt es im R_n nichtbalkenförmige raumbedeckende Würfelgitter.*

Beweis. Nach Satz 13 genügt es, unseren Satz nur im Fall $n = 4$ durch ein Beispiel zu beweisen. D. h. eine endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ und nichtzyklische Reihen S_1, S_2, S_3, S_4 so anzugeben, daß die Gleichung

$$S_1 S_2 S_3 S_4 = k \cdot \sum [\mathfrak{G}] \tag{26}$$

erfüllt wird.

Ein solches Beispiel ist folgendes: Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist durch die Relationen

$$E^{12} = 1, \quad F^2 = 1$$

definiert. Die Reihen sind

$$S_1 = 1 + E + E^2 + E^3 + E^4 + E^5,$$
$$S_2 = 1 + EF + (EF)^2 + (EF)^3,$$
$$S_3 = 1 + E^2F + (E^2F)^2,$$
$$S_4 = 1 + E^4F + (E^4F)^2.$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, daß bei diesem Beispiel die Gleichung (26) mit $k = 9$ erfüllt ist[13]). Im vierdimensionalen Raume gibt es also ein neunfach raumbedeckendes nichtbalkenförmiges Würfelgitter.

Damit haben wir eine vollständige Antwort auf unsere bezüglich mehrfach raumbedeckender Würfelgitter aufgeworfene Frage gegeben, die also nur für die Dimensionen $n = 1, 2, 3$ bejahend ist.

Es sei noch erwähnt, daß aus der Richtigkeit dieser verallgemeinerten Minkowskischen Vermutung im R_n einfach auf die Richtigkeit der ursprünglichen Vermutung im R_{n+1} geschlossen werden kann. Diese Tatsache hat mich ursprünglich dazu geführt, auch mehrfache Bedeckungen ins Auge zu fassen. Aus Satz 14 (der die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung für $n \leqq 3$ schon bestätigt) folgt also einfach auch die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung für $n = 4$. Ich verzichte jedoch auf die näheren Überlegungen, da sie unser Problem nicht endgültig abschließen.

Endlich sei bemerkt, daß die auf unsere Frage gegebene Antwort wesentlich gleichbedeutend mit folgender Aussage ist: *Ein den R_n mehrfach bedeckendes Würfelgitter ist, wenn $n \leqq 3$, die Summe einfach bedeckender Würfelgitter; wenn dagegen $n > 3$, so ist das nicht mehr allgemein richtig.* Wir gehen auf den Beweis, der nur einfache geometrische Überlegungen benutzt, nicht ein[14]).

---

[13]) Die diesem Beispiel entsprechenden Grundvektoren lassen sich nach dem Gedankengang des Beweises von Satz 12 bestimmen. So ergibt sich z. B. $\mathfrak{v}_1(2, 0, 0, 0)$, $\mathfrak{v}_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$, $\mathfrak{v}_3(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0)$, $\mathfrak{v}_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3})$.

[14]) Der Beweis ist in meiner Arbeit [2] zu finden.

§ 9.

Gruppenalgebraische Hilfssätze.

Wir gehen nun zur Bestätigung der Minkowskischen Vermutung über. Dazu brauchen wir eine Reihe gruppenalgebraischer Hilfssätze.

Es sei $B = a_1 A_1 + \cdots + a_r A_r$ ein Element der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$. Jene Elemente A_i der Gruppe $\mathfrak{G}$, zu welchen eine Koordinate $a_i \neq 0$ gehört, nennen wir *Komponenten* von B. Jedes nichtverschwindende Element der Gruppenalgebra besitzt also Komponenten.

Wir ordnen einem nichtverschwindenden Gruppenalgebraelement B jene Untergruppe $\mathfrak{H}(B)$ von $\mathfrak{G}$ zu, die alle Komponenten von B enthält und von der keine echte Untergruppe diese Eigenschaft besitzt. D. h. $\mathfrak{H}(B)$ ist die durch die Komponenten von B erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Aus dieser Definition geht z. B. unmittelbar hervor, daß für die Gruppenalgebraelemente (10) und (12) folgendes gilt:

$$\mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(A), \tag{27}$$

$$\mathfrak{H}(D) = \mathfrak{H}(A). \tag{28}$$

Sind $B_1, \ldots, B_k$ nichtverschwindende Gruppenalgebraelemente, so definieren wir die Gruppe $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$ als

$$\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k) = \mathfrak{H}(B_1) \cdot \mathfrak{H}(B_2) \cdots \mathfrak{H}(B_k). \tag{29}$$

D. h. $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$ ist die durch sämtliche Komponenten von $B_1, \ldots, B_k$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir bemerken, daß $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$ und $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ scharf zu unterscheiden sind, da $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ durch die Komponenten des Produktes $B_1 \ldots B_k$ erzeugt wird.

Die Ordnung einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $r(\mathfrak{H})$. Um unsere Bezeichnungen zu vereinfachen, sei

$$r[\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)] = r(B_1, \ldots, B_k). \tag{30}$$

Für ein Element A der Gruppe $\mathfrak{G}$, das ja auch gleichzeitig Gruppenalgebraelement ist, bedeutet also $r(A)$ die Ordnung von A.

Die Anzahl der (nicht unbedingt verschiedenen) Primfaktoren einer ganzen Zahl $m > 1$ sei mit $d(m)$ bezeichnet; weiter sei $d(1) = 0$. Also ist für eine Primzahl p und nur dann

$$d(p) = 1. \tag{31}$$

Es ist ohne weiteres klar, daß für beliebige positive ganze Zahlen m, n folgendes gilt:

$$d(mn) = d(m) + d(n). \tag{32}$$

Um unsere Bezeichnungen zu vereinfachen, sei

$$d[r(\mathfrak{H})] = d(\mathfrak{H}) \text{ und } d[r(B_1, \ldots, B_k)] = d(B_1, \ldots, B_k).$$

Die so definierte Funktion $d(B_1, \ldots, B_k)$ wird in den folgenden Überlegungen die Hauptrolle spielen. Unsere Hilfssätze beziehen sich auch größtenteils auf diese Funktion.

Satz 16. *Für nichtverschwindende Gruppenalgebraelemente* $B_1, \ldots, B_k$ *ist*

$$d(B_1, \ldots, B_k) \leqq d(B_1) + \cdots + d(B_k).$$

Beweis. Nach (29) ist für die Ordnungen der Untergruppen

$$r(B_1, \ldots, B_k) \cdot c = r(B_1) \ldots r(B_k),$$

wobei c eine positive ganze Zahl ist. Mit (32) folgt daraus

$$d(B_1, \ldots, B_k) + d(c) = d(B_1) + \cdots + d(B_k)$$

und, da $d(c) \geqq 0$ ist, auch die Richtigkeit unseres Satzes.

Satz 17. *Sind* $B_1, \ldots, B_k$ *und* $B_1 \ldots B_k$ *nichtverschwindende Gruppenalgebraelemente, so ist*

$$d(B_1, \ldots, B_k) \geqq d(B_1 \ldots B_k).$$

Beweis. Da alle Komponenten des Produktes $B_1 \ldots B_k$ durch Multiplikation aus den Komponenten von $B_1, \ldots, B_k$ entstehen, enthält $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$ sämtliche Komponenten von $B_1 \ldots B_k$. Folglich ist $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$. Für ihre Ordnungen gilt also

$$r(B_1, \ldots, B_k) = c \cdot r(B_1 \ldots B_k),$$

wobei c eine positive ganze Zahl ist. Mit (32) ergibt sich daraus, wie im vorigen Beweis, die Richtigkeit unserer Behauptung.

Satz 18. *Für nichtverschwindende Gruppenalgebraelemente* $B_1, \ldots, B_k$ *und* $C_1, \ldots, C_l$ *ist (falls* $B_1 \ldots B_k \neq 0$*)*

$$d(B_1 \ldots B_k, C_1, \ldots, C_l) - d(B_1 \ldots B_k) \geqq d(B_1, \ldots, B_k, C_1, \ldots, C_l) - d(B_1, \ldots, B_k).$$

Beweis. Wir werden unseren Satz mit Hilfe folgenden gruppentheoretischen Hilfssatzes beweisen:

Sind $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ *Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe* $\mathfrak{G}$, *ist weiter* $\mathfrak{H}_1$ *Untergruppe auch von* $\mathfrak{H}_2$, *so ist die Ordnung der Faktorgruppe* $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3$ *ein Teiler der Ordnung der Faktorgruppe* $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1$.

Um unseren Hilfssatz zu beweisen, sei folgendes bemerkt: Multipliziert man die in $\mathfrak{H}_2$ liegenden Nebengruppen von $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{H}_3$, so entstehen Nebengruppen von $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3$. Dadurch erhält man jede zur Faktorgruppe $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3$ gehörende Nebengruppe (eventuell auch mehrfach). Auf diese Weise ergibt sich eine homomorphe Abbildung der Faktorgruppe $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1$ auf die Faktorgruppe $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3$. Aus der Möglichkeit einer solchen Abbildung folgt aber, daß $r(\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3)$ ein Teiler von $r(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1)$ ist.

Im Falle unseres Satzes sei

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k),$$
$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k, C_1, \ldots, C_l),$$
$$\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k).$$

Dementsprechend ist, (29) und den Beweis des Satzes 17 beachtend,

$$\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k),$$
$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k, C_1, \ldots, C_l).$$

Nach (29) ist die Bedingung des Hilfssatzes erfüllt, es ist also

$$r(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1) = c \cdot r(\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3),$$

wobei c eine positive ganze Zahl ist. Da die Ordnung einer Faktorgruppe der Quotient der Ordnungen beider die Faktorgruppe erzeugenden Gruppen ist, folgt aus der erhaltenen Gleichung

$$r(\mathfrak{H}_2)\, r(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3) = c \cdot r(\mathfrak{H}_1)\, r(\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3).$$

Folglich ist nach (32) und wegen $d(c) \geqq 0$

$$d(\mathfrak{H}_2) + d(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3) \geqq d(\mathfrak{H}_1) + d(\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3). \tag{33}$$

Berücksichtigt man die Bedeutung der Gruppen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_3$, $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$, so erkennt man, daß (33) genau die Richtigkeit unseres Satzes aussagt.

Satz 19. *Für eine Untergruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ ist*

$$\mathfrak{H}(\Sigma[\mathfrak{R}]) = \mathfrak{R}.$$

Beweis. Die Komponenten von $\Sigma[\mathfrak{R}]$ sind genau sämtliche Elemente von $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}$ alle diese enthält und keine ihrer eigentlichen Untergruppen von dieser Beschaffenheit ist, erweist sich unsere Behauptung als richtig.

Satz 20. *Sind $B \neq 0$, C_1, C_2 Elemente der Gruppenalgebra, enthält $\mathfrak{H}(B)$ jede Komponente von C_1 und keine von C_2, ist weiter*

$$BC_1 + BC_2 = 0,$$

so ist

$$BC_1 = 0.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $\mathfrak{H}(B)$ eine jede Komponente von BC_1 enthält. Sie enthält aber keine Komponente von BC_2, da alle diese durch Multiplikation eines zu $\mathfrak{H}(B)$ gehörenden und eines nicht zu $\mathfrak{H}(B)$ gehörenden Gruppenelementes entstehen. Da nun $BC_1 + BC_2$ keine Komponente hat und so auch keine zu $\mathfrak{H}(B)$ gehörende, kann auch BC_1 keine Komponente besitzen, also muß BC_1 verschwinden.

Satz 21. *Ist für die nichtverschwindenden Gruppenalgebraelemente* $B_1, \ldots, B_k$ *und für die Primreihe* S

$$B_1 \ldots B_k S = 0 \quad \text{und} \quad B_1 \ldots B_k \neq 0,$$

so ist

$$d(B_1, \ldots, B_k, S) = d(B_1, \ldots, B_k).$$

Beweis. Vorerst beweisen wir den Satz für $k = 1$. Es sei also $BS = 0$ und $B \neq 0$; es ist zu beweisen, daß $d(B, S) = d(B)$ ist.

S habe die Form

$$S = 1 + A + \cdots + A^{p-1}.$$

Es sei h der kleinste positive Exponent, für welchen A^h in $\mathfrak{H}(B)$ enthalten ist. Wir nehmen an, daß $h > 1$ ist, was zu einem Widerspruch führen wird. Es folgt dann also, daß $h = 1$ ist, d. h. A in $\mathfrak{H}(B)$ enthalten ist. Nach (27) ist dann auch $\mathfrak{H}(S)$ in $\mathfrak{H}(B)$ enthalten und so

$$\mathfrak{H}(B, S) = \mathfrak{H}(B), \tag{34}$$

woraus unsere Behauptung im Falle $k = 1$ schon folgt.

Es können ganze Zahlen q und t bestimmt werden, für welche

$$p = qh - t, \quad q > 0, \quad 0 \leqq t < h \tag{35}$$

erfüllt ist. Wir führen die Bezeichnungen

$$S_1 = 1 + A^h + \cdots + (A^h)^{q-1},$$
$$S_2 = 1 + A + \cdots + A^{h-1}$$

und, wenn $t > 0$,

$$S_3 = 1 + A + \cdots + A^{t-1}$$

ein. Aus (35) folgt also im Fall $t > 0$

$$A^p S_3 = S_1 S_2 - S. \tag{36}$$

Aus der Definition von h folgt, daß $\mathfrak{H}(B)$ jede Komponente von S_1, aber keine Komponente von $S - S_1$ enthält. Da weiter laut unserer Voraussetzung

$$BS_1 + B(S - S_1) = 0$$

ist, ergibt sich gemäß Satz 20

$$BS_1 = 0.$$

Der Fall $t = 0$ tritt, da p eine Primzahl und $h > 1$ ist, nur bei $h = p$ auf; dann ist aber $q = 1$ und $S_1 = 1$. Für $t = 0$ widerspricht also schon die eben erhaltene Gleichung der Voraussetzung $B \neq 0$. Im folgenden wird daher $t > 0$ angenommen.

Aus (36) folgt

$$BS_3 = A^{-p}[S_2 \cdot BS_1 - BS] = 0. \tag{37}$$

Die Gruppe $\mathfrak{H}(B)$ enthält das Einheitselement 1, enthält aber wegen (35) keine Komponente von $S_3 - 1$. Da weiter nach (37)

$$B + B(S_3 - 1) = 0$$

ist, ergibt sich nach Satz 20 $B = 0$. Das widerspricht aber unserer Voraussetzung $B \neq 0$. Somit ist die Behauptung $h = 1$ und die Richtigkeit unseres Satzes im Falle $k = 1$ bewiesen.

Nun sei $k > 1$. Nach der schon bewiesenen Gleichung (34) ist für $B = B_1 \dots B_k$, da $BS = 0$ und $B \neq 0$ ist,

$$\mathfrak{H}(B_1 \dots B_k, S) = \mathfrak{H}(B_1 \dots B_k),$$

und nach (29)

$$\mathfrak{H}(B_1 \dots B_k)\, \mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(B_1 \dots B_k).$$

Nach dem Beweis des Satzes 17 ist $\mathfrak{H}(B_1 \dots B_k)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)$. Multipliziert man also die letzterhaltene Gleichung mit $\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)$, so ergibt sich

$$\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k)\, \mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k),$$

und nach (29)

$$\mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k, S) = \mathfrak{H}(B_1, \dots, B_k),$$

woraus die Richtigkeit unseres Satzes folgt.

Satz 22. *Ist für die nichtverschwindenden Gruppenalgebraelemente* $B_1, \dots, B_k$ *und für die Differenz* D

$$B_1 \dots B_k D = 0 \quad \textit{und} \quad B_1 \dots B_k \neq 0,$$

so ist

$$d(B_1, \dots, B_k, D) = d(B_1, \dots, B_k).$$

Beweis. Wie der Satz selbst, so ist auch der Gedankengang seines Beweises dem Vorangehenden ganz ähnlich.

Im Falle $k = 1$, wenn $BD = 0$ und $B \neq 0$ ist, ist $d(B, D) = d(B)$ zu beweisen. Es sei $D = A - 1$.

$\mathfrak{H}(B)$ enthält A, da sonst aus der Voraussetzung

$$B - BA = 0$$

nach Satz 20 $B = 0$ folgen müßte. $\mathfrak{H}(B)$ enthält also nach (28) auch $\mathfrak{H}(D)$ und so ist

$$\mathfrak{H}(B, D) = \mathfrak{H}(B). \tag{38}$$

Daraus folgt aber die Behauptung für $k = 1$.

Im Falle $k > 1$ folgt die Richtigkeit unserer Behauptung aus (38) genau so, wie die entsprechende Behauptung des Satzes 21 aus (34) gefolgert wurde.

Satz 23. *Ist A ein Element der Gruppe $\mathfrak{G}$, sind $B_1, \ldots, B_k$ nichtverschwindende Elemente der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$ und p eine Primzahl, so ist*

$$d(B_1, \ldots, B_k, A) \leqq d(B_1, \ldots, B_k, A^p) + 1.$$

Beweis. Es sei $B = \Sigma[\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)]$. Nach Satz 19 ist dann

$$\mathfrak{H}(B) = \mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k),$$

und wir können in Anbetracht von (29) unsere Behauptung in der Form

$$d(B, A) \leqq d(B, A^p) + 1 \tag{39}$$

schreiben. D. h. es genügt [mit Rücksicht auf (8)], unseren Satz nur für den Fall $k = 1$ zu beweisen. Bei diesem Beweis unterscheiden wir zwei Fälle.

Ist $\mathfrak{H}(B, A) = \mathfrak{H}(B, A^p)$, so folgt in den üblichen Schritten

$$d(B, A) = d(B, A^p). \tag{40}$$

Ist dagegen $\mathfrak{H}(B, A) \neq \mathfrak{H}(B, A^p)$, so ist $\mathfrak{H}(B, A^p)$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{H}(B, A)$. Wir bilden die Faktorgruppe $\mathfrak{H}(B, A)/\mathfrak{H}(B, A^p)$. Da nach unserer Annahme A nicht in $\mathfrak{H}(B, A^p)$ enthalten ist, ist $A\mathfrak{H}(B, A^p)$ eine eigentliche Nebengruppe von $\mathfrak{H}(B, A^p)$. Die p-te Potenz dieser Nebengruppe ist aber $\mathfrak{H}(B, A^p)$ selbst, also ist die Ordnung dieser Nebengruppe (als eines Elementes der Faktorgruppe) genau p. Die durch diese Nebengruppe erzeugte zyklische Untergruppe ist mit der Faktorgruppe identisch; sonst lieferte nämlich diese zyklische Untergruppe eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{H}(B, A)$, die — in Verstoß gegen die Definition von $\mathfrak{H}(B, A)$ — sowohl $\mathfrak{H}(B)$, als auch A enthalten müßte. Die Ordnung der betrachteten Faktorgruppe ist also p und so ist

$$r(B, A) = p \cdot r(B, A^p).$$

Mit Anwendung von (32) und (31) ergibt sich daraus

$$d(B, A) = d(B, A^p) + 1. \tag{41}$$

Nach den Formeln (40) und (41) ist unsere Behauptung (39) in jedem Falle richtig.

Wir erhalten einen öfters anzuwendenden Spezialfall des eben bewiesenen Satzes, wenn wir die nichtzyklische Primreihe

$$S = 1 + A + \cdots + A^{p-1}$$

und die ihr zugeordnete Differenz

$$D = A^p - 1$$

betrachten. Für diese gilt nach (27) und (28)

$$\mathfrak{H}(S) = \mathfrak{H}(A), \quad \mathfrak{H}(D) = \mathfrak{H}(A^p).$$

Unser Satz besagt also mit Rücksicht auf (29) (für nichtverschwindende Gruppenalgebraelemente $B_1, \ldots, B_k$ und für die der nichtzyklischen Primreihe S zugeordnete Differenz D):

$$d(B_1, \ldots, B_k, S) \leqq d(B_1, \ldots, B_k, D) + 1. \tag{42}$$

Wir wollen nun einen mit dem Satz 9 nahe verwandten Satz beweisen, wozu die Einführung eines neuen Begriffes nötig ist.

Ein nichtverschwindendes Gruppenalgebraelement nennen wir *positiv*, wenn es keine negative Koordinate hat. Solche positiven Gruppenalgebraelemente sind z. B. eine Reihe und $\Sigma[\mathfrak{H}]$. Es ist klar, daß das Produkt positiver Gruppenalgebraelemente wieder positiv ist. Es bedarf ebenfalls keines Beweises, daß — im Falle eines solchen Produktes — das Produkt je einer Komponente der einzelnen Faktoren immer eine Komponente des durch Multiplikation erhaltenen Gruppenalgebraelementes ist.

Satz 24. *Ist für das nichtverschwindende positive Gruppenalgebraelement B und für die nichtzyklische Reihe S*

$$BS = \Sigma[\mathfrak{H}(BS)],$$

so ist für die der Reihe S zugeordnete Differenz D

$$BD = 0.$$

Beweis. S sei von der Form (10) und A_1 sei eine Komponente von B. Da B und S positive Gruppenalgebraelemente sind, da weiter 1 und A Komponenten von S sind, sind A_1 und AA_1 (nach dem oben Bemerkten) Komponenten von BS. Die Gruppe $\mathfrak{H}(BS)$ enthält also A_1 und AA_1, folglich muß sie auch A enthalten. Wenn wir also die Bedingungsgleichung mit $A - 1$ multiplizieren, ergibt sich nach (9) genau unsere Behauptung.

Beschränkt man sich nicht auf positive Gruppenalgebraelemente, so ist unser Satz nicht mehr allgemein richtig. Das zeigt folgendes Beispiel: Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist durch die Relation $E^6 = 1$ definiert, sie ist also eine zyklische Gruppe sechster Ordnung. Setzt man

$$B = 1 - E + E^2, \quad S = 1 + E$$

und demnach

$$D = E^2 - 1, \quad BS = 1 + E^3,$$

dann ist zwar die Bedingungsgleichung erfüllt, jedoch $BD \neq 0$.

Wenn man nur positive Gruppenalgebraelemente ins Auge faßt, so kann man die Untersuchungen dieses Paragraphen an manchen Stellen wesentlich vereinfachen. Insbesondere tritt gewissermaßen an Stelle des Satzes 17 folgender

Satz 25. *Sind $B_1, \ldots, B_k$ nichtverschwindende positive Gruppenalgebraelemente und ist 1 Komponente eines jeden* [15]) *unter ihnen, so ist*

$$d(B_1, \ldots, B_k) = d(B_1 \ldots B_k).$$

Beweis. Nach dem Beweis des Satzes 17 ist $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$. Wir werden zeigen, daß eine beliebige Komponente der Gruppenalgebraelemente $B_1, \ldots, B_k$ in $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ enthalten ist. Daraus folgt dann, daß auch umgekehrt $\mathfrak{H}(B_1, \ldots, B_k)$ Untergruppe von $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ ist, woraus sich unsere Behauptung schon einfach ergibt.

Es sei A eine beliebige Komponente etwa von B_1. Nach der Voraussetzung ist 1 Komponente von $B_2, \ldots, B_k$. Bildet man das Produkt aller der genannten Komponenten, so erhält man A, das also, nach dem über positive Gruppenalgebraelemente Bemerkten, Komponente von $B_1 \ldots B_k$ ist. A ist also, wie behauptet, in $\mathfrak{H}(B_1 \ldots B_k)$ enthalten.

§ 10.

Irreduzibel verschwindende Produkte.

Im Besitz unserer Hilfssätze sind wir nun im Stande, in diesem und dem folgenden Paragraphen einige Sätze zu beweisen, die dann die Bestätigung der Minkowskischen Vermutung ermöglichen werden.

Wir sagen, daß das Produkt $CB_1 \ldots B_k$ in $B_1, \ldots, B_k$ *irreduzibel verschwindet*, wenn

$$CB_1 \ldots B_k = 0$$

ist, während nach Weglassung eines einzigen beliebigen der Faktoren $B_1, \ldots, B_k$ das übrigbleibende Produkt nicht mehr verschwindet.

Ist $C \neq 0$ und $CB_1 \ldots B_m = 0$, so ist es klar, daß entweder dieses Produkt in $B_1, \ldots, B_m$ irreduzibel verschwindet, oder man nacheinander je einen der Faktoren $B_1, \ldots, B_m$ so fortlassen kann, daß am Ende — nach eventueller Vertauschung der Indizes — ein in $B_1, \ldots, B_k$ irreduzibel verschwindendes Produkt $CB_1 \ldots B_k = 0$ entsteht.

Satz 26. *Ist für das nichtverschwindende Gruppenalgebraelement C und für die Differenzen $D_1, \ldots, D_m$*

$$CD_1 \ldots D_m = 0, \tag{43}$$

und verschwindet dieses Produkt irreduzibel in $D_1, \ldots, D_m$, so ist

$$m > d(C, D_1, \ldots, D_m) - d(C).$$

[15]) Der Satz ist auch in dem Falle richtig, wenn 1 Komponente nur etwa von $B_2, \ldots, B_k$ ist. Für uns genügt aber der Satz in der obigen weniger aussagenden Fassung.

Beweis. Man betrachte den Ausdruck

$$g = d(D_1) + \cdots + d(D_m) - m. \tag{44}$$

Da jede Differenz auch eine von 1 verschiedene Komponente besitzt, ist $r(D_i) > 1$, also $d(D_i) > 0$. Demnach ist $g \geqq 0$.

Wir beweisen unseren Satz mit bezüglich g angewandter vollständiger Induktion.

Ist $g = 0$, so ist nach dem eben Bemerkten

$$d(D_1) = \cdots = d(D_m) = 1. \tag{45}$$

Da das Produkt (43) in $D_1, \ldots, D_m$ irreduzibel verschwindet, ist der Satz 22 anwendbar und so

$$d(C, D_1, \ldots, D_m) = d(C, D_2, \ldots, D_m). \tag{46}$$

Nach Satz 16 ist aber

$$d(C, D_2, \ldots, D_m) \leqq d(C) + d(D_2) + \cdots + d(D_m),$$

also in Anbetracht von (45) und (46)

$$d(C, D_1, \ldots, D_m) \leqq d(C) + m - 1,$$

was mit unserer Behauptung äquivalent ist.

Von nun an sei also $g > 0$, und setzen wir ferner voraus, daß der zu beweisende Satz richtig ist, wenn nur der auf der rechten Seite von (44) stehende Ausdruck kleiner als g ausfällt.

Wegen $g > 0$ können wir — bei passender Wahl der Indizes — $d(D_1) > 1$ voraussetzen. Es sei $D_1 = A - 1$ und p ein Primteiler von $r(D_1)$, es sei weiter $\overline{D}_1 = A^p - 1$. Da $d(D_1) > 1$ und, nach (28), $r(D_1) = r(A)$ ist, kann $r(A)$ keine Primzahl sein. Also ist A^p von 1 verschieden und $\overline{D}_1$ eine Differenz.

$\mathfrak{H}(A^p)$ ist eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{H}(A)$, folglich $r(A^p)$ ein echter Teiler von $r(A)$ und demnach $d(A^p) < d(A)$. Gemäß (28) folgt also

$$d(\overline{D}_1) < d(D_1). \tag{47}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (43) mit $1 + A + \cdots + A^{p-1}$. Nachdem D_1 mit diesem Ausdruck multipliziert $\overline{D}_1$ liefert, erhält man so die Gleichung

$$C\overline{D}_1 D_2 \ldots D_m = 0. \tag{48}$$

Läßt man hier den Faktor $\overline{D}_1$ fort, so verschwindet das übrigbleibende Produkt wegen der Irreduzibilität von (43) nicht mehr. Bildet man also von (48) ausgehend ein irreduzibel verschwindendes Produkt, so ergibt sich — einen zweck-

mäßigen Indexgebrauch vorausgesetzt — ein in $\overline{D}_1, D_2, \ldots, D_k$ irreduzibel verschwindendes Produkt

$$C\overline{D}_1 D_2 \ldots D_k = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq m). \tag{49}$$

Der für dieses Produkt gebildete Ausdruck (44) ist wegen (47) kleiner als g. Nach unserer Induktionsvoraussetzung ist daher der zu beweisende Satz auf (49) anwendbar und

$$k > d(C, \overline{D}_1, D_2, \ldots, D_k) - d(C). \tag{50}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall I: $k = m$.

In diesem Falle ist nach (50)

$$m > d(C, \overline{D}_1, D_2, \ldots, D_m) - d(C). \tag{51}$$

Wir können den Satz 22 wegen der Irreduzibilität von (49) und (43) zweimal anwenden, wodurch sich

$$d(C, \overline{D}_1, D_2, \ldots, D_m) = d(C, D_2, \ldots, D_m) = d(C, D_1, \ldots, D_m)$$

ergibt. Also ist (51) in veränderter Form genau unsere Behauptung.

Fall II: $k < m$.

Nach (28) ist $\mathfrak{H}(D_1) = \mathfrak{H}(A)$ und $\mathfrak{H}(\overline{D}_1) = \mathfrak{H}(A^p)$. Demgemäß ist nach Satz 23 [wobei auch (29) benutzt wird]

$$d(C, D_1, \ldots, D_k) \leqq d(C, \overline{D}_1, D_2, \ldots, D_k) + 1.$$

Nach (50) ist aber

$$k \geqq d(C, \overline{D}_1, D_2, \ldots, D_k) + 1 - d(C),$$

und aus diesen beiden Resultaten ergibt sich

$$k \geqq d(C, D_1, \ldots, D_k) - d(C). \tag{52}$$

Wir fassen nun das Produkt (43) als in den Faktoren $D_{k+1}, \ldots, D_m$ irreduzibel verschwindend auf; hierbei tritt an Stelle von C das Produkt $CD_1 \ldots D_k$, das ja wegen der Irreduzibilität von (43) und wegen $k < m$ nicht verschwinden kann. Der für dieses irreduzibel verschwindende Produkt gebildete Ausdruck (44) ist wegen $d(D_1) > 1$ kleiner als g. Der zu beweisende Satz ist demnach auf dieses Produkt anwendbar und

$$m - k > d(CD_1 \ldots D_k, D_{k+1}, \ldots, D_m) - d(CD_1 \ldots D_k).$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe des Satzes 18

$$m - k > d(C, D_1, \ldots, D_m) - d(C, D_1, \ldots, D_k),$$

was, zu (52) addiert, unsere Behauptung liefert.

Damit haben wir durch Betrachtung jedes möglichen Falles den Satz 26 mit vollständiger Induktion bewiesen.

Satz 27. *Ist für das nichtverschwindende Gruppenalgebraelement C und für die nichtzyklischen Primreihen und Differenzen $T_1, \ldots, T_m$*

$$CT_1 \ldots T_m = 0, \tag{53}$$

und verschwindet dieses Produkt in $T_1, \ldots, T_m$ irreduzibel, so ist

$$m > d(C, T_1, \ldots, T_m) - d(C).$$

Beweis. Die Anzahl der unter $T_1, \ldots, T_m$ vorkommenden Primreihen sei g. Wir werden den Satz mit auf g angewandter vollständiger Induktion beweisen. Ist $g = 0$, so geht unser Satz in den Satz 26 über. Also sei $g > 0$ und setzen wir voraus, daß der zu beweisende Satz richtig ist, wenn unter $T_1, \ldots, T_m$ weniger als g Primreihen vorkommen.

Da $g > 0$ ist, dürfen wir annehmen, daß T_1 eine Primreihe ist. Sei D_1 die ihr zugeordnete Differenz. Gemäß Satz 9a ergibt sich aus (53)

$$CD_1 T_2 \ldots T_m = 0. \tag{54}$$

Läßt man hier den Faktor D_1 fort, so verschwindet das übrigbleibende Produkt wegen der Irreduzibilität von (53) nicht mehr. Bildet man also von (54) ausgehend ein irreduzibel verschwindendes Produkt, so erhält man — einen passenden Gebrauch der Indizes vorausgesetzt — ein in $D_1, T_2, \ldots, T_k$ irreduzibel verschwindendes Produkt

$$CD_1 T_2 \ldots T_k = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq m). \tag{55}$$

Da T_1 eine Primreihe ist, kommen unter $T_2, \ldots, T_k$ höchstens $g - 1$ Primreihen vor. Nach der Induktionsannahme ist also

$$k > d(C, D_1, T_2, \ldots, T_k) - d(C). \tag{56}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall I: $k = m$.

In diesem Falle ist nach (56)

$$m > d(C, D_1, T_2, \ldots, T_m) - d(C). \tag{57}$$

Wegen der Irreduzibilität der Produkte (55) und (53) sind die Sätze 22 und 21 auf sie anwendbar und so

$$d(C, D_1, T_2, \ldots, T_m) = d(C, T_2, \ldots, T_m) = d(C, T_1, \ldots, T_m).$$

Also bestätigt (57) genau unsere Behauptung.

Fall II: $k < m$.

Nach der Form (42) des Satzes 23 ist

$$d(C, T_1, \ldots, T_k) \leqq d(C, D_1, T_2, \ldots, T_k) + 1.$$

Andererseits ist nach (56)

$$k \geqq d(C, D_1, T_2, \ldots, T_k) + 1 - d(C),$$

und daher

$$k \geqq d(C, T_1, \ldots, T_k) - d(C). \tag{58}$$

Wir fassen das Produkt (53) als in $T_{k+1}, \ldots, T_m$ irreduzibel verschwindend auf; hierbei wird die Rolle von C durch das wegen der Irreduzibilität von (53) und wegen $k < m$ nichtverschwindende Produkt $CT_1 \ldots T_k$ gespielt. Da T_1 eine Primreihe ist, kommen unter $T_{k+1}, \ldots, T_m$ höchstens $g - 1$ Primreihen vor. Der zu beweisende Satz ist also auf dieses Produkt anwendbar und

$$m - k > d(CT_1 \ldots T_k, T_{k+1}, \ldots, T_m) - d(CT_1 \ldots T_k).$$

Gemäß Satz 18 ist also

$$m - k > d(C, T_1, \ldots, T_m) - d(C, T_1, \ldots, T_k),$$

was, zu (58) addiert, unsere Behauptung ergibt.

Damit haben wir unseren Satz durch Betrachtung jedes möglichen Falles mit vollständiger Induktion bewiesen.

Das eigentliche Ziel dieses ganzen Paragraphen war nur, den Spezialfall $C = 1$, $g = m - 1$ des Satzes 27 zu beweisen. Alles übrige diente nur, uns zu diesem Beweis zu helfen. Der genannte Spezialfall wird im Beweis unseres Hauptsatzes eine wesentliche Rolle spielen.

§ 11.

Sätze über Produkte von Reihen.

Wir bezeichnen die Summe der Koordinaten eines Gruppenalgebraelementes $B = a_1 A_1 + \cdots + a_r A_r$ mit $s(B)$, d. h.

$$s(B) = a_1 + \cdots + a_r.$$

Als Folge der Multiplikationsgesetze der Gruppenalgebraelemente ist klar, daß für beliebige Gruppenalgebraelemente B_1, B_2

$$s(B_1 B_2) = s(B_1) \cdot s(B_2) \tag{59}$$

ist. Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist, da jede nichtverschwindende Koordinate von $\Sigma[\mathfrak{H}]$ gleich 1 ist,

$$s(\Sigma[\mathfrak{H}]) = r(\mathfrak{H}). \tag{60}$$

Mit Hilfe dieser Funktion $s(B)$ beweisen wir folgenden

Satz 28. *Ist für das nichtverschwindende Gruppenalgebraelement C und für die Primreihen $S_1, \ldots, S_m$*

$$C = \Sigma[\mathfrak{H}(C)] \tag{61}$$

und

$$CS_1 \dots S_m = \sum [\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)], \tag{62}$$

so ist

$$m = d(C, S_1, \dots, S_m) - d(C)^{16}).$$

Beweis. Wir wenden die Regel (60) auf (61) und (62) an. So ergibt sich, die Bezeichnung (30) anwendend,

$$s(C) = r(C), \tag{63}$$

$$s(CS_1 \dots S_m) = r(CS_1 \dots S_m). \tag{64}$$

Wenn man (59) unter Berücksichtigung von (63) auf (64) anwendet, so erhält man

$$r(C)\, s(S_1) \dots s(S_m) = r(CS_1 \dots S_m).$$

Nach (32) ist also

$$d(C) + d[s(S_1)] + \dots + d[s(S_m)] = d(CS_1 \dots S_m). \tag{65}$$

Die Reihen $S_1, \dots, S_m$ sind aber Primreihen, die Zahlen $s(S_i)$ sind demnach Primzahlen und so nach (31)

$$d[s(S_1)] = \dots = d[s(S_m)] = 1.$$

Nach (65) ist also

$$d(C) + m = d(CS_1 \dots S_m). \tag{66}$$

$C, S_1, \dots, S_m$ sind wegen (61) bzw. als Reihen positive Gruppenalgebraelemente, die alle 1 als Komponente besitzen. Gemäß Satz 25 ist also

$$d(C, S_1, \dots, S_m) = d(CS_1 \dots S_m).$$

Folglich ist (66) mit der Behauptung unseres Satzes äquivalent.

Satz 29. *Ist für das nichtverschwindende Gruppenalgebraelement C und für die Primreihen $S_1, \dots, S_m$*

$$C \neq \sum [\mathfrak{H}(C)]$$

und

$$CS_1 \dots S_m = \sum [\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)], \tag{67}$$

so ist

$$m > d(C, S_1, \dots, S_m) - d(C)\ ^{17}).$$

---

[16]) Für unsere Zwecke wäre es genügend, den Satz nur in der schwächeren Form mit der Behauptung $m = d(CS_1 \dots S_m) - d(C)$ zu beweisen. Wir beweisen ihn jedoch in der obigen strengeren Form, da dies nicht viel Mühe kostet und außerdem dadurch die Analogie mit den Sätzen des vorigen Paragraphen klarer hervortritt. Eine entsprechende Bemerkung gilt auch für Satz 29.

[17]) Vgl. Fußnote [16]).

Beweis. Aus (67) folgt, wie im Beweis des Satzes 28,

$$s(C)\,s(S_1)\ldots s(S_m) = r(CS_1\ldots S_m),$$

also

$$s(C) \neq 0. \tag{68}$$

Wir betrachten nun die Untergruppe $\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m)$ und wollen beweisen, daß sie $\mathfrak{H}(S_1)$ als Untergruppe enthält. Dazu genügt es, laut (27), zu zeigen, daß, wenn $S_1 = 1 + A + \cdots + A^{p-1}$ ist, A als Element in $\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m)$ enthalten ist. Wir dürfen annehmen, daß A nicht in $\mathfrak{H}(C)$ enthalten ist, da sonst unsere Behauptung wegen (29) evident ist. Das Gruppenalgebraelement $S_1\ldots S_m$ ist als Produkt positiver Elemente auch selbst positiv. Unter seinen Komponenten kommt auch A vor. Wir können also $S_1\ldots S_m$ so in zwei Teile

$$S_1\ldots S_m = P + Q \tag{69}$$

spalten, daß P nicht verschwindet und sämtliche Komponenten von P zur Nebengruppe $A\mathfrak{H}(C)$ gehören, Q dagegen keine solche Komponente besitzt. P ist ein positives Gruppenalgebraelement und so

$$s(P) \neq 0. \tag{70}$$

Multipliziert man (69) mit C, so ergibt sich

$$CS_1\ldots S_m = CP + CQ,$$

wobei CP wieder nur zur Nebengruppe $A\mathfrak{H}(C)$ gehörende Komponenten, CQ dagegen keine solche besitzt. Wegen (68) und (70) und in Anbetracht von (59) kann CP nicht verschwinden. $CS_1\ldots S_m$ besitzt also wenigstens eine zu $A\mathfrak{H}(C)$ gehörende Komponente: AC_1, wobei C_1 ein Element der Gruppe $\mathfrak{H}(C)$ ist. $\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m)$ enthält also sowohl AC_1, als auch C_1; sie muß also auch A enthalten. Die Gruppe $\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m)$ enthält also tatsächlich $\mathfrak{H}(S_1)$.

Aus Analogiegründen folgt also, daß $\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m)$ eine jede der Untergruppen $\mathfrak{H}(S_1), \ldots, \mathfrak{H}(S_m)$ und so, als ihr mit $\mathfrak{H}(C)$ gebildetes Produkt, auch $\mathfrak{H}(C, S_1, \ldots, S_m)$ enthält. Da aber, nach dem Beweis des Satzes 17, auch umgekehrt $\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m)$ in $\mathfrak{H}(C, S_1, \ldots, S_m)$ enthalten ist, sind diese Untergruppen einander gleich[18]):

$$\mathfrak{H}(C, CS_1\ldots S_m) = \mathfrak{H}(C, S_1, \ldots, S_m). \tag{71}$$

[18]) Wir haben, um (71) zu beweisen, (68) wesentlich ausgenützt. Daß dies nötig ist, zeigt folgendes Beispiel: $\mathfrak{G}$ ist durch die Relationen $E^2 = 1$, $F^4 = 1$ definiert und $C = E - 1$, $S_1 = 1 + F$, $S_2 = 1 + EF$. Wie einfache Rechnung zeigt, gilt hier weder (68) noch (71).

Wir bezeichnen den Durchschnitt der Gruppen $\mathfrak{H}(C)$ und $\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)$ mit $\mathfrak{D}$ und zerlegen $\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)$ nach $\mathfrak{D}$ in Nebengruppen:

$$\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m) = \mathfrak{D} + A_2\mathfrak{D} + \dots + A_f\mathfrak{D}. \tag{72}$$

Multipliziert man mit $\mathfrak{H}(C)$, so ergibt sich nach (71)

$$\mathfrak{H}(C, S_1, \dots, S_m) = \mathfrak{H}(C) + A_2\mathfrak{H}(C) + \dots + A_f\mathfrak{H}(C). \tag{73}$$

Die rechtsstehenden Nebengruppen sind alle verschieden, da[19]) $A_iA_k^{-1}$ zu $\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)$ gehört; wenn es nämlich auch in $\mathfrak{H}(C)$ enthalten wäre, so gehörte es zu $\mathfrak{D}$, was gegen die Zerlegung (72) verstößt. Die Ordnungen der Faktorgruppen $\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)/\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}(C, S_1, \dots, S_m)/\mathfrak{H}(C)$ sind also einander gleich (oben schon mit f bezeichnet).

Multipliziert man $\Sigma[\mathfrak{H}(C)]$ mit einem Element von $\mathfrak{D}$, so bleibt sie gemäß (9) unverändert. Also ist

$$\Sigma[\mathfrak{D}] \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)] = r(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)]. \tag{74}$$

Multiplizieren wir das mit A_i, so ergibt sich (die übliche Bezeichnung der Elementensummen auch bei Nebengruppen benutzend)

$$\Sigma[A_i\mathfrak{D}] \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)] = r(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma[A_i\mathfrak{H}(C)] \qquad (i = 2, \dots, f). \tag{75}$$

Addiert man die Gleichungen (74) und (75), so folgt nach (72) und (73)

$$\Sigma[\mathfrak{H}(CS_1 \dots S_m)] \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)] = r(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C, S_1, \dots, S_m)]$$

und mittels (67)

$$CS_1 \dots S_m \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)] = r(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C, S_1, \dots, S_m)]. \tag{76}$$

Multipliziert man $\Sigma[\mathfrak{H}(C)]$ mit einer Komponente von C, so bleibt sie gemäß (9) unverändert, also ist

$$C \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)] = s(C) \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)].$$

Wir setzen das in (76) ein:

$$s(C) \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C)] \cdot S_1 \dots S_m = r(\mathfrak{D}) \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C, S_1, \dots, S_m)]. \tag{77}$$

Jede Koordinate des Gruppenalgebraelementes auf der rechten Seite ist $r(\mathfrak{D})$. Da aber die linke Seite durch $s(C)$ teilbar ist, muß das auch für die rechte Seite zutreffen und, da diese nicht verschwindet, $r(\mathfrak{D})$ durch $s(C)$ teilbar sein:

$$r(\mathfrak{D}) = k \cdot s(C),$$

wobei k eine positive ganze Zahl ist. Aus (77) folgt also

$$\Sigma[\mathfrak{H}(C)] \cdot S_1 \dots S_m = k \cdot \Sigma[\mathfrak{H}(C, S_1, \dots, S_m)].$$

Wenden wir nun die Regel (59) an, so ergibt sich, (60) benützend,

$$r(C)\, s(S_1) \dots s(S_m) = k \cdot r(C, S_1, \dots, S_m). \tag{78}$$

---

[19]) Vgl. z. B. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (1927), Satz 11.

Da die Reihen $S_1, \ldots, S_m$ Primreihen sind, erhalten wir durch Anwendung der Regeln (32) und (31)

$$d(C) + m = d(k) + d(C, S_1, \ldots, S_m).$$

Wenn wir das mit der Behauptung unseres Satzes vergleichen, so sehen wir, daß nun nur mehr $d(k) > 0$ oder, was damit gleichbedeutend ist, $k \neq 1$ zu beweisen ist.

Wir nehmen an, daß $k = 1$ ist und werden daraus einen Widerspruch ableiten. Denn ist $k = 1$, so folgt aus (78)

$$s(S_1) \ldots s(S_m) = \frac{r(C, S_1, \ldots, S_m)}{r(C)},$$

also mittels (59) und mit der Bezeichnung von (73)

$$s(S_1 \ldots S_m) = f. \tag{79}$$

$S_1 \ldots S_m$ muß aber aus jeder der Nebengruppen (73) wenigstens ein Element als Komponente besitzen, da sonst $CS_1 \ldots S_m$ auch nicht Komponenten in jeder dieser Nebengruppen besäße, was nach (72) der Annahme (67) widerspricht. Die Anzahl der Nebengruppen ist aber genau f, das positive Gruppenalgebraelement $S_1 \ldots S_m$ besitzt also mit Rücksicht auf (79) in jeder der Nebengruppen (73) eine einzige Komponente und zu all diesen gehört als Koordinate 1. Da nun 1 eine Komponente von $S_1 \ldots S_m$ ist, gehört keine Komponente von $S_1 \ldots S_m - 1$ zu $\mathfrak{H}(C)$. Also läßt sich $CS_1 \ldots S_m$ in der Form

$$CS_1 \ldots S_m = C + R_1$$

schreiben, wobei R_1 keine zu $\mathfrak{H}(C)$ gehörende Komponente besitzt. Auf Grund von (67) und (72) ist aber andererseits

$$CS_1 \ldots S_m = \Sigma[\mathfrak{D}] + R_2,$$

wobei R_2 ebenfalls keine zu $\mathfrak{H}(C)$ gehörende Komponente besitzt. Da umgekehrt sämtliche Komponenten von C und $\Sigma[\mathfrak{D}]$ zu $\mathfrak{H}(C)$ gehören, folgt aus dem Vergleich der beiden letzten Gleichungen

$$C = \Sigma[\mathfrak{D}]$$

und nach Satz 19

$$\mathfrak{H}(C) = \mathfrak{D}.$$

Also ist

$$C = \Sigma[\mathfrak{H}(C)],$$

was unserer Annahme über C widerspricht.

Damit haben wir den Satz 29 bewiesen. Die Sätze 28 und 29 ergänzen gewissermaßen einander und werden die Haupthilfsmittel zur Bestätigung der Minkowskischen Vermutung sein.

§ 12.

Bestätigung der Minkowskischen Vermutung.

Bevor wir mit Hilfe der Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen unser Endziel erreichen können, müssen wir, von der 3. Fassung der Vermutung ausgehend, derselben eine neue Fassung geben, in welcher es sich nur um Primreihen handelt. Dazu brauchen wir zwei Hilfssätze.

Satz 30. *Jede Reihe ist entweder Primreihe, oder als Produkt von Primreihen darstellbar*[20]).

Beweis. Ist die Reihe

$$S = 1 + A + \cdots + A^{m-1} \tag{80}$$

nicht schon selbst eine Primreihe, so ist $m = pq$, wobei p eine Primzahl und q eine von 1 verschiedene ganze Zahl ist. Dann gilt die Faktorzerlegung

$$S = [1 + A + \cdots + A^{p-1}][1 + A^p + (A^p)^2 + \cdots + (A^p)^{q-1}].$$

Der erste Faktor ist dabei eine Primreihe. Wenn wir dasselbe Verfahren auf den zweiten Faktor wiederholt anwenden, so erhalten wir am Ende eine Faktorzerlegung, worin schon sämtliche Faktoren Primreihen sind.

Satz 31. *Kommt in der Faktorzerlegung*

$$S = S_1 S_2 \ldots S_k$$

unter den Primreihen $S_1, \ldots, S_k$ *eine zyklische vor, so ist auch die Reihe* S *zyklisch.*

Beweis. S sei von der Form (80) und z. B.

$$S_1 = 1 + A_1 + \cdots + A_1^{p-1}$$

eine zyklische Primreihe. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall I: $A_1 = 1$[21]).

In diesem Falle ist $S_1 = p$. Folglich besitzt das Produkt

$$S_1 [S_2 \ldots S_k (A - 1)] = S(A - 1) = A^m - 1$$

nur solche Koordinaten, die durch p teilbar sind. Das ist aber für den Ausdruck $A^m - 1$ nur dann möglich, wenn er verschwindet, d. h. wenn S zyklisch ist.

---

[20]) Wir behaupten nicht und es ist auch nicht richtig, daß diese Faktorzerlegung auf nur eine Weise möglich ist.

[21]) Wir untersuchen diesen Fall nur der Vollständigkeit halber, da er, wo der Satz 31 angewandt wird, nicht auftreten kann.

Fall II: $A_1 \neq 1$.

Nach (11) ist

$$S_1(A_1 - 1) = 0,$$

und demnach

$$S(A_1 - 1) = S_1(A_1 - 1) \cdot S_2 \ldots S_k = 0. \tag{81}$$

Wir nehmen an, daß S nichtzyklisch ist. Dann können wir, mit der Wahl $B = A_1 - 1$, den Satz 9a auf (81) anwenden, wodurch

$$(A_1 - 1)(A^m - 1) = 0,$$

d. h.

$$1 + A_1 A^m = A_1 + A^m$$

folgt. Da auf der linken Seite 1 als Glied steht, müßte auf der rechten auch ein Glied gleich 1 sein. Da aber dies in beiden möglichen Fällen unseren Voraussetzungen widerspricht, muß S zyklisch sein.

Die angedeutete neue Fassung der Minkowskischen Vermutung ist die

4. Fassung. *Ist für die endliche abelsche Gruppe* $\mathfrak{G}$ *und für die Primreihen* $S_1, \ldots, S_m$

$$S_1 S_2 \ldots S_m = \Sigma[\mathfrak{G}], \tag{82}$$

so muß wenigstens eine der Primreihen $S_1, \ldots, S_m$ *zyklisch sein.*

Wir beweisen, daß die Behauptungen der 3. und 4. Fassung (kurz: 3 und 4) äquivalent sind. Daß 4 aus 3 folgt, ist unmittelbar klar. Daß auch umgekehrt 3 aus 4 folgt, sieht man folgendermaßen ein: Man zerlege die in 3 figurierenden Reihen in Primfaktoren, was nach Satz 30 möglich ist. Unter diesen Primreihen gibt es nach 4 wenigstens eine zyklische. Jene Reihe, unter deren Primfaktoren diese zyklische Primreihe vorkommt, ist nach Satz 31 zyklisch. Unter den in 3 figurierenden Reihen kommt also wenigstens eine zyklische vor.

Es ist bemerkenswert, daß die in der 4. Fassung mit m bezeichnete Größe nicht mehr der in den früheren Fassungen mit n bezeichneten Größe (der Dimensionszahl) entspricht. Betrachtet man also die Vermutung in der 4. Fassung, so scheint ihre Bestätigung, unabhängig von n (von der Dimensionszahl), in jedem Falle gleiche Schwierigkeiten zu bereiten.

Wir wollen endlich auch noch die 4. Fassung etwas umgestalten, um ihre Bestätigung besser vorzubereiten. Wir brauchen nämlich die, die Grundgruppe $\mathfrak{G}$ explizit nicht mehr enthaltende,

5. Fassung. *Ist für die Primreihen* $S_1, \ldots, S_m$

$$S_1 S_2 \ldots S_m = \Sigma[\mathfrak{H}(S_1 \ldots S_m)], \tag{83}$$

so muß wenigstens eine unter ihnen zyklisch sein.

Wir beweisen die Äquivalenz der 4. und 5. Fassung.

Vorerst sei 5 als richtig angenommen. Gilt (82), so ist nach Satz 19

$$\mathfrak{H}(S_1 \dots S_m) = \mathfrak{G},$$

folglich gilt auch (83). Eine der Primreihen muß also zyklisch sein.

Nun sei 4 als richtig angenommen und es gelte (83). Man wähle als (eventuell neue) Grundgruppe

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{H}(S_1 \dots S_m).$$

Da $S_1, \dots, S_m$ positive Elemente der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}]$ sind und jede 1 als Komponente besitzt, ist nach dem Beweise des Satzes 25

$$\mathfrak{H}(S_1 \dots S_m) = \mathfrak{H}(S_1, \dots, S_m).$$

Die Reihen $S_1, \dots, S_m$ sind also Elemente auch der Gruppenalgebra $\Gamma[\mathfrak{G}']$ und nach (83) ist

$$S_1 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{G}'].$$

Aus 4 folgt also (auf die Grundgruppe $\mathfrak{G}'$ angewandt), daß eine der Primreihen zyklisch sein muß.

Endlich beweisen wir als Endziel den

Satz 32. *Die Minkowskische Vermutung ist richtig.*

Beweis. Wir bestätigen die Vermutung in der 5. Fassung, und zwar mit auf m angewandter vollständiger Induktion.

Ist $m = 1$, so ist die Behauptung fast trivial. Wäre nämlich für eine nichtzyklische Primreihe

$$S_1 = \Sigma[\mathfrak{H}(S_1)],$$

so folgte daraus mit Hilfe des Satzes 24 (mit der Wahl $B = 1$), daß die der Reihe S_1 zugeordnete Differenz verschwindet, was unmöglich ist.

Es sei also $m > 1$ und setzen wir voraus, daß unsere Behauptung in jedem Falle richtig ist, wenn die Anzahl der Primreihen kleiner als m ist. Wir nehmen weiter an, daß unsere Behauptung für m falsch ist, d. h. für gewisse nichtzyklische Primreihen $S_1, \dots, S_m$

$$S_1 \dots S_m = \Sigma[\mathfrak{H}(S_1 \dots S_m)] \tag{84}$$

ist. Daraus werden wir auf einen Widerspruch schließen.

Da $\mathfrak{H}(1)$ die Einheitsgruppe und so $1 = \Sigma[\mathfrak{H}(1)]$ ist, können wir auf (84) den Satz 28 mit der Wahl $C = 1$ anwenden, wodurch sich

$$m = d(S_1, \dots, S_m) \tag{85}$$

ergibt.

Es sei D_1 die der Reihe S_1 zugeordnete Differenz. Da $S_2 \dots S_m$ als Produkt positiver Gruppenalgebraelemente auch selbst positiv ist, folgt aus (84) mittels des Satzes 24 (mit der Wahl $B = S_2 \dots S_m$)

$$D_1 S_2 \dots S_m = 0. \tag{86}$$

Läßt man hier den Faktor D_1 fort, so verschwindet das übrigbleibende Produkt wegen (84) nicht mehr. Bildet man also von (86) ausgehend ein irreduzibel verschwindendes Produkt, so erhält man — einen passenden Gebrauch der Indizes vorausgesetzt — ein in $D_1, S_2, \ldots, S_k$ irreduzibel verschwindendes Produkt

$$D_1 S_2 \ldots S_k = 0 \qquad (1 < k \leqq m). \tag{87}$$

Wenden wir darauf den Satz 27 mit der Wahl $C = 1$ an[22]), so ergibt sich

$$k > d(D_1, S_2, \ldots, S_k). \tag{88}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall I: $k = m$.

Nach (88) ist in diesem Falle

$$m > d(D_1, S_2, \ldots, S_m). \tag{89}$$

Da $\mathfrak{H}(S_2, \ldots, S_m)$ nach (29) eine Untergruppe von $\mathfrak{H}(D_1, S_2, \ldots, S_m)$, also $r(D_1, S_2, \ldots, S_m)$ durch $r(S_2, \ldots, S_m)$ teilbar ist, ergibt sich nach (32)

$$d(D_1, S_2, \ldots, S_m) \geqq d(S_2, \ldots, S_m)\ ^{23}).$$

Aus (89) folgt also

$$m > d(S_2, \ldots, S_m). \tag{90}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist für die Primreihen $S_2, \ldots, S_m$, da sie nichtzyklisch sind und ihre Anzahl kleiner als m ist,

$$S_2 \ldots S_m \neq \Sigma[\mathfrak{H}(S_2 \ldots S_m)].$$

Wir können somit auf (84) den Satz 29 mit der Wahl $C = S_2 \ldots S_m$ anwenden, und es ergibt sich

$$1 > d(S_1, S_2 \ldots S_m) - d(S_2 \ldots S_m),$$

also mit Hilfe des Satzes 18

$$0 \geqq d(S_1, \ldots, S_m) - d(S_2, \ldots, S_m)\ ^{24}).$$

Durch Addieren zu (90) folgt daraus

$$m > d(S_1, \ldots, S_m),$$

was gegen (85) verstößt.

---

[22]) Vgl. die Bemerkung am Ende des § 10.

[23]) Vermittels einer Anwendung des Satzes 22 kann man auch einsehen, daß hier nur das Gleichheitszeichen gilt.

[24]) Es ist einfach einzusehen, daß hier nur das Gleichheitszeichen auftreten kann.

Fall II: $k < m$.

Nach der Form (42) des Satzes 23 ist

$$d(S_1, \ldots, S_k) \leqq d(D_1, S_2, \ldots, S_k) + 1,$$

also folgt aus (88)

$$k \geqq d(S_1, \ldots, S_k). \tag{91}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist für die Primreihen $S_1, \ldots, S_k$, da sie nichtzyklisch sind und ihre Anzahl kleiner als m ist,

$$S_1 \ldots S_k \neq \sum [\mathfrak{H}(S_1 \ldots S_k)].$$

Demnach können wir auf (84) den Satz 29 mit der Wahl $C = S_1 \ldots S_k$ anwenden, wodurch wir

$$m - k > d(S_1 \ldots S_k, S_{k+1}, \ldots, S_m) - d(S_1 \ldots S_k)$$

erhalten. Mit Satz 18 ergibt sich daraus

$$m - k > d(S_1, \ldots, S_m) - d(S_1, \ldots, S_k),$$

und wenn wir das zu (91) addieren,

$$m > d(S_1, \ldots, S_m),$$

was gegen (85) verstößt.

Da wir in jedem möglichen Falle aus der Annahme der Unrichtigkeit unserer Behauptung einen Widerspruch ableiten konnten, haben wir unsere Behauptung bewiesen. Damit ist also die Bestätigung der MINKOWSKIschen Vermutung für jeden Fall erbracht.

Literatur.

[1] D. DERRY, Remarks on a conjecture of MINKOWSKI. Amer. J. of Math. 62 (1940), S. 61–66.

[2] G. HAJÓS, Többméretü terek befedése kockaráccsal. Mat. fiz. lapok 45 (1938), S. 171–190. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

[3] G. HAJÓS, Többméretü terek egyszeres befedése kockaráccsal. Mat. fiz. lapok 48 (1941), S. 37–64. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

[4] H. JANSEN, Lückenlose Ausfüllung des R_n mit gitterförmig angeordneten n-dimensionalen Quadern. Diss. Kiel (1909).

[5] O.-H. KELLER, Über lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln. Journ. für r. u. a. Math. 163 (1930), S. 231–248.

[6] O.-H. KELLER, Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimendionalen Raumes mit Würfeln. Journ. für r. u. a. Math. 177 (1937), S. 61–64.

[7] J. F. KOKSMA, Diophantische Approximationen. Ergebn. d. Math. IV, 4 (1936), S. 15–16.

[8] B. LEVI, Un teorema del MINKOWSKI sui sistemi di forme lineari a variabili intere. Rend. Circ. Mat. Palermo 31 (1911), S. 318–340.

[9] H. MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen (1896).

[10] H. MINKOWSKI, Diophantische Approximationen (1907).

[11] L. J. MORDELL, MINKOWSKIs theorems and hypotheses on linear forms. C. R. du Congr. Internat. Oslo 1936, I, S. 226–238.

[12] S. L. VAN OSS, Over een stelling van MINKOWSKI. Hand. 15. Nat. Congr. Amsterdam 1915, S. 192–193.

[13] O. PERRON, Über lückenlose Ausfüllung des n-dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. I–II. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 1–26, 161–180.

[14] O. PERRON, Modulartige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln. I–II. Math. Annalen 117 (1940), S. 415–447; (1941), S. 609–658.

[15] TH. SCHMIDT, Über lückenlose Zerlegung des n-dimensionalen Raumes in gitterförmig angeordnete Würfel. Schriften math. Sem. Univ. Berlin I, 6 (1933).

[16] C. L. SIEGEL, Neuer Beweis des Satzes von MINKOWSKI über lineare Formen. Math. Annalen 87 (1922), S. 36–38. (Nur eine Fußnote bezieht sich auf die Vermutung.)

(Eingegangen am 31. Mai 1941.)

Über das Maximum des absoluten Betrages des Differenzenquotienten für unimodular beschränkte Funktionen.

Von

C. Carathéodory in München.

1. Einleitung. Im Einheitskreise $|z| < 1$ geben wir uns zwei voneinander verschiedene Punkte z_1 und z_2. Wir bilden für alle analytischen Funktionen $f(z)$, welche in diesem Kreise regulär und unimodular beschränkt sind und welche außerdem im Anfangspunkt $z = 0$ verschwinden, die Zahlen

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right| \quad (f(z) \text{ regulär}, |f(z)| < 1 \text{ für } |z| < 1, f(0) = 0) \tag{1.1}$$

und bezeichnen mit $M(z_1, z_2)$ das Maximum dieser Zahlenmenge. Da die Funktion $f(z) \equiv z$ selbst unter den betrachteten Funktionen enthalten ist, hat man immer

$$M(z_1, z_2) \geqq 1.$$

Das Schwarzsche Lemma ist äquivalent mit der Aussage

$$M(0, z) \equiv 1 \qquad (|z| < 1).$$

Vor einigen Jahren habe ich gezeigt, daß darüber hinaus die Aussage besteht[1])

$$\begin{cases} M(z_1, z_2) > 1 & \text{für } |z_1| + |z_2| > |1 - \bar{z}_1 z_2|, \\ M(z_1, z_2) = 1 & \text{für } |z_1| + |z_2| \leqq |1 - \bar{z}_1 z_2|. \end{cases} \tag{1.2}$$

In der vorliegenden Note soll nun die Funktion $M(z_1, z_2)$ explizite ausgerechnet und folgender Satz bewiesen werden:

Satz 1. *Bezeichnet man mit σ und τ die reellen, nicht negativen Lösungen der Gleichungen*

$$\cosh\sigma = \left|\frac{1-\bar{z}_1 z_2}{z_2-z_1}\right|, \quad \cosh\tau = \frac{|z_1|+|z_2|}{|z_2-z_1|}, \tag{1.3}$$

so gelten die Formeln

$$\begin{cases} M(z_1, z_2) = \cosh(\tau - \sigma) & \text{falls } \tau > \sigma \text{ ist}, \\ M(z_1, z_2) = 1 & \text{falls } \tau \leqq \sigma \text{ ist}. \end{cases} \tag{1.4}$$

[1]) C. Carathéodory, A Generalization of Schwarz's Lemma. Bull. Amer. Math. Soc. 1937, S. 231–241.

Wir werden auch die Funktion $M(h, z)$ für die reellen Werte eines Parameters h $(0 < h < 1)$ untersuchen und einige Eigenschaften der Kurven $M(h, z) = c > 1$ ableiten. Es wird sich zeigen, daß $M(h, z)$ eine auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq 1$ stetige Funktion ist, welche in allen inneren Punkten dieser Kreisscheibe stetig differentiierbar ist.

Auch folgende einfache Abschätzung ist interessant.

Satz 2. *Mit der Bezeichnung*

$$\left|\arg \frac{z_2}{z_1}\right| = \vartheta \qquad (0 \leqq \vartheta < \pi) \tag{1.5}$$

hat man immer

$$M(z_1, z_2) < \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}}, \tag{1.6}$$

und diese Schranke kann nicht verkleinert werden.

2. Vorläufige Darstellung von $M(z_1, z_2)$. Nach dem Schwarzschen Lemma werden die von uns betrachteten Funktionen $f(z)$ auch durch die Relationen

$$f(z) = zg(z), \quad |g(z)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1 \tag{2.1}$$

charakterisiert. Für die Berechnung der Zahl

$$M(z_1, z_2) = \max \left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right| \tag{2.2}$$

genügt es offenbar, solche Funktionen (2. 1) heranzuziehen, für welche

$$|g(z)| < 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1 \tag{2.3}$$

ist. Setzt man für eine beliebige dieser letzteren Funktionen

$$g(z_1) = a, \tag{2.4}$$

so ist also $|a| < 1$.

Durch die Gleichung

$$h(z) = \frac{a - g(z)}{1 - \bar{a}\, g(z)} \cdot \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z_1 - z} \tag{2.5}$$

wird dann eine im Einheitskreise reguläre und unimodular beschränkte Funktion $h(z)$ definiert. Gibt man sich umgekehrt eine beliebige derartige Funktion $h(z)$ und berechnet hierauf $g(z)$ aus (2. 5), so ist $g(z)$ regulär und unimodular beschränkt und außerdem ist $g(z_1) = a$.

Auf diese Weise erhält man die Formel

$$f(z) = z \frac{a(1 - \bar{z}_1 z) - (z_1 - z) h(z)}{(1 - \bar{z}_1 z) - \bar{a}(z_1 - z) h(z)}, \tag{2.6}$$

aus welcher folgt

$$f(z_1) = a z_1. \tag{2.7}$$

Wir setzen jetzt

(2. 8) $$h(z_2) = b, \quad |b| \leqq 1,$$

und finden

(2. 9) $$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{a(1 - \bar{z}_1 z_2) + (z_2 - a\bar{a} z_1) b}{(1 - \bar{z}_1 z_2) - \bar{a}(z_1 - z_2) b}.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite dieser letzten Gleichung mit $\chi(a, b)$, so erhalten wir eine erste Darstellung von $M(z_1, z_2)$ in der Gestalt

(2. 10) $M(z_1, z_2) =$ obere Grenze von $|\chi(a, b)|$, für $|a| < 1$, $|b| \leqq 1$.

Für jeden festen Wert von a ist nun die Funktion $\chi(a, b)$ eine reguläre analytische Funktion von b auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $|b| \leqq 1$. Das Maximum von $|\chi(a, b)|$ wird unter diesen Umständen in einem Punkte des Randes des Einheitskreises, etwa im Punkte $b = -e^{-i\vartheta}$, erreicht. Nun ist aber

$$\chi(a e^{i\vartheta}, b e^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta} \chi(a, b);$$

setzt man also

(2. 11) $$\omega(a) = \chi(a, -1) = \frac{a(1 - \bar{z}_1 z_2) - (z_2 - a\bar{a} z_1)}{(1 - \bar{z}_1 z_2) + \bar{a}(z_1 - z_2)},$$

so erhält man an Stelle von (2. 10) die einfachere Formel

(2. 12) $M(z_1, z_2) =$ obere Grenze von $|\omega(a)|$ für $|a| < 1$.

Wir setzen nun

(2. 13) $$a = re^{i\varphi} \qquad (0 \leqq r < 1, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

und erhalten schließlich mit der Bezeichnung

(2. 14) $$\psi(r) = \max |\omega(re^{i\varphi})| \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

die Formel

(2. 15) $M(z_1, z_2) =$ obere Grenze von $\psi(r)$ für $0 \leqq r < 1$.

3. Berechnung von $\psi(r)$. Wir führen die Bezeichnung ein

(3. 1) $$s e^{i\lambda} = \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{z_2 - z_1} \qquad (s > 0, \ 0 \leqq \lambda < 2\pi),$$

und bemerken, daß man immer hat

(3. 2) $$s > 1.$$

Ferner setzen wir

(3. 3) $$p e^{i\mu} = \frac{z_2}{z_1 - z_2}, \quad q e^{i\nu} = \frac{z_1}{z_2 - z_1} \qquad (p, q > 0, \ 0 \leqq \mu, \nu < 2\pi);$$

zwischen diesen Parametern besteht die Gleichung

(3. 4) $$p e^{i\mu} + q e^{i\nu} + 1 = 0,$$

aus welcher man wegen des Dreieckssatzes folgert

(3. 5) $$|p - q| \leqq 1 \leqq p + q.$$

Die Gleichung (2. 11) schreiben wir nun folgendermaßen:

$$\omega(a) = \frac{a(1-\bar{z}_1 z_2)+a\bar{a}(z_1-z_2)-(1-a\bar{a})z_2}{(1-\bar{z}_1 z_2)+\bar{a}(z_1-z_2)}. \tag{3.6}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3. 1) und (3. 3) erhalten wir daraus

$$\omega(r e^{i\varphi}) = \frac{-r s e^{i(\varphi+\lambda)}+r^2-(1-r^2)p e^{i\mu}}{-s e^{i(\varphi+\lambda)}+r} e^{i\varphi}. \tag{3.7}$$

Wir setzen jetzt

$$\alpha = -rs, \quad \beta = r^2-(1-r^2)p e^{i\mu}, \quad \gamma = -s, \quad \delta = r \tag{3.8}$$

und $\vartheta = \varphi + \lambda$. Dann ist

$$\psi(r) = \max \left| \frac{\alpha e^{i\vartheta}+\beta}{\gamma e^{i\vartheta}+\delta} \right| \qquad \text{für } 0 \leqq \vartheta < 2\pi. \tag{3.9}$$

4. Bei der Möbiusschen Transformation[2])

$$w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \tag{4.1}$$

wird der Punkt $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ in $w = \infty$ transformiert. Nach dem Spiegelungsprinzip wird folglich der Punkt $z = -\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}}$ in den Mittelpunkt

$$w_0 = \frac{\beta\bar{\delta}-\alpha\bar{\gamma}}{\delta\bar{\delta}-\gamma\bar{\gamma}} \tag{4.2}$$

desjenigen Kreises $\varkappa$ transformiert, welcher in der erwähnten Möbiusschen Transformation das Bild des Kreises $z = e^{i\vartheta}$ ist. Den Radius R dieses Kreises $\varkappa$ berechnet man somit durch die Formel

$$R = \left| \frac{\beta\bar{\delta}-\alpha\bar{\gamma}}{\delta\bar{\delta}-\gamma\bar{\gamma}} - \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \right| = \frac{|\alpha\delta-\beta\gamma|}{|\delta\bar{\delta}-\gamma\bar{\gamma}|}. \tag{4.3}$$

Nun ist aber nach (3. 9)

$$\psi(r) = |w_0| + R$$

und dies kann geschrieben werden

$$\psi(r) = \frac{|\beta\bar{\delta}-\alpha\bar{\gamma}|+|\alpha\delta-\beta\gamma|}{|\delta\bar{\delta}-\gamma\bar{\gamma}|}. \tag{4.4}$$

Nach den Gleichungen (3. 8) ist aber

$$\begin{cases} \beta\bar{\delta}-\alpha\bar{\gamma} = r[r^2-s^2-(1-r^2)p e^{i\mu}], \\ \alpha\delta-\beta\gamma = -s(1-r^2)p e^{i\mu}, \\ \delta\bar{\delta}-\gamma\bar{\gamma} = r^2-s^2, \end{cases} \tag{4.5}$$

[2]) Im folgenden wird dauernd vorausgesetzt, daß $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$ ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $p > 0$ ist. Das Schlußresultat des § 9 gilt aber auch für $p = 0$.

und wir erhalten schließlich die Gleichung

$$\psi(r) = \frac{r|r^2 - s^2 - (1-r^2)\,p\,e^{i\mu}| + s(1-r^2)p}{s^2 - r^2}. \tag{4.6}$$

5. Zurückführung auf ein Problem über Kurven dritter Ordnung. In einer $\xi\eta$-Ebene betrachten wir den Punkt mit den Koordinaten

$$\xi = \frac{p\,(1-r^2)}{s^2 - r^2}, \qquad \eta = \psi(r), \tag{5.1}$$

wobei $\psi(r)$ durch (4. 6) gegeben ist. Es besteht dann die Gleichung

$$\eta = s\xi + r\,|1 + \xi e^{i\mu}|,$$

welche auch geschrieben werden kann

$$\eta = s\xi + r\sqrt{1 + 2\xi\cos\mu + \xi^2}. \tag{5.2}$$

Aus der ersten Gleichung (5. 1) berechnet man

$$r^2 = \frac{p - s^2\xi}{p - \xi}, \tag{5.3}$$

und die Vergleichung der beiden letzten Gleichungen zeigt, daß der Punkt (5. 1) auf der kubischen Kurve

$$(p - \xi)(\eta - s\xi)^2 = (p - s^2\xi)(1 + 2\xi\cos\mu + \xi^2) \tag{5.4}$$

liegen muß.

Aus (5. 1) und (5. 3) folgt ferner, daß die beiden halbgeschlossenen Intervalle

$$0 \leqq r < 1, \qquad 0 < \xi \leqq \frac{p}{s^2} \tag{5.5}$$

eineindeutig aufeinander abgebildet werden.

Die Gleichung (2. 15) besagt also, daß $M(z_1, z_2)$ gleich dem Maximum von $\eta(\xi)$ auf demjenigen Bogen der kubischen Kurve (5. 4) ist, für welchen die Gleichung (5. 2) und die Relationen (5. 5) erfüllt sind. Dieser Bogen kann auch durch seine Endpunkte, welche die Koordinaten

$$\xi = 0,\ \eta = 1 \quad \text{bzw.} \quad \xi = \frac{p}{s^2},\ \eta = \frac{p}{s} \tag{5.6}$$

besitzen, eindeutig charakterisiert werden.

6. Die soeben betrachtete kubische Kurve ist von der sechsten Klasse und wird durch elliptische Funktionen mit *negativer* Diskriminante uniformisiert. Durch jeden Punkt P einer solchen Kurve, der kein Wendepunkt ist, gehen, von der Tangente in P abgesehen, zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten hindurch[3]). Da der unendlich ferne Punkt der ξ-Achse auf der

[3]) G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars, 1886, Vol. II, Applications, S. 422.

Kurve liegt und kein Wendepunkt ist, besitzt diese infolgedessen *genau zwei reelle Tangenten*, welche parallel zur ξ-Achse verlaufen. Dieses Resultat wird übrigens auf ganz elementarem Wege durch unsere Formeln bestätigt werden.

Die reellen Punkte unserer Kurve besitzen Abszissen ξ, für welche

$$\xi > p \quad \text{oder} \quad \xi \leqq \frac{p}{s^2} \tag{6.1}$$

ist. Die Parallelen zur η-Achse, deren Punkte eine Abszisse $\xi > p$ oder $\xi < \frac{p}{s^2}$ besitzen, schneiden die Kurve in zwei Punkten, deren Mittelpunkt auf der Geraden

$$\eta = s\,\xi \tag{6.2}$$

liegt.

Die Gerade

$$\xi = p \tag{6.3}$$

ist eine Asymptote und gleichzeitig eine Wendetangente der Kurve. Die Kurve besitzt noch zwei weitere reelle Asymptoten, welche durch die Gleichungen

$$\eta = 2\,s\,\xi + \frac{p\,(s^2-1)}{2\,s^2} + \cos\mu, \tag{6.4}$$

$$\eta = -\left(\frac{p\,(s^2-1)}{2\,s^2} + \cos\mu\right) \tag{6.5}$$

gegeben werden.

Der Zweig der Kurve, der rechts von der Asymptote (6. 3) und oberhalb der Geraden (6. 2) verläuft, besitzt auch die Asymptote (6. 4). Er muß deshalb einen tiefsten Punkt ξ_1, η_1 besitzen, in welchem die Tangente parallel zur ξ-Achse liegt.

Der Bogen der Kurve, der uns interessiert, d. h. der Bogen, welcher die Punkte (5. 6) miteinander verbindet, kann also höchstens *einen* Punkt mit horizontaler Tangente enthalten. Dies erlaubt die Fälle, für welche $M(z_1, z_2) = 1$ ist, von den anderen, für welche $M(z_1, z_2) > 1$ ist, zu trennen.

Gibt es nämlich im Inneren des Intervalles

$$0 < \xi < \frac{p}{s^2} \tag{6.6}$$

einen Punkt ξ^*, so daß $\eta'(\xi^*) = 0$ ist, so muß beim Beschreiben des Intervalles (6. 6) das Vorzeichen von $\eta'(\xi)$ wechseln. In der Nähe des Punktes $\xi = \frac{p}{s^2}$ ist aber auf dem von uns betrachteten Bogen $\eta'(\xi) < 0$. Also muß $\eta'(0) > 0$ sein, und man hat

$$M(z_1, z_2) = \eta(\xi^*) > \eta(0) = 1. \tag{6.7}$$

Ist umgekehrt $M(z_1, z_2) > 1$, so ist der höchste Punkt des betrachteten Kurvenbogens mit den Koordinaten ξ^*, $\eta(\xi^*) > 1$ vom Anfangspunkt

$\xi = 0$, $\eta = 1$ verschieden. Er ist aber auch vom Endpunkt $\xi = \frac{p}{s^2}$, $\eta = \frac{p}{s}$ verschieden, weil in diesem Endpunkt die Tangente vertikal und in seiner Nähe $\eta'(\xi) < 0$ ist. Es muß also $\eta'(\xi^*) = 0$ und, wie wir soeben gesehen haben, $\eta'(0) > 0$ sein. Aus der Ungleichheit $M(z_1, z_2) > 1$ folgt also $\eta'(0) > 0$ und das Umgekehrte ist auch richtig.

7. Durch Differentiation von (5. 4) nach ξ erhält man

$$(7.1)\quad 2(p-\xi)(\eta - s\xi)(\eta' - s) - (\eta - s\xi)^2 = 2(p - s^2\xi)(\cos\mu + \xi) - \\ - s^2(1 + 2\xi\cos\mu + \xi^2).$$

Daraus folgt für $\xi = 0$, $\eta = 1$

$$(7.2)\qquad 2p\eta'(0) = 2p(s + \cos\mu) - (s^2 - 1).$$

Das Resultat des letzten Paragraphen läßt sich demnach schreiben

$$(7.3)\quad \begin{cases} M(z_1, z_2) > 1 & \text{für } 2p(s + \cos\mu) - (s^2 - 1) > 0, \\ M(z_1, z_2) = 1 & \text{für } 2p(s + \cos\mu) - (s^2 - 1) \leqq 0. \end{cases}$$

Dieses Kriterium soll vereinfacht werden. Hierzu entnehmen wir aus (3. 4) die Gleichung

$$(7.4)\qquad q^2 = 1 + 2p\cos\mu + p^2,$$

mit deren Hilfe man schreiben kann

$$(7.5)\qquad 2p(s + \cos\mu) - (s^2 - 1) = q^2 - (p - s)^2.$$

Es sei nun

$$(7.6)\qquad q^2 > (p - s)^2.$$

Ist erstens $p \leqq s$, so folgt hieraus $q > s - p$ oder

$$(7.7)\qquad s < p + q.$$

Ist zweitens $s < p$, so ist (7. 7) erst recht erfüllt, und diese Ungleichheit ist daher eine notwendige Folge von (7. 6).

Umgekehrt folgt (7. 6) aus (7. 7) jedesmal dann, wenn $p \leqq s$ ist. Ist aber $s < p$, so bedenke man, daß $s > 1$ und daß nach (3. 5) $q \geqq p - 1$ ist, so daß man schreiben kann

$$(7.8)\qquad q \geqq p - 1 > p - s > 0.$$

Mithin ist (7. 6) wiederum eine Folge von (7. 7). Die Aussage (7. 3) kann also durch folgende ersetzt werden, die mit der Bedingung (1. 2) äquivalent ist, welche ich in meiner früheren Arbeit auf anderem Wege aufgestellt hatte:

$$(7.9)\quad \begin{cases} M(z_1, z_2) > 1 & \text{für } s < p + q, \\ M(z_1, z_2) = 1 & \text{für } s \geqq p + q. \end{cases}$$

8. Berechnung von $M(z_1, z_2)$. Da sich in der Gleichung (5. 4) unserer kubischen Kurve die Glieder in ξ^3 gegenseitig aufheben, kann diese Gleichung in der Gestalt geschrieben werden

$$A(\eta) \cdot \xi^2 - B(\eta) \cdot \xi + C(\eta) = 0, \tag{8. 1}$$

wobei man zu setzen hat

$$\begin{cases} A(\eta) = 2\,s\,(\eta + s\cos\mu) + p\,(s^2 - 1), \\ B(\eta) = \eta^2 + 2\,p\,(s\,\eta + \cos\mu) - s^2, \\ C(\eta) = p\,(\eta^2 - 1). \end{cases} \tag{8. 2}$$

Die (reellen oder imaginären) Ordinaten der horizontalen Tangenten dieser Kurve werden durch die Wurzeln η_i der Gleichung

$$B^2(\eta) - 4\,A(\eta)\,C(\eta) = 0 \tag{8. 3}$$

dargestellt, welche besagt, daß für $\eta = \eta_i$ die Gleichung (8. 1) eine Doppelwurzel besitzt. Bildet man aber den Ausdruck $(B^2 - 4\,AC)$ und ersetzt man hierin nach (7. 4) die Größe $2\,p\cos\mu$ durch $(q^2 - p^2 - 1)$, so erhält man mit der Bezeichnung

$$B^2 - 4\,AC = \Delta(p, q)$$

die Relation

$$\begin{aligned} \Delta(p, q) = {} & \eta^4 - 4\,ps\eta^3 \\ & + 2\,((s^2 - 1) + (p^2 + q^2) + 2\,s^2\,(p^2 - q^2))\,\eta^2 \\ & - 4\,ps\,((s^2 - 1) + (p^2 - q^2))\,\eta \\ & + ((s^2 - 1) + (p + q)^2)\,((s^2 - 1) + (p - q)^2). \end{aligned} \tag{8. 4}$$

Unter der Annahme $s < p + q$ ist die gesuchte Größe $M(z_1, z_2)$ gleich einer der vier Wurzeln von $\Delta(p, q) = 0$ und es handelt sich darum, diese Wurzel zu bestimmen. Hierzu bemerken wir, daß $M(z_1, z_2)$ symmetrisch in z_1 und z_2 ist. Andererseits werden nach (3. 3), bei Vertauschung von z_1 und z_2 die Zahlen p und q ebenfalls miteinander vertauscht, während nach (3. 1) die Zahl s hierbei unverändert bleibt. Die Größe $M(z_1, z_2)$ ist demnach auch eine Wurzel von $\Delta(q, p) = 0$. Nun zeigt sich, daß die Gleichung

$$\frac{\Delta(q, p) - \Delta(p, q)}{4\,(p - q)\,s\,\eta} = 0 \tag{8. 5}$$

geschrieben werden kann

$$\eta^2 - 2\,s\,(p + q)\,\eta + ((s^2 - 1) + (p + q)^2) = 0, \tag{8. 6}$$

so daß $M(z_1, z_2)$ auch eine Wurzel dieser quadratischen Gleichung ist.

Und zwar ist $M(z_1, z_2)$ gleich der *kleineren* Wurzel der Gleichung (8. 6). Denn die andere Wurzel dieser Gleichung ist gleich der Ordinate η_1 der horizontalen Tangente, welche wir im § 6 betrachtet haben und deren Berührungs-

punkt eine Abszisse $\xi_1 > p$ besitzt[4]). Wäre nun $M(z_1, z_2) \geqq \eta_1$, so müßten Parallelen zur ξ-Achse vorhanden sein, welche die kubische Kurve in vier Punkten treffen, was eben nicht der Fall ist.

9. Setzen wir nun

$$t = p + q = \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 - z_2|}, \tag{9. 1}$$

so muß nach der obigen Überlegung

$$M(z_1, z_2) = ts - \sqrt{(t^2 - 1)(s^2 - 1)} \tag{9. 2}$$

sein.

Hierbei ist selbstverständlich immer $t \geqq 1$ und $s > 1$. Es gibt also zwei reelle, nicht negative Zahlen σ und τ, welche durch die Gleichungen

$$s = \cosh \sigma, \quad t = \cosh \tau \tag{9. 3}$$

eindeutig bestimmt sind. Daraus folgt weiter

$$\sinh \sigma = \sqrt{s^2 - 1}, \quad \sinh \tau = \sqrt{t^2 - 1},$$

und die Gleichung (9. 2) ist äquivalent mit der folgenden:

$$M(z_1, z_2) = \cosh(\tau - \sigma). \tag{9. 4}$$

Diese Formel gilt für $t > s$ oder, was dasselbe ist, für $\tau > \sigma$. Für $\tau \leqq \sigma$ dagegen muß $M(z_1, z_2) = 1$ genommen werden. Damit ist der in der Einleitung ausgesprochene Satz 1 bewiesen.

10. Nach dem Schwarzschen Lemma hat man für jede im Anfangspunkt verschwindende, unimodular beschränkte Funktion $f(z)$

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqq \frac{|f(z_1)| + |f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leqq \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 - z_2|} = t. \tag{10. 1}$$

Es muß also auch immer

$$M(z_1, z_2) \leqq t \tag{10. 2}$$

sein. Letzteres folgt auch sofort aus (9. 2); setzt man nämlich

$$M(z_1, z_2) = \cosh \varrho, \tag{10. 3}$$

so erhält man für $\tau \geqq \sigma$ nach (9. 4)

$$\tau = \varrho + \sigma \geqq \varrho \tag{10. 4}$$

und hieraus die Ungleichheit (10. 2).

---

[4]) Man beachte, daß $\Delta(p, q)$ gleich dem Produkte der linken Seite von (8. 6) mit der linken Seite der Gleichung $\eta^2 - 2s(p - q)\eta + \left((s^2 - 1) + (p - q)^2\right) = 0$ ist, und daß diese letztere Gleichung imaginäre Wurzeln besitzt. Hiermit ist unsere Behauptung, daß die kubische Kurve (5. 4) genau zwei reelle horizontale Tangenten besitzt, auch durch unsere Rechnung verifiziert.

11. Wenn man aus (9. 2) die Wurzel wegschafft, so erhält man die Gleichung

$$M^2 + t^2 + s^2 - 1 = 2Mst, \tag{11. 1}$$

welche symmetrisch in M, s und t ist. Wir betrachten irgend drei Zahlen M, s, t, welche (11. 1) befriedigen und außerdem den Bedingungen

$$M \geqq 1, \quad s \geqq 1, \quad t \geqq 1, \quad t \geqq s, \quad t \geqq M \tag{11. 2}$$

genügen.

Berücksichtigt man, daß $M \leqq t \leqq st$ ist, so erhält man aus (11. 1)

$$M = st - \sqrt{(s^2 - 1)(t^2 - 1)}, \tag{11. 3}$$

und ebenso schließt man, daß

$$s = Mt - \sqrt{(M^2 - 1)(t^2 - 1)} \tag{11. 4}$$

ist. Mit den Bezeichnungen (9. 3) und (10. 3) folgt aus (11. 3) die Gleichung $\varrho = \tau - \sigma$. Entwickelt man die Gleichung $\cosh \tau = \cosh(\varrho + \sigma)$, so findet man schließlich

$$t = Ms + \sqrt{(M^2 - 1)(s^2 - 1)}; \tag{11. 5}$$

es ist also auch immer

$$t \geqq Ms, \quad M \leqq \frac{t}{s}. \tag{11. 6}$$

Daraus folgt dann der

Satz 3. *Es ist immer*

$$M(z_1, z_2) \leqq \max\left(1, \frac{|z_1| + |z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}\right). \tag{11. 7}$$

Diese Abschätzung ist schärfer als die des § 10. Aus den Gleichungen (11. 3) bis (11. 5) folgern wir noch die Relation

$$(t^2 - 1)(t - Ms) = (st - M)(Mt - s), \tag{11. 8}$$

welche wir später benutzen werden.

12. Berechnung der Gestalt des Dreiecks $0 z_1 z_2$ mit Hilfe der Parameter s und t. Bei einer Drehung des Dreiecks mit den Ecken 0, z_1 und z_2 um den Ursprung $z = 0$, oder bei einer Spiegelung dieses Dreiecks an der Seite $0 z_1$, bleiben die Zahlen s und t unverändert. Es ist daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von vornherein z_1 und z_2 so beschränken, daß die Beziehungen

$$z_1 = h, \quad z_2 = h' e^{i\vartheta}, \quad 0 < h < 1, \quad 0 < h' < 1, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi \tag{12. 1}$$

gleichzeitig gelten.

Mit diesen Voraussetzungen hat man nach (3. 1) und (9. 1)

$$s\,e^{i\lambda} = \frac{1 - h\,h'\,e^{i\vartheta}}{h'\,e^{i\vartheta} - h}, \quad t = \frac{h + h'}{|h'\,e^{i\vartheta} - h|}. \tag{12.2}$$

Daraus berechnet man leicht

$$s^2 - 1 = \frac{(1 - h^2)(1 - h'^2)}{|h'\,e^{i\vartheta} - h|^2}; \tag{12.3}$$

nach der zweiten Gleichung (12. 2) ist also

$$(h + h')^2\,(s^2 - 1) = (1 - h^2)\,(1 - h'^2)\,t^2. \tag{12.4}$$

Aus der Identität

$$(1 - h^2)\,(1 - h'^2) = (1 + h\,h')^2 - (h + h')^2 \tag{12.5}$$

folgt dann weiter

$$(h + h')^2\,(t^2 + s^2 - 1) = (1 + h\,h')^2\,t^2,$$

und wenn man rechts und links die Wurzel zieht,

$$(h + h')\,\sqrt{t^2 + s^2 - 1} = (1 + h\,h')\,t. \tag{12.6}$$

Kennt man also h, t und s, so kann man h' *eindeutig* aus der Gleichung

$$h' = \frac{t - h\sqrt{t^2 + s^2 - 1}}{\sqrt{t^2 + s^2 - 1} - h\,t} \tag{12.7}$$

berechnen.

Auch die Länge der dritten Seite des Dreiecks kann ähnlich dargestellt werden. Aus (12. 7) entnimmt man hierzu die Relation

$$h + h' = \frac{(1 - h^2)\,t}{\sqrt{t^2 + s^2 - 1} - h\,t} \tag{12.8}$$

und die zweite Gleichung (12. 2) liefert dann die Beziehung

$$|h'\,e^{i\vartheta} - h| = \frac{1 - h^2}{\sqrt{t^2 + s^2 - 1} - h\,t}. \tag{12.9}$$

Aus der zweiten Gleichung (12. 2) erhält man ferner

$$\frac{(h + h')^2}{t^2} = h^2 - 2\,h\,h'\cos\vartheta + h'^2 = (h + h')^2 - 2\,h\,h'\,(1 + \cos\vartheta),$$

woraus folgt

$$(1 + \cos\vartheta) = \frac{(h + h')^2}{2\,h\,h'}\,\frac{t^2 - 1}{t^2}. \tag{12.10}$$

Mit Hilfe von (12. 7) und (12. 8) entnimmt man hieraus

$$1 + \cos\vartheta = \frac{(1 - h^2)^2\,(t^2 - 1)}{2\,h\,(t - h\sqrt{t^2 + s^2 - 1})\,(\sqrt{t^2 + s^2 - 1} - h\,t)}. \tag{12.11}$$

13. Das Diagramm in der $s\,t$-Ebene. Es handelt sich jetzt darum festzustellen, welche Werte von s und t wir in die Gleichungen (12. 7) und (12. 11) einzusetzen haben, wenn wir sicher sein wollen, daß der Punkt $h' e^{i\vartheta}$ im Inneren des Einheitskreises liegt.

Die in der ersten Gleichung (12. 2) definierten Parameter s und λ stellen eine Art von nichteuklidischen Polarkoordinaten mit dem Ursprung $z = h$ dar. Die obere Hälfte des Einheitskreises, genauer die Gesamtheit der Punkte, welche den Beziehungen

$$|z| \leqq 1, \quad \Im z \geqq 0 \tag{13. 1}$$

genügen, wird eineindeutig und analytisch auf die Punkte der $s\,\lambda$-Ebene abgebildet, welche den Bedingungen

$$s \geqq 1, \quad 0 \leqq \lambda \leqq \pi \tag{13. 2}$$

genügen. Nur der Punkt $z = h$, welcher dem Wert $s = \infty$ entspricht, ist bei dieser Abbildung ausgenommen.

Aus den Gleichungen (12. 2) erhält man jetzt nacheinander

$$h' e^{i\vartheta} = \frac{1 + h s e^{i\lambda}}{h + s e^{i\lambda}}, \qquad h' e^{i\vartheta} - h = \frac{1 - h^2}{h + s e^{i\lambda}}, \tag{13. 3}$$

$$t = \frac{h\sqrt{h^2 + 2hs\cos\lambda + s^2} + \sqrt{1 + 2hs\cos\lambda + h^2 s^2}}{1 - h^2}. \tag{13. 4}$$

Für konstante Werte von s ist mithin t eine monoton wachsende Funktion von $\cos\lambda$, also im Intervalle $0 \leqq \lambda \leqq \pi$ eine monoton abnehmende Funktion von λ.

Die Punktmenge (13. 1) wird also, mit Ausnahme des Punktes $z = h$ selbst, eineindeutig auf eine Punktmenge der $s t$-Ebene abgebildet, welche durch die Ungleichheiten

$$\begin{cases} s \geqq 1 \\ \dfrac{h(s-h) + |1 - hs|}{1 - h^2} \leqq t \leqq \dfrac{(1 + h^2) + 2hs}{1 - h^2} \end{cases} \tag{13. 5}$$

charakterisiert wird.

Das durch (13. 5) dargestellte Gebiet in der $s t$-Ebene kann folgendermaßen beschrieben werden (Fig. 1): Man betrachte den abgeschlossenen Parallelstreifen, der durch die Geraden

$$t = \frac{2hs}{1 - h^2} \pm \frac{1 + h^2}{1 - h^2} \tag{13. 6}$$

begrenzt wird. Dieser Parallelstreifen enthält für alle Werte von h zwischen Null und Eins den Punkt $s = t = 1$ in seinem Inneren. Hierauf entferne man aus dem besagten Parallelstreifen alle Punkte, für welche $s < 1$ ist, und alle Punkte, für welche $t < 1$ ist.

14. Man erhält auf diese Weise ein polygonales Gebiet, dessen innere Punkte eineindeutig und analytisch auf die inneren Punkte der Punktmenge (13. 1) abgebildet sind.

Die Punkte der Ränder der beiden Figuren sind folgendermaßen aufeinander bezogen: Der Mittelpunkt O des Einheitskreises $|z| < 1$ wird auf die Ecke O' des polygonalen Diagramms, welche die Koordinaten $s = \frac{1}{h}$, $t = 1$ besitzt, abgebildet. Der Teil OP des Durchmessers, welcher die Punkte $z = 0$ und $z = h$ miteinander verbindet, wird auf den unteren Rand $O'P'$ des Streifens (13. 6) abgebildet. Der obere Rand $P'A'$ desselben Streifens ist das

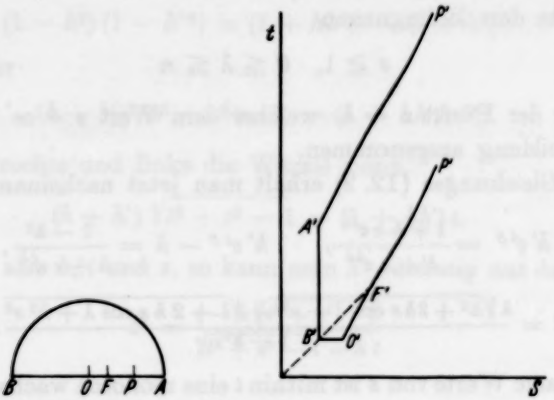

Fig. 1.

Bild der Strecke PA, welche die Punkte $z = h$ und $z = 1$ verbindet. Hierbei hat der Punkt A' die Koordinaten $s = 1, t = \frac{1+h}{1-h}$. Der Punkt $s = 1, t = 1$ entspricht dem Endpunkt $z = -1$ des reellen Durchmessers des Einheitskreises. Die vertikale Strecke, welche die Ecken A' und B' des polygonalen Diagramms verbindet, ist das Bild des Halbkreises $|z| = 1, \Im z > 0$, und endlich ist die horizontale Strecke $B'O'$ Bild des negativen Teiles des reellen Durchmessers.

Wenn man die rechtwinkligen Koordinaten x, y mit Hilfe der Gleichung

$$x + iy = h' e^{i\vartheta}$$

und der Gleichung (13. 3) als Funktionen der Parameter s und λ darstellt, so erhält man eine Abbildung, welche auf dem Rande des Einheitskreises und auf dem reellen Durchmesser $y = 0$ mit Ausnahme des Punktes $x = h$ regulär ist. Nach (13. 4) kann man, solange $\sin \lambda \neq 0$ ist, den Parameter λ als reguläre Funktion von s und t darstellen. Es folgt daraus, daß auch auf der Seite $A'B'$ unseres polygonalen Diagramms die Abbildung in der st-Ebene regulär ist.

Für die übrigen Punkte des Randes des Diagramms ist dies nicht mehr der Fall: jede Kurve in der st-Ebene, welche den Rand des Diagramms in einem derartigen Punkt schneidet, ohne ihn zu berühren, ist das Bild einer Kurve der z-Ebene, welche den Durchmesser *senkrecht* trifft. Wir werden diese Bemerkung wiederholt zu beachten haben.

15. Die Niveaulinien $M(h, z) = \text{const.}$ Durch Einsetzen der Werte (12. 2) von s und t in die Gleichung (11. 1) erhält man eine Gleichung in Polarkoordinaten für die Kurven

$$M(h, h' e^{i\vartheta}) = \text{const.} \tag{15. 1}$$

Diese Gleichung lautet:

$$[M^2(h^2 - 2hh' \cos\vartheta + h'^2) + (1 + hh')^2]^2 = 4M^2(h + h')^2(1 - 2hh' \cos\vartheta + h^2h'^2); \tag{15. 2}$$

sie zeigt, daß die Kurve (15. 1) algebraisch und von der achten Ordnung ist. Aber diese Gleichung ist sehr unübersichtlich und kann kaum für das Studium der Verteilung der Kurven (15. 1) innerhalb des Einheitskreises benutzt werden. Außerdem interessieren wir uns nicht für die ganze Kurve (15. 2), sondern nur für einen bestimmten Bogen dieser Kurve.

Lediglich für $M = 1$ werden die Formeln einfacher; hier kann man die Gleichung (11. 1) durch $s = t$ ersetzen, und man erhält an Stelle von (15. 2) die Gleichung

$$(1 - h^2)(1 - h'^2) = 2hh'(1 + \cos\vartheta). \tag{15. 3}$$

Diese stellt in Polarkoordinaten die bizirkulare Kurve vierter Ordnung dar, welche ich in meiner früheren Arbeit untersucht habe.

16. Viel vollständigere Resultate erhalten wir, fast ohne Rechnung, durch die Betrachtung des polygonalen Diagramms in der st-Ebene. Hier wird der Teil der Kurve, der uns interessiert, durch die Gleichung (11. 5) [oder durch die äquivalente Gleichung (11. 4)] gegeben. Diese stellt für $M > 1$ eine Schar von Hyperbelbögen dar, welche in ihrem Anfangspunkt die Gerade $s = 1$ berühren und von dort nach oben verlaufend den durch die Ungleichheiten

$$s > 1, \quad t > s \tag{16. 1}$$

bestimmten Winkel einfach überdecken. Diese Kurven genügen auch der Gleichung (11. 1), welche zeigt, daß alle diese Hyperbeln koaxial sind und die Achsen

$$s = t, \quad s = -t \tag{16. 2}$$

besitzen.

Es handelt sich jetzt darum, zu beurteilen, wie die Hyperbelbögen (11. 5) im Inneren unseres polygonalen Digramms verlaufen und wie sie den Rand des Diagramms treffen.

Hierzu bemerken wir, daß in jedem Punkt des Winkels (16. 1) die Tangente an den Hyperbelbogen, welcher durch diesen Punkt geht, die s-Achse in einem Punkt des Intervalls $0 < s < 1$ trifft. Die beiden Geraden (13. 6), welche einen Teil des Randes unseres polygonalen Diagramms bilden, schneiden aber die s-Achse *außerhalb* dieses Intervalls, nämlich in den Punkten $\pm \frac{1+h^2}{2h}$.

Unsere Hyperbelbögen können also den Rand des polygonalen Diagramms an der Stelle, wo sie das Innere dieses Diagramms verlassen, nie berühren, Auf dem Teile dieses Randes, welcher im Inneren des Winkels (16. 1) liegt. ist deshalb M eine monotone Funktion des Ortes. Daraus folgt weiter, daß die Hyperbelbögen, wenn sie einmal das polygonale Diagramm verlassen haben, nie mehr in das Innere desselben wieder eintreten können.

Schließlich erhalten wir folgendes Bild: Für jeden Wert von M zwischen 1 und $\frac{1+h}{1-h}$ gibt es ein einfach zusammenhängendes Stück einer Hyperbel, welches im Inneren des Diagramms verläuft. In seinem Anfangspunkt berührt dieses Kurvenstück aufsteigend die Gerade $s = 1$ im Punkte $t = M$ und das Innere des Diagramms oberhalb der Geraden $s = t$ wird einfach und lückenlos durch die Gesamtheit dieser Hyperbelbögen überdeckt.

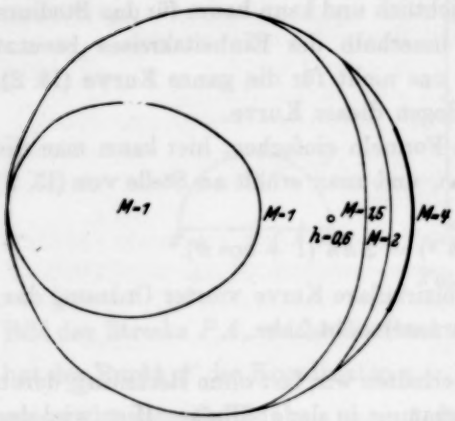

Fig. 2.
Die Niveaulinien stellen $M(h, z) = c$, für $h = 0{,}6$ und für $c = 1$, $c = 1{,}5$ und $c = 2$ dar. Die Punkte des Einheitskreises, für welche $3 \leqq M(h, z) < 4$ ist, liegen innerhalb der Verdickung des rechten Randes der Figur.

Für die z-Ebene ergibt sich nun folgendes: Durch jeden Punkt des Einheitskreises geht eine Kurve $M(h, z) = \text{const}$, welche den Einheitskreis in diesem Punkte berührt. Diese Kurven schneiden die reelle Achse senkrecht und sind symmetrisch bezüglich dieser Achse. Für $M = 1$ erhält man ein geschlossenes Oval, welches den Einheitskreis im Punkte $z = -1$ berührt. Die übrigen Kurven überdecken einfach und lückenlos das hornförmige Gebiet, welches zwischen diesem Oval und dem Kreise $|z| = 1$ eingeschlossen ist (s. Fig. 2).

17. Die Gestalt unserer Figur hängt wesentlich vom Wert der Steigung der beiden parallelen Geraden (13. 6) ab.

Für

$$\frac{2h}{1-h^2} < 1 \quad \text{oder} \quad h < \sqrt{2} - 1 \tag{17.1}$$

liegt der Schnittpunkt der Geraden $s = t$ mit dem Rande des Diagramms auf der Halbgeraden $A'P'$ und der Punkt P liegt im Inneren des Ovals, welches durch die Kurve $M(h, z) = 1$ berandet wird.

Ist zweitens $h = \sqrt{2} - 1$, so fällt die Gerade $s = t$ mit der Symmetrieachse des Streifens (13. 6) zusammen und der Punkt $z = h$ liegt auf dem Rande des besagten Ovals.

Ist endlich

$$\frac{2h}{1-h^2} > 1 \quad \text{oder} \quad h > \sqrt{2} - 1, \tag{17.2}$$

so trifft die Gerade $s = t$ den Rand des Diagramms in einem Punkt von $O'P'$, und der Punkt $z = h$ liegt innerhalb des hornförmigen Gebietes, in welchem unsere Kurven $M(h, z) = \text{const}$ verteilt sind. In diesem Punkte versagen zwar unsere bisherigen Formeln, aber es ist nicht schwer einzusehen, daß gar keine Singularität in der Verteilung dieser Kurven im Punkte $z = h$ vorhanden ist. Wir wollen aber diese Überlegungen dem Leser überlassen.

18. Auf dem Einheitskreise ist $s = 1$ und nach (11. 3) ist also hier $M = t$. Nach der zweiten Gleichung (12. 2), in welcher man $h' = 1$ zu setzen hat, und nach (12. 11) gelten also die Relationen

$$M = \frac{1+h}{\sqrt{1-2h\cos\vartheta + h^2}}, \quad 1 + \cos\vartheta = \frac{(1+h)^2(M^2-1)}{2hM^2}. \tag{18.1}$$

Auf der positiven reellen Achse hat man nach (12. 2)

$$s = \frac{1-hh'}{|h'-h|}, \quad t = \frac{h+h'}{|h'-h|}. \tag{18.2}$$

Diese Werte in (11. 3) eingesetzt, liefern die Gleichung

$$M = \frac{(1-hh')(h+h') - 2\sqrt{(1-h^2)(1-h'^2)hh'}}{(h'-h)^2} \tag{18.3}$$

Um eine Formel zu erhalten, welche auch für $h' = h$ brauchbar ist, schreiben wir an Stelle von (11. 3)

$$M = \frac{s^2 + t^2 - 1}{st + \sqrt{(t^2-1)(s^2-1)}} \tag{18.4}$$

und finden

$$M = \frac{(1+hh')^2}{(1-hh')(h+h') + 2\sqrt{(1-h^2)(1-h'^2)hh'}}. \tag{18.5}$$

Nach dem § 16 muß sich diese Gleichung nach h' auflösen lassen. Um dies ohne unnötige Rechnungen zu bewerkstelligen, bemerken wir, daß für $\cos\vartheta = 1$ die Gleichung (15. 2) geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{hh'}{M} + h + h' + \frac{1}{M}\right)^2 = 4\left(hh' + \frac{h}{M} + \frac{h'}{M}\right). \tag{18.6}$$

Diese Gleichung, *welche in* h, h' *und* $\frac{1}{M}$ *symmetrisch ist*, stellt in der Mh'-Ebene eine Kurve vierter Ordnung dar. Eine leichte Betrachtung zeigt, daß der Zweig dieser Kurve, welcher durch die Gleichung (18. 3) dargestellt wird, auch durch die Gleichung

$$h' = \frac{(M-h)(1+Mh)+2\sqrt{M(M^2-1)h(1-h^2)}}{(M+h)^2} \tag{18.7}$$

gegeben wird.

19. Die ersten Ableitungen von $M(h, re^{i\vartheta})$. Mit der Bezeichnung

$$u^2 = t^2 + s^2 - 1 \tag{19.1}$$

hat die Gleichung (11. 1) die Gestalt

$$M^2 + u^2 = 2Mst. \tag{19.2}$$

Durch Differentiation der beiden Gleichungen (19. 1) und (19. 2) erhält man

$$u\,du = t\,dt + s\,ds,$$
$$(st - M)\,dM = u\,du - M(s\,dt + t\,ds),$$

so daß man durch Elimination von ds auch schreiben kann

$$\begin{aligned} s(st-M)\,dM &= su\,du - M(s^2dt + tu\,du - t^2dt) \\ &= -(Mt-s)\,u\,du + M(t^2-s^2)\,dt. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man weiter

$$\begin{aligned} s(st-M)\,dM &= (Mt-s)\,u\,\frac{u\,dt - t\,du}{t} \\ &\quad - [(Mt-s)u^2 - Mt(t^2-s^2)]\,\frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{19.3}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} (Mt-s)u^2 - Mt(t^2-s^2) &= Mt(u^2-t^2) - s(u^2 - Mts) \\ &= Mt(s^2-1) - s(Mts - M^2) \\ &= -M(t - Ms); \end{aligned}$$

indem wir dies in (19. 3) einsetzen, erhalten wir die endgültige Formel

$$s(st-M)\,dM = (Mt-s)\,u\,\frac{u\,dt - t\,du}{t} + M(t - Ms)\,\frac{dt}{t}. \tag{19.4}$$

20. Durch Differentiation der Gleichung (12. 10) erhalten wir eine Relation zwischen den Differentialen $d\vartheta$, dh' und dt, welche wir in der Gestalt schreiben

$$-\frac{dt}{t} = \frac{(h'^2-h^2)(t^2-1)}{2h'(h'+h)^2}\,dh' + \frac{hh't^2}{(h'+h)^2}\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{20.1}$$

Mit Hilfe der Gleichung (19. 1) setzen wir an Stelle von (12. 7)

$$h' = \frac{t - hu}{u - ht}. \tag{20.2}$$

Daraus berechnen wir noch die Relation

$$u - h t = \frac{(1 - h^2) t}{h' + h}. \tag{20. 3}$$

Endlich differentiieren wir (20. 2) und erhalten

$$d h' = \frac{(1 - h^2)(u\,dt - t\,du)}{(u - h t)^2}; \tag{20. 4}$$

daraus folgt mit Hilfe von (20. 3)

$$\frac{u\,dt - t\,du}{t} = \frac{(1 - h^2) t}{(h' + h)^2}\, d h'. \tag{20. 5}$$

Die Gleichungen (19. 4), (20. 1) und (20. 5) erlauben die partiellen Ableitungen von $M(h, h' e^{i\vartheta})$ als Funktion von h' und ϑ bequem zu berechnen. Um die höheren Ableitungen zu erhalten, muß man freilich den erwähnten Relationen noch die folgende hinzufügen:

$$s\,ds = - u \frac{u\,dt - t\,du}{t} + (s^2 - 1) \frac{dt}{t}. \tag{20. 6}$$

21. Wir setzen nun zuerst $d h' = 0$. Dann folgt aus (20. 5) und (20. 1)

$$u\,dt - t\,du = 0, \qquad - \frac{dt}{t} = \frac{h h' t^2}{(h' + h)^2} \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Dies in (19. 4) eingesetzt, liefert die Gleichung

$$(h' + h)^2 s (s t - M) \frac{\partial M}{\partial \vartheta} = - M (t - M s) t^2 h h' \sin\vartheta. \tag{21. 1}$$

Aus dieser Gleichung schließt man leicht, daß für alle Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq 1$, welche in der oberen abgeschlossenen Halbebene liegen, immer

$$\frac{\partial M}{\partial \vartheta} \leqq 0 \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq \pi) \tag{21. 2}$$

ist. Diese Relation gilt nämlich sowohl im Inneren des Ovals, in welchem $M(h, z)$ konstant gleich Eins ist, als im Inneren des hornförmigen Gebietes, das zwischen diesem Oval und dem Rande des Einheitskreises liegt. Auf dem Kreise $|z| = 1$ hat man $s = 1$ und $M = t$ und die Gleichung (21. 1) scheint zu versagen. Wegen der Gleichungen (11. 3) und (11. 5) kann man aber stets setzen

$$\frac{t - M s}{s t - M} = \sqrt{\frac{M^2 - 1}{t^2 - 1}},$$

so daß für $|z| = 1$ die Gleichung (21. 1) in folgende übergeht

$$(1 + h)^2 \frac{\partial M}{\partial \vartheta} = - h M^3 \sin\vartheta. \qquad (h' = 1)$$

Diese letzte Gleichung hätte man auch durch Differentiation von (18. 1) erhalten können. Man beachte noch, daß für $t = s > 1$ und damit $M = 1$ die

Ableitung $\frac{\partial M}{\partial \vartheta} = 0$ ist. Daraus folgt, daß $\frac{\partial M}{\partial \vartheta}$ auf dem Rande unseres Ovals verschwindet und folglich *im ganzen abgeschlossenen Einheitskreis stetig ist.*

Auf jedem Kreise $|z| = h'$ wird das Maximum von $M(h, z)$ im Punkte $z = h'$ erreicht. Dieses Maximum ist gleich Eins, falls

$$h' \leqq \frac{1-h}{1+h}$$

ist, und sonst gleich der Zahl, welche durch die rechte Seite von (18. 3) oder (18. 5) dargestellt wird.

22. Jetzt setzen wir in (20. 1) das Differential $d\vartheta = 0$ und erhalten

$$-\frac{dt}{t} = \frac{(h'^2 - h^2)(t^2-1)}{2h'(h'+h)^2}\, dh'. \tag{22. 1}$$

Aus dieser Gleichung und aus (20. 5) erhalten wir mit Hilfe von (19. 4)

$$2s h'(h'+h)^2 (st - M)\frac{\partial M}{\partial h'} = 2u h'(1-h^2)t(Mt - s) - \\ - (h'^2 - h^2)(t^2-1) M(t - Ms). \tag{22. 2}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die rechte Seite dieser Gleichung immer positiv ist. Wir multiplizieren in dieser Absicht die beiden Seiten der Gleichung (22. 2) mit $\frac{u}{t}$ und erhalten, indem wir noch (11. 8) beachten,

$$2s h'(h'+h)^2 \frac{u(st-M)}{t(Mt-s)}\frac{\partial M}{\partial h'} = 2h'(1-h^2)u^2 - \\ - \frac{(h'^2-h^2)u}{t} M(st - M). \tag{22. 3}$$

Nun ist aber nach (20. 2)

$$(h'+h)u = (1+hh')t$$

und daher

$$\frac{(h'^2-h^2)u}{t} = (1+hh')(h'-h) \\ = h'(1-h^2) - h(1-h'^2).$$

Durch Einsetzen dieser Größe in die rechte Seite von (22. 3) erhält man

$$h'(1-h^2)(2u^2 + M^2 - Mst) + h(1-h'^2) M(st - M)$$

und dies liefert die endgültige Formel

$$2s h'(h'+h)^2 \frac{u(st-M)}{t(Mt-s)}\frac{\partial M}{\partial h'} = h'(1-h^2)(u^2 + Mst) + \\ + h(1-h'^2) M(st - M). \tag{22. 4}$$

Nach der letzten Formel ist also in der Tat

$$\frac{\partial M}{\partial h'} \geqq 0, \tag{22. 5}$$

und man beweist durch ähnliche Überlegungen wie im vorigen Paragraphen, daß die Ungleichheit (22. 5) für alle inneren Punkte des Einheitskreises gilt. Auf dem Rande des Einheitskreises ist $\frac{\partial M}{\partial h'} = +\infty$ außer für den Punkt $z = -1$, in welchem $\frac{\partial M}{\partial h'} = 0$ ist, und mit Ausnahme dieses einzigen Punktes ist $\frac{\partial M}{\partial h'}$ stetig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq 1$.

23. Die zuletzt bewiesenen Tatsachen in Verbindung mit den Resultaten des § 18 liefern die Sätze:

Satz 4. *Es seien h_1 und h_2 zwei beliebige reelle Zahlen zwischen Null und Eins; ferner seien z_1 und z_2 komplexe Zahlen, welche den Bedingungen*

$$|z_1| \leqq h_1, \quad |z_2| \leqq h_2 \tag{23. 1}$$

genügen. Ist dann $h_1 + h_2 \leqq 1 - h_1 h_2$, so hat man $M(z_1, z_2) = 1$. Ist aber $h_1 + h_2 > 1 - h_1 h_2$, so besteht die Ungleichheit:

$$M(z_1, z_2) \leqq \frac{(1 + h_1 h_2)^2}{(1 - h_1 h_2)(h_1 + h_2) + 2\sqrt{(1 - h_1^2)(1 - h_2^2)}\, h_1 h_2}. \tag{23. 2}$$

Hierbei wird das Gleichheitszeichen nur für $z_1 = h_1$ und $z_2 = h_2$ angenommen.

Satz 5. *Für jede reelle, positive Zahl $h < 1$ und für jede komplexe Zahl z, deren absoluter Betrag $|z| < 1$ ist, hat man, falls $|\arg z| = \vartheta$ $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi)$ gesetzt wird,*

$$M(h, z) \leqq \frac{1 + h}{\sqrt{1 - 2h\cos\vartheta + h^2}}. \tag{23. 3}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichheit ist eine monoton wachsende Funktion von h. Es gilt also auch die Ungleichheit

$$M(h, z) < \frac{2}{\sqrt{2(1 - \cos\vartheta)}} = \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}, \tag{23. 4}$$

durch welche der in der Einleitung ausgesprochene Satz 2 gesichert ist [5]).

24. Nach den Überlegungen des § 2 ist jede der betrachteten Funktionen $f(z)$, für welche bei gegebenen z_1, z_2 die Zahl

$$\left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right|$$

---

[5]) Diesen Satz kann man auch durch eine elementare Betrachtung aus (10. 2) und der zweiten Gleichung (12. 2) erhalten, wenn man beachtet, daß

$$h^2 - 2hh'\cos\vartheta + h'^2 = (h + h')^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} + (h - h')^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} \geqq (h + h')^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

ist. Freilich muß man durch eine besondere Überlegung noch zeigen, daß die Schranke 1: $\sin\frac{\vartheta}{2}$ nicht verkleinert werden kann.

ihren Maximalwert $M(z_1, z_2)$ annimmt, von der Gestalt

$$z\,\frac{k-z}{1-\bar{k}z} \qquad (|k|<1),$$

d. h. sie ist eine Einheitsfunktion zweiter Ordnung, welche den Einheitskreis $|z|<1$ auf eine zweiblättrige, längs des Randes des Einheitskreises ausgeschnittene, Riemannsche Fläche abbildet. Der Wert von k und der Verzweigungspunkt

$$\alpha = \frac{k^2}{(1+\sqrt{1-k\bar{k}})^2}$$

der Riemannschen Fläche können mit Hilfe unserer früheren Formeln aus z_1 und z_2 ermittelt werden.

Man beachte, daß die Zahl $M(z_1, z_2)$ ebenso wie auch die Zahlen k und α mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruierbar sind, wenn man die Punkte z_1 und z_2 vorgibt.

(Eingegangen am 12. Juni 1941.)

Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen.

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 490

§ 1. Herleitung der Fundamentalungleichung 491

§ 2. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Fundamentalungleichung . . 495

§ 3. Die Bestimmung derjenigen Werte der Parameter, bei welchen in der Fundamentalungleichung die Gleichheit erreicht wird. . . . 497

§ 4. Das Minimum der majorisierenden Funktion der Fundamentalungleichung 499

§ 5. Das Verhalten der Ableitungen der majorisierenden Funktion nach den Parametern an einer Stelle, wo das Minimum angenommen wird 501

§ 6. Beweis der Existenz und Unität der das Extremum erreichenden Extremalen 512

§ 7. Die lineare isoperimetrische Ungleichung 519

§ 8. Das Kriterium für das Auftreten der linearen isoperimetrischen Ungleichung 521

§ 9. Die lineare isoperimetrische Ungleichung in der Euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrie 527

§ 10. Das asymptotische Verhalten der das Extremum angebenden Funktion $G(L, a, b)$ 528

§ 11. Die Stetigkeit der Extremalfunktion $G(L, a, b)$ in ihren drei Argumenten 536

§ 12. Die Ableitungen der Extremalfunktion 538

§ 13. Die Ableitungen der Extremalfunktion in den Randpunkten der Klassen 547

§ 14. Die uneingeschränkte isoperimetrische Aufgabe 554

§ 15. Die bei festem a und b auftretenden Extremalentypen in ihrer Abhängigkeit von L 563

§ 16. Das Kriterium für den monotonen Charakter der Extremalfunktion als Funktion von a und b bei konstantem $\int_a^b \sigma(u)\,du$. . 578
§ 17. Die klassische isoperimetrische Aufgabe und die Gausssche Krümmung 592
§ 18. Die klassische isoperimetrische Aufgabe und die geodätische Krümmung 596
§ 19. Die klassische isoperimetrische Aufgabe auf Mannigfaltigkeiten konstanter Gaussscher Krümmung 605
§ 20. Abschätzung des isoperimetrischen Extremums auf Grund einer unteren Schranke der Gaussschen Krümmung 615
§ 21. Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationsringe in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie 619
§ 22. Die Konsequenzen der Identifizierung der Punkte u, v und u, $v + 2\pi$ 631

Einleitung.

Den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet die folgende Aufgabe: Der (u, v)-Ebene sei die Maßbestimmung

$$ds^2 = du^2 + g(u)^2\,dv^2$$

aufgeprägt, wobei $g(u)$ eine positive, zweimal differenzierbare Funktion bedeutet. Das zugehörige Flächenelement $g(u)\,du\,dv$ werde mit df bezeichnet.

Man betrachte die beiden Integrale

$$L = \int_C \sigma(u)\,ds, \quad J = \int_T \tau(u)\,df,$$

wobei $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ gegebene positive, zweimal differenzierbare Funktionen bedeuten, C eine einfache, geschlossene Kurve und T das von ihr umschlossene Gebiet[1]). Es soll nun bei gegebenem Werte von L die Kurve C so bestimmt werden, daß J zum Maximum wird. Für $\sigma(u) = \tau(u) = 1$ ist das das klassische isoperimetrische Problem. Wir sehen also, daß unsere Aufgabe das klassische isoperimetrische Problem in der Euklidischen und hyperbolischen Ebene, auf der Sphäre und überhaupt auf der Oberfläche eines dreidimensionalen Rotationskörpers als Spezialfälle umfaßt. Auch die isoperimetrische Aufgabe,

[1]) Durch die Substitution $u = \varphi(\tilde{u})$, $\varphi'(\tilde{u}) > 0$ läßt sich, wie aus den eingangs des § 16 angegebenen Formeln hervorgeht, eine beliebige der drei Funktionen $g(u)$, $\sigma(u)$, $\tau(u)$ auf 1 reduzieren. Es ist jedoch nicht vorteilhaft, sich von vornherein auf eine solche Reduktion festzulegen.

welche sich auf Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern, insbesondere auch von Rotationsringen im drei- und mehrdimensionalen Euklidischen hyperbolischen und sphärischen Raum bezieht, fällt in diesen Rahmen. In der hier entwickelten Theorie wird nun der gestellte, über alle diese Aufgaben weit hinausreichende Problemkreis einheitlich einer vollständigen Lösung im Großen zugeführt, welche selbst in den von mir in früheren Arbeiten[2]) behandelten einfachsten Spezialfällen die dort gewonnenen Ergebnisse überholt.

§ 1.

Herleitung der Fundamentalungleichung.

Der Ebene (u, v) sei die Maßbestimmung

$$ds^2 = du^2 + g(u)^2\, dv^2 \tag{1}$$

aufgeprägt. Dabei sei die Funktion $g(u)$ im Bereich

$$\alpha < u < \beta \tag{2}$$

definiert, wobei α auch $-\infty$ bedeuten kann und β auch $+\infty$. In jedem Punkt des Bereiches sei

$$g(u) > 0, \tag{3}$$

und seien die beiden ersten Ableitungen $g'(u)$ und $g''(u)$ bestimmt und endlich.

Es seien ferner im Bereiche (2) die Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ gegeben. In jedem Punkte des Bereiches seien

$$\sigma(u) > 0, \qquad \tau(u) > 0, \tag{4}$$

die ersten Ableitungen $\sigma'(u)$, $\tau'(u)$ stetig und die zweite Ableitung $\sigma''(u)$ bestimmt und endlich.

Man setze, wie schon in der Einleitung angegeben,

$$L = \int_C \sigma(u)\, ds, \tag{5}$$

$$J = \int_T \tau(u)\, df = \int_T \tau(u)\, g(u)\, du\, dv, \tag{6}$$

wobei C eine einfache geschlossene Kurve im Definitionsgebiet (2) bedeutet und T das von ihr umschlossene Gebiet.

Den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet nun die verallgemeinerte isoperimetrische Aufgabe, die Kurve C so zu bestimmen, daß bei gegebenem L J zum Maximum wird. Sind $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ identisch gleich Eins, so ist das die klassische isoperimetrische Aufgabe.

---

[2]) Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689–708; **46** (1940), S. 204–230 und S. 744–794.

Für den Kosinus der beiden Richtungen (du, dv) und $(\delta u, \delta v)$ ergibt die Maßbestimmung (1)

$$\cos(d, \delta) = \frac{du\,\delta u + g(u)^2\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}. \tag{7}$$

Es seien nun $u(s)$ und $v(s)$ die laufenden Koordinaten der einfachen geschlossenen Kurve C als Funktionen der in der Maßbestimmung (1) gemessenen Bogenlänge. Es wird vorausgesetzt, daß die Ableitungen $u'(s)$ und $v'(s)$ bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig sind.

Die Normalenrichtung wird natürlich als nach der Winkelmaßbestimmung (7) orthogonal zur Tangentialrichtung definiert. Der Durchlaufungssinn der Kurve C werde ein für allemal so festgesetzt, daß die äußere Normalenrichtung N zur Durchlaufungsrichtung so liegt wie die Richtung des wachsenden u zur Richtung des wachsenden v. Dann ergibt (7) für die Kosinusse der Durchlaufungsrichtung und der äußeren Normalenrichtung mit den Richtungen des wachsenden u und des wachsenden v

$$\begin{aligned} \cos(s,u) &= \frac{dv}{ds}, & \cos(s,v) &= g(u)\frac{du}{ds}, \\ \cos(N,v) &= -\frac{du}{ds}, & \cos(N,u) &= g(u)\frac{dv}{ds}. \end{aligned} \tag{8}$$

Durch die Greensche Umformung nimmt die Gleichung (6) die Gestalt an

$$J = \int_C \frac{\gamma(u) + \varkappa}{g(u)} \cos(N, u)\, ds, \tag{9}$$

wobei $\gamma(u)$ eine beliebige aber im folgenden durchweg festgehaltene Integralfunktion von $\tau(u)\,g(u)$ bezeichnet,

$$\frac{d\gamma(u)}{du} = \tau(u)\,g(u), \tag{10}$$

während $\varkappa$ die willkürliche Konstante angibt, deren Einführung sich später als notwendig erweisen wird.

Es bezeichne a das Minimum und b das Maximum von u auf C. Dann gilt zunächst

$$a < b, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\,du < L. \tag{11}$$

Die erste dieser beiden Ungleichungen folgt daraus, daß u auf einer einfachen geschlossenen Kurve nicht konstant sein kann. Um die zweite einzusehen, bezeichne man mit C' und C'' die beiden Bögen, in welche C durch ein Punktepaar zerlegt wird, wo u die Werte a und b annimmt. Dann hat man wegen

$$\left|\frac{du}{ds}\right| \leqq 1 \quad \text{und} \quad \sigma(u) > 0$$

gemäß (5)

$$L = \int_{C'} \sigma(u)\,ds + \int_{C''} \sigma(u)\,ds \geqq \int_{C'} \sigma(u) \left|\frac{du}{ds}\right| ds + \int_{C''} \sigma(u) \left|\frac{du}{ds}\right| ds \geqq$$

$$\geqq \left| \int_{C'} \sigma(u) \frac{du}{ds}\,ds \right| + \left| \int_{C''} \sigma(u) \frac{du}{ds}\,ds \right| = 2 \int_a^b \sigma(u)\,du.$$

Nun können die beiden äußersten Glieder dieser Kette von Ungleichungen nicht einander gleich sein. Denn dann müßte sowohl auf C' als auch auf C''

$$\left|\frac{du}{ds}\right| = 1$$

bleiben und mithin $\frac{dv}{ds}$ auf der ganzen Kurve C identisch verschwinden, was auf einer einfachen, geschlossenen Kurve unmöglich ist.

Man setze

$$\psi(u, \varkappa) = \frac{\gamma(u) + \varkappa}{\sigma(u)\, g(u)}, \tag{12}$$

$$m(a, b, \varkappa) = \max_{a \leqq u \leqq b} |\psi(u, \varkappa)|. \tag{13}$$

Dann ist, da $\sigma(u)$ und $g(u)$ voraussetzungsgemäß nicht verschwinden, $\psi(u, \varkappa)$ eine stetige Funktion von u und $\varkappa$ und $m(a, b, \varkappa)$ eine stetige Funktion von a, b und $\varkappa$. Ferner ist

$$m(a, b, \varkappa) > 0. \tag{14}$$

Denn verschwände $m(a, b, \varkappa)$, so müßte auch $\gamma(u) + \varkappa$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ identisch verschwinden und mithin wegen (10) auch $\tau(u)\, g(u)$ — im Widerspruch zu den Voraussetzungen (3), (4).

Jetzt führe man einen Parameter q ein, der lediglich der Beschränkung

$$q \geqq m(a, b, \varkappa) \tag{15}$$

unterworfen sei.

Nun ist das innere Produkt des Vektors, dessen erste Komponente $\psi(u, \varkappa)$ ist, dessen zweite Komponente die hier wie im folgenden durchweg mit dem positiven Vorzeichen zu versehende Quadratwurzel

$$\sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}$$

ist, und dessen Länge also gleich q ist, mit dem Einheitsvektor, dessen Komponenten

$$\cos(N, u) \quad \text{und} \quad |\cos(N, v)| = \left|\frac{du}{ds}\right|$$

sind, nicht größer als das Produkt der Längen der beiden Vektoren, d. h. es ist auf der Kurve C

$$\psi(u, \varkappa) \cos(N, u) + \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2} \left|\frac{du}{ds}\right| \leqq q.$$

Hieraus folgt, da $\sigma(u)$ voraussetzungsgemäß positiv ist,

$$\frac{\gamma(u)+\varkappa}{g(u)}\cos(N,u) = \sigma(u)\,\psi(u,\varkappa)\cos(N,u) \leqq \tag{16}$$

$$\leqq q\,\sigma(u) - \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei dann und nur dann, wenn

$$\psi(u,\varkappa) = q\cos(N,u) \tag{17}$$

und mithin

$$\sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2} = q\,|\cos(N,v)| = q\left|\frac{du}{ds}\right| \tag{18}$$

ist. Die Einführung von (16) in (9) ergibt bei Heranziehung von (5)

$$J \leqq qL - \int_C \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds. \tag{19}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn (17) auf C identisch erfüllt ist.

Die Extremalwerte a und b können natürlich auf C unbeschränkt oft angenommen werden. Es sei P^* ein Punkt, in welchem $u = a$ ist. Man durchlaufe C von P^* aus in dem oben festgesetzten Durchlaufungssinn. Dann sei P_1 der erste Punkt, in welchem $u = b$ wird, und auf dem Wege von P^* nach P_1 P_0 der letzte Punkt, in welchem $u = a$ ist. Weiter sei P_3 der erste auf P_1 folgende Punkt, in welchem wieder $u = a$ wird, und auf dem Wege von P_1 nach P_3 P_2 der letzte Punkt, in welchem $u = b$ ist. Mißt man jetzt die Bogenlänge s auf C von P_0 ab und bezeichnet mit s_1, s_2, s_3 die Bogenlängen in P_1, P_2, P_3, so wird

$$u(0) = a, \quad u(s_1) = b, \quad u(s_2) = b, \quad u(s_3) = a, \tag{20}$$

und es ist für

$$0 < s < s_1 \quad \text{und} \quad s_2 < s < s_3 \qquad a < u(s) < b. \tag{21}$$

Jetzt erhält man

$$\int_a^b \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\,du = \int_0^{s_1} \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\frac{du}{ds}\,ds \leqq$$

$$\leqq \int_0^{s_1} \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds,$$

$$\int_a^b \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\,du = \int_{s_3}^{s_2} \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\frac{du}{ds}\,ds \leqq$$

$$\leqq \int_{s_2}^{s_3} \sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds.$$

Die Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt

$$(22)\qquad 2\int_a^b \sqrt{q^2-\psi(u,x)^2}\,\sigma(u)\,du \leqq \int_C \sqrt{q^2-\psi(u,x)^2}\,\sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei dann und nur dann, wenn u als Funktion von s folgendermaßen verläuft:

$$(23)\qquad \begin{cases} \text{für } 0<s<s_1 \quad \dfrac{du}{ds}\geqq 0 & \text{und mithin wegen (8) } \operatorname{ccs}(N,v)\leqq 0, \\ & \text{ferner wegen (21) } a<u<b, \\ \text{für } s_2<s<s_3 \quad \dfrac{du}{ds}\leqq 0 & \text{und mithin } \cos(N,v)\geqq 0,\ a<u<b, \end{cases}$$

$$(24)\qquad \text{für } s_1<s<s_2 \text{ und } s_3<s<l \quad \sqrt{q^2-\psi(u,x)^2}\left|\frac{du}{ds}\right| = 0,$$

wobei l die in unserer Maßbestimmung gemessene Länge der Kurve bedeutet.

Die Einführung von (22) in (19) ergibt jetzt die isoperimetrische *Fundamentalungleichung*

$$(25)\qquad \boxed{J \leqq qL - 2\int_a^b \sqrt{q^2-\psi(u,x)^2}\,\sigma(u)\,du.}$$

§ 2.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Fundamentalungleichung.

In der Fundamentalungleichung gilt, wie oben gezeigt, das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn § 1 (17), (23), (24) erfüllt sind. Ist das der Fall, so folgt aus (17) zunächst § 1 (18) und aus (18) und (24) das identische Verschwinden von $\frac{du}{ds}$ in den Intervallen $s_1<s<s_2$ und $s_3<s<l$, sofern diese nicht leer sind. Mithin muß, sofern sie nicht leer sind, im ersten der beiden Intervalle u konstant gleich b und im zweiten u konstant gleich a sein. Da ferner C in den Streifen $a\leqq u\leqq b$ eingeschrieben ist, so muß im ersten der beiden Intervalle $\cos(N,u)$ konstant gleich 1 und im zweiten konstant gleich -1 sein. Es muß also gelten:

(1) für $s_1<s_2$ und $s_1<s<s_2$ $\quad u=b,\ \cos(N,u)=1,$

(2) für $s_3<l$ und $s_3<s<l$ $\quad u=a,\ \cos(N,u)=-1.$

Gemäß (1) und § 1 (17) folgt aus

$$(3)\qquad \begin{matrix} s_1<s_2 \\ q=\psi(b,x). \end{matrix}$$

Wegen § 1 (13) und (15) zieht diese Gleichung noch die beiden Gleichungen

$$m(a, b, \varkappa) = \psi(b, \varkappa), \quad q = m(a, b, \varkappa) \tag{4}$$

unmittelbar nach sich. Ferner folgt, daß, wenn (3) nicht gilt, $s_1 = s_2$ sein muß.

Ebenso folgt gemäß (2) und § 1 (17) aus

$$s_3 < l$$

$$q = -\psi(a, \varkappa), \tag{5}$$

aus welcher Gleichung wegen § 1 (13) und (15)

$$m(a, b, \varkappa) = -\psi(a, \varkappa), \quad q = m(a, b, \varkappa) \tag{6}$$

sich ergibt. Ferner folgt, daß, wenn (5) nicht gilt, $s_3 = l$ sein muß.

Sind andererseits, wenn $s_1 < s_2$ ist, (4) und (1) erfüllt, und, wenn $s_3 < l$ ist, (6) und (2), so gelten in diesen Intervallen auch § 1 (17) und (24). Man kann also das Ergebnis der Diskussion in folgendem Satz zusammenfassen [3]):

Satz I. *Für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Fundamentalungleichung ist notwendig und hinreichend, daß in den Intervallen* $0 < s < s_1$ *und* $s_2 < s < s_3$ *die Relationen* § 1 (17) *und* (23) *gelten, und in den Intervallen* $s_1 < s < s_2$ *und* $s_3 < s < l$, *sofern sie nicht leer sind, die Relationen* § 1 (17) *und* (24). *Soweit diese Bedingungen die letzten beiden Intervalle betreffen, können sie durch die gleichbedeutende Forderung ersetzt werden, daß, wenn* $s_1 < s_2$ *ist,* (4) *und* (1) *gelten, und, wenn* $s_3 < l$ *ist,* (6) *und* (2).

Diese letzte Forderung kann, wie aus § 1 (17) unmittelbar hervorgeht, noch folgendermaßen anschaulich gedeutet werden: *Wenn* $s_1 < s_2$ *ist, so müssen die beiden der Kurve C angehörenden Bögen* $0 \leqq s \leqq s_1$ *und* $s_2 \leqq s \leqq s_3$ *die Kurve* $u = b$ *an den Stellen* s_1 *und* s_2 *berühren, und der Bogen* $s_1 \leqq s \leqq s_2$ *besteht aus einem Stück der Kurve* $u = b$. *Ebenso müssen, wenn* $s_3 < l$ *ist, die beiden Bögen* $0 \leqq s \leqq s_1$ *und* $s_2 \leqq s \leqq s_3$ *die Kurve* $u = a$ *an den Stellen* $s = 0$ *und* $s = s_3$ *berühren, und der Bogen* $s_3 \leqq s \leqq l$ *besteht aus einem Stück der Kurve* $u = a$.

---

[3]) Beim klassischen isoperimetrischen Problem ist, wie im § 18 näher ausgeführt werden wird, die Gleichung § 1 (17) gleichbedeutend damit, daß die geodätische Krümmung der Kurve konstant ist — nämlich bei nicht konstantem u gleich $\frac{1}{q}$. Das Wesentliche dieser Aussage ist in dem bekannten, von MINDING herrührenden Satz der allgemeinen Flächentheorie enthalten, laut welchem die Extremalen des klassischen isoperimetrischen Problems konstante geodätische Krümmung besitzen müssen. Auf diesem Wege hat MINDING dann auch bewiesen, daß die Gleichung (17) für die Lösungskurven des klassischen isoperimetrischen Problems auf Rotationsflächen eine notwendige Bedingung darstellt.

MINDING, „Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings bei gegebenem Flächeninhalt auf krummen Flächen". Crelles Journal 86 (1878), S. 279.

Eine einfache, geschlossene Kurve, welche den im obigen Satz formulierten Bedingungen gemäß verläuft, wobei a das Minimum und b das Maximum von u auf der Kurve bedeuten, soll im folgenden als eine zu den betreffenden Werten von $\varkappa$ und q gehörende *Extremale* bezeichnet werden. *Die Bezeichnung „Extremale" wird also in der Folge in sich schließen, daß es sich um eine einfache, geschlossene Kurve handelt.*

Der Satz I kann dann auch so ausgesprochen werden:

Satz I'. *Für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Fundamentalungleichung ist notwendig und hinreichend, daß die Kurve eine zu den betreffenden Werten von $\varkappa$ und q gehörende, in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschriebene Extremale ist.*

§ 3.

Die Bestimmung derjenigen Werte der Parameter, bei welchen in der Fundamentalungleichung die Gleichheit erreicht wird.

Man setze

$$(1) \qquad \Gamma(L, a, b, \varkappa, q) = qL - 2\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}\,\sigma(u)\,du.$$

Bei festgehaltenen Werten von a und b setze man ferner zur Abkürzung

$$(2) \qquad \Gamma(L, \varkappa, q) = \Gamma(L, a, b, \varkappa, q), \quad m(\varkappa) = m(a, b, \varkappa).$$

Die Fundamentalungleichung lautet dann

$$(3) \qquad J \leqq \Gamma(L, \varkappa, q) = \Gamma(L, a, b, \varkappa, q).$$

Es sei nun C_1 eine in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschriebene, zu den Werten $\varkappa_1$, q_1 gehörende Extremale. Dann kann sie nicht noch zu einem anderen Wertepaar $\varkappa_2$, q_2 als Extremale gehören. Denn man hätte dann gemäß § 1 (12) und (17) längs C_1

$$\frac{\gamma(u) + \varkappa_1}{\sigma(u)\,g(u)} = q_1 \cos(N, u), \qquad \frac{\gamma(u) + \varkappa_2}{\sigma(u)\,g(u)} = q_2 \cos(N, u)$$

und mithin

$$(q_2 - q_1)\,\gamma(u) + q_2\varkappa_1 - q_1\varkappa_2 = 0.$$

Die Differentiation ergibt wegen § 1 (10)

$$(q_2 - q_1)\,\tau(u)\,g(u) = 0,$$

also, da $\tau(u)$ und $g(u)$ voraussetzungsgemäß nicht verschwinden,

$$q_2 = q_1 \text{ und mithin auch } \varkappa_2 = \varkappa_1.$$

Fällt also das Wertepaar $\varkappa, q$ nicht mit dem Wertepaar $\varkappa_1, q_1$ zusammen, so gilt gemäß Satz I'

$$J_1 < \Gamma(L_1, \varkappa, q), \tag{4}$$

wobei L_1 und J_1 die Werte unserer Integrale § 1 (5) und (6) für die Kurve C_1 bedeuten. Andererseits gilt ebenfalls gemäß Satz I'

$$J_1 = \Gamma(L_1, \varkappa_1, q_1). \tag{5}$$

Es ist somit für alle dem Definitionsgebiet

$$q \geqq m(\varkappa) \tag{6}$$

der Funktion $\Gamma(L_1, \varkappa, q)$ angehörenden Wertepaare $\varkappa, q$, welche nicht mit dem Wertepaar $\varkappa_1, q_1$ zusammenfallen,

$$\Gamma(L_1, \varkappa_1, q_1) < \Gamma(L_1, \varkappa, q). \tag{7}$$

Indem wir für L_1 wieder L schreiben, ist damit der folgende Satz bewiesen:

Satz II. *Es seien der Wert L unseres Integrals* § 1 (5) *und im Definitionsbereich* § 1 (2) *a und b dergestalt vorgeschrieben, daß entsprechend den Ungleichungen* § 1 (11)

$$a < b, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\, du < L \tag{8}$$

ist. Wenn es dann eine in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschriebene einfache geschlossene Kurve mit dem vorgegebenen Werte L unseres Integrals § 1 (5) *gibt, welche in der Fundamentalungleichung für $\varkappa = \varkappa_1, q = q_1$ die Gleichheit erreicht, oder, was gemäß Satz I' gleichbedeutend ist, wenn es eine in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschriebene zu den Werten $\varkappa_1, q_1$ gehörende Extremale mit dem vorgeschriebenen Werte L unseres Integrals* § 1 (5) *gibt, so nimmt $\Gamma(L, \varkappa, q)$ bei festem L als Funktion von $\varkappa$ und q an der Stelle $\varkappa_1, q_1$ und nur an dieser Stelle das absolute Minimum an. Dabei ist der Definitionsbereich dieser Funktion nur durch die Ungleichung $q \geqq m(\varkappa)$ begrenzt,*

An den Satz II schließt sich der folgende Hauptsatz:

Satz III. *Es seien das Wertepaar a, b, $a < b$, des Bereiches* § 1 (2) *und L gegeben, und es sei entsprechend* § 1 (11)

$$L > 2\int_a^b \sigma(u)\, du. \tag{9}$$

Dann gelten die folgenden drei Aussagen:

Aussage 1. *Es gibt eine Stelle $\varkappa_1, q_1$, an welcher $\Gamma(L, \varkappa, q)$ bei festem L als Funktion von $\varkappa$ und q das absolute Minimum annimmt.*

Aussage 2. *Das Minimum von $\Gamma(L, \varkappa, q)$ kann nur an einer einzigen Stelle angenommen werden; $\varkappa_1$ und q_1 sind also durch a, b und L eindeutig bestimmt.*

Aussage 3. *Setzt man in der Fundamentalungleichung* $\varkappa = \varkappa_1$, $q = q_1$, *so ist die so spezialisierte isoperimetrische Ungleichung genau, und zwar wird die Gleichheit von einer und nur einer in den Streifen* $a \leqq u \leqq b$ *eingeschriebenen, einfachen, geschlossenen Kurve mit dem Werte* L *unseres Integrales* § 1 (5) *erreicht. Diese Kurve ist daher die einzige, welche beim gegebenen Werte* L *unseres Integrales* § 1 (5) *das Maximum des Integrales* § 1 (6) *erreicht.* Dabei wird die Klasse von Kurven, welche durch die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse auseinander hervorgehen, als eine einzige Kurve gezählt.

Ehe wir an den Beweis dieses Hauptsatzes, der in den §§ 4, 5, 6 geführt werden wird, herantreten, treffen wir noch einige Feststellungen.

Da gemäß den Aussagen 1 und 2 für jedes von $\varkappa_1, q_1$ verschiedene Wertepaar $\varkappa, q$ $\Gamma(L, \varkappa_1, q_1)$ von $\Gamma(L, \varkappa, q)$ überschritten wird, so ergibt sich der folgende Zusatz.

Zusatz 1 zu Satz III. *Die durch die Fundamentalungleichung gegebene isoperimetrische Schranke ist nur für* $\varkappa = \varkappa_1$, $q = q_1$ *genau.*

Dieser Aussage kann zusammen mit der Aussage 3 des Hauptsatzes III vermöge der Sätze I und I′ noch die folgende Gestalt gegeben werden:

Zusatz 2 zu Satz III. *Zu keinem von* $\varkappa_1, q_1$ *verschiedenen Wertepaar* $\varkappa, q$ *gehört eine in den Streifen* $a \leqq u \leqq b$ *eingeschriebene Extremale mit dem Werte* L *des Integrales* § 1 (5), *während zu* $\varkappa_1, q_1$ *eine und nur eine gehört.*

Wie im nächsten Paragraphen bewiesen werden wird, gilt endlich der

Zusatz 3 zu Satz III. Die Ungleichung (9) bildet für die Existenz eines Minimums von $\Gamma(L, \varkappa, q)$ als Funktion von $\varkappa$ und q eine notwendige Voraussetzung.

§ 4.

Das Minimum der majorisierenden Funktion der Fundamentalungleichung.

Gemäß § 3 (1), (2) hat man

$$(1)\qquad \Gamma(L,\varkappa,q) = \Big(L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du\Big)q + 2\int_a^b \big(q - \sqrt{q^2 - \psi(u,\varkappa)^2}\big)\,\sigma(u)\,du$$

$$= \Big(L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du\Big)q + 2\int_a^b \frac{\psi(u,\varkappa)^2\,\sigma(u)\,du}{q + \sqrt{q^2 - \psi(u,\varkappa)^2}}.$$

Da der zweite Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung mit wachsendem q abnimmt, so müßte, wenn der Faktor von q im ersten Summanden nicht positiv ist, $\Gamma(L, \varkappa, q)$ mit wachsendem q ebenfalls abnehmen und könnte daher im Definitionsbereich $q \geqq m(\varkappa)$ nirgends ein Minimum erreichen. Damit ist der Zusatz 3 bewiesen.

Nun ist gemäß den Gleichungen § 1 (12), (13), durch welche $m(a, b, \varkappa) = m(\varkappa)$ definiert wird,

$$m(\varkappa) \geqq \left|\frac{\gamma(a) + \varkappa}{\sigma(a)\, g(a)}\right| \geqq \frac{|\varkappa|}{\sigma(a)\, g(a)} - \frac{|\gamma(a)|}{\sigma(a)\, g(a)}$$

und mithin auch

$$q \geqq \frac{|\varkappa|}{\sigma(a)\, g(a)} - \frac{|\gamma(a)|}{\sigma(a)\, g(a)}.$$

Führt man diese Abschätzung in die Gleichung (1) ein und berücksichtigt, daß voraussetzungsgemäß

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du > 0$$

ist, so erhält man

$$\Gamma(L, \varkappa, q) \geqq \left(L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du\right)\left(\frac{|\varkappa|}{\sigma(a)\, g(a)} - \frac{|\gamma(a)|}{\sigma(a)\, g(a)}\right).$$

Auf Grund der letzten Ungleichung kann eine positive Konstante K so groß gewählt werden, daß für

$$|\varkappa| \geqq K$$

unabhängig von q

(2) $$\Gamma(L, \varkappa, q) \geqq \Gamma(L, 0, q_0) + 1$$

bleibt, wobei

$$q_0 = m(0)$$

gesetzt ist. Ebenso kann unmittelbar auf Grund von (1) eine positive Konstante Q so groß gewählt werden, daß für

$$q \geqq Q$$

unabhängig von $\varkappa$

(3) $$\Gamma(L, \varkappa, q) \geqq \Gamma(L, 0, q_0) + 1$$

bleibt. Q sei ferner so groß gewählt, daß $Q > q_0$ ist.

Nun nimmt in dem durch die Ungleichungen

$$|\varkappa| \leqq K, \quad q \leqq Q, \quad q \leqq m(\varkappa)$$

abgegrenzten beschränkten und wegen der Stetigkeit von $m(\varkappa)$ abgeschlossenen Bereich die stetige Funktion $\Gamma(L, \varkappa, q)$ bei festem L an mindestens einer Stelle $\varkappa_1, q_1$ ihr Minimum an. Da nun der Punkt $\varkappa = 0$, $q = q_0 = m(0)$ wegen der Voraussetzung $q_0 < Q$ dem Bereiche angehört, so ist

$$\Gamma(L, \varkappa_1, q_1) \leqq \Gamma(L, 0, q_0).$$

Die Zusammenstellung der letzten Ungleichung mit den Ungleichungen (2), (3) ergibt, daß für alle Punkte des Definitionsbereiches $q \geqq m(\varkappa)$

(4) $$\Gamma(L, \varkappa_1, q_1) \leqq \Gamma(L, \varkappa, q)$$

ist, w. z. b. w.

§ 5.

Das Verhalten der Ableitungen der majorisierenden Funktion nach den Parametern an einer Stelle, wo das Minimum angenommen wird.

Ist $q > m(\varkappa)$, so ist $\varkappa, q$ ein innerer Punkt des Definitionsbereiches $q \geqq m(\varkappa)$, und man erhält für die Ableitungen von $\Gamma(L, \varkappa, q)$ nach q und $\varkappa$

$$\Gamma_q(L, \varkappa, q) = L - 2S(\varkappa, q), \quad \Gamma_\varkappa(L, \varkappa, q) = 2V(\varkappa, q). \tag{1}$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$S(\varkappa, q) = S(a, b, \varkappa, q), \quad V(\varkappa, q) = V(a, b, \varkappa, q) \tag{2}$$

gesetzt, und die Funktionen $S(a, b, \varkappa, q)$, $V(a, b, \varkappa, q)$ sind definiert durch die Integrale

$$S(a, b, \varkappa, q) = \int_a^b \frac{q\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}}, \qquad V(a, b, \varkappa, q) = \int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa)\,du}{g(u)\sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}}. \tag{3}$$

Es sei nun $\varkappa_1, q_1$ eine Stelle, an welcher die Funktion $\Gamma(L, \varkappa, q)$ ihr Minimum annimmt.

Man betrachte zunächst den Fall

$$\text{(A)} \quad q_1 > m(\varkappa_1). \tag{4}$$

Dann liegt der Punkt $\varkappa_1, q_1$ im Innern des Definitionsbereichs $q \geqq m(\varkappa)$, *und es gilt daher wegen* (1)

$$2S(\varkappa_1, q_1) = L, \tag{5}$$

$$V(\varkappa_1, q_1) = 0. \tag{5'}$$

Jetzt betrachte man den Fall

$$\text{(B)} \quad q_1 = m(\varkappa_1). \tag{6}$$

Dann liegt der Punkt $\varkappa_1, q_1$ auf dem Rande des Definitionsbereichs $q \geqq m(\varkappa)$, und die Gleichungen (5), (5') brauchen daher nicht zu gelten.

Zunächst erkennt man, daß

$$\psi(b, \varkappa_1) \geqq 0 \tag{7}$$

sein muß. Wäre nämlich

$$\psi(b, \varkappa_1) = -\vartheta, \quad \vartheta > 0,$$

so hätte man entsprechend der Definitionsgleichung § 1 (12) der Funktion $\psi(u, \varkappa)$

$$\gamma(b) + \varkappa_1 = -\vartheta\,\sigma(b)\,g(b)$$

und mithin auch, da $\gamma(u)$ mit u wächst,

$$\text{für } a \leqq u \leqq b \quad \gamma(u) + \varkappa_1 \leqq -\vartheta\,\sigma(b)\,g(b).$$

Daher wäre

$$\text{für } \varkappa_1 < \varkappa \leqq \varkappa_1 + \vartheta\sigma(b)g(b) \qquad |\gamma(u) + \varkappa| < |\gamma(u) + \varkappa_1|$$

und mithin auch

$$|\psi(u, \varkappa)| < |\psi(u, \varkappa_1)|.$$

Hieraus würde folgen

$$m(\varkappa) < m(\varkappa_1), \tag{8}$$

$$\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa)^2} > \sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}. \tag{9}$$

Nun wäre wegen (6) und (8) $q_1 > m(\varkappa)$, d. h. auch der Punkt $\varkappa, q_1$ läge im Definitionsbereich $q \geqq m(\varkappa)$ der Funktion $\Gamma(L, \varkappa, q)$. Jetzt aber ließe sich aus den Definitionsgleichungen § 3 (1), (2) der Funktion $\Gamma(L, \varkappa, q)$ in Verbindung mit (9) unmittelbar ablesen, daß diese Funktion an der Stelle $\varkappa, q_1$ kleiner wird als an der Stelle $\varkappa_1, q_1$ — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß sie an letzterer Stelle ihr Minimum annimmt.

Ebenso beweist man die Ungleichung

$$\psi(a, \varkappa_1) \leqq 0. \text{ [4]} \tag{10}$$

Ferner ist in dem betrachteten durch die Gleichung $q = m(\varkappa_1)$ gekennzeichneten Falle (B)

$$\text{für } a < u < b \qquad |\psi(u, \varkappa_1)| < m(\varkappa_1), \tag{11}$$

d. h. also, der absolute Betrag der Funktion $\psi(u, \varkappa_1)$ kann sein Maximum $m(\varkappa_1)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ nur an den Endpunkten a und b annehmen. Träfe nämlich die Behauptung nicht zu, so müßte die Funktion

$$\varphi(u) = \psi(u, \varkappa_1)^2$$

ihr Maximum an mindestens einer Stelle u^*, $a < u^* < b$ annehmen. Da nun gemäß den über Differenzierbarkeit von $g(u)$, $\sigma(u)$, $\tau(u)$ gemachten Voraussetzungen $\varphi(u)$ zweimal differenzierbar ist, so hätte man

$$\varphi(u^*) = m(\varkappa_1)^2, \quad \varphi'(u^*) = 0, \quad \varphi''(u^*) \leqq 0.$$

Es ließe sich mithin u_1, $u^* < u_1 < b$, so nahe an u^* wählen, daß für $u^* < u \leqq u_1$

$$\frac{\varphi'(u)}{u - u^*} = \frac{\varphi'(u) - \varphi'(u^*)}{u - u^*} \geqq \varphi''(u^*) - 1$$

und mithin

$$-\varphi'(u) \leqq (1 - \varphi''(u^*))(u - u^*)$$

ist. Gemäß dem ersten Mittelwertsatz hätte man ferner

$$0 \leqq m(\varkappa_1)^2 - \varphi(u) = -(\varphi(u) - \varphi(u^*)) = -\varphi'(u')(u - u^*), \quad u^* < u' < u.$$

---

[4] Wie im Satz VII § 6 festgestellt werden wird, ist in (7) und (10) auch das Gleichheitszeichen ausgeschlossen.

Aus den letzten beiden Relationen würde folgen

$$0 \leqq m(x_1)^2 - \varphi(u) \leqq (1 - \varphi''(u^*))(u' - u^*)(u - u^*) < (1 - \varphi''(u^*))(u - u^*)^2.$$

Setzt man also

$$p = + \sqrt{1 - \varphi''(u^*)},$$

so hätte man

$$p \geqq 1 \quad \text{und für } u^* \leqq u \leqq u_1 \quad 0 \leqq m(x_1)^2 - \varphi(u) \leqq p^2 (u - u^*)^2.$$

Also wäre für $q > m(x_1)$

$$0 < q^2 - \varphi(u) \leqq (q^2 - m(x_1)^2) + p^2 (u - u^*)^2$$
$$= p^2 (\mu^2 + (u - u^*)^2) \leqq p^2 (\mu + u - u^*)^2,$$

wobei

$$\mu = + \frac{\sqrt{q^2 - m(x_1)^2}}{p}$$

gesetzt ist. Gemäß (2), (3) wäre also

$$S(x_1, q) = \int_a^b \frac{q\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q^2 - \varphi(u)}} > \min_{a \leqq u \leqq b} \sigma(u)\; m(x_1) \int_{u^*}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{q^2 - \varphi(u)}} \geqq$$

$$\geqq \min_{a \leqq u \leqq b} \sigma(u) \frac{m(x_1)}{p} \int_{u^*}^{u_1} \frac{du}{\mu + u - u^*} = \min_{a \leqq u \leqq b} \sigma(u) \frac{m(x_1)}{p}$$
$$\{\log(\mu + u_1 - u^*) - \log \mu\} >$$

$$> \min_{a \leqq u \leqq b} \sigma(u) \frac{m(x_1)}{p} \left\{\log(u_1 - u^*) + \log \frac{1}{\mu}\right\}.$$

Hieraus würde aber gemäß der Definition von μ folgen

(11′) $\lim_{q \to m(x_1) + 0} S(x_1, q) = \infty$ und mithin wegen (1) $\lim_{q \to m(x_1) + 0} \Gamma_q(L, x_1, q) = -\infty$,

was wegen der den betrachteten Fall (B) charakterisierenden Gleichung $q_1 = m(x_1)$ im Widerspruch zur Voraussetzung steht, daß die Funktion $\Gamma(L, x, q)$ an der Stelle x_1, q_1 ihr Minimum annimmt. Damit ist die Ungleichung (11) bewiesen.

Den Kern des eben geführten Beweises bildet die Feststellung, daß das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen

$$\varphi(u^*) = m(x_1)^2, \quad \varphi'(u^*) = 0$$

die Gleichungen (11′) nach sich zieht. Das gilt unverändert, wenn u^* mit einem der beiden Endpunkte a und b zusammenfällt. Also folgt aus

$$\varphi(a) = m(x_1)^2 \quad \varphi'(a) \neq 0 \quad \text{und aus } \varphi(b) = m(x_1)^2 \quad \varphi'(b) \neq 0.$$

Mithin folgt auch aus

$$\psi(a, \varkappa_1) = -m(\varkappa_1) \quad \psi'(a, \varkappa_1) > 0 \text{ und aus } \psi(b, \varkappa_1) = m(\varkappa_1) \quad \psi'(b, \varkappa_1) > 0.$$

Hieraus ergibt sich bei Berücksichtigung von (7), (10), (11):

Im Falle (B), *d. h. für* $q_1 = m(\varkappa_1)$, *gilt einer der folgenden drei Unterfälle*

(12) (B, 1) *für* $a \leqq u < b$ $|\psi(u, \varkappa_1)| < m(\varkappa_1)$, $\psi(b, \varkappa_1) = m(\varkappa_1)$, $\psi'(b, \varkappa_1) > 0$,

(13) (B, 2) *für* $a < u \leqq b$ $|\psi(u, \varkappa_1)| < m(\varkappa_1)$, $\psi(a, \varkappa_1) = -m(\varkappa_1)$, $\psi'(a, \varkappa_1) > 0$,

(14) (B, 3) *für* $a < u < b$ $|\psi(u, \varkappa_1)| < m(\varkappa_1)$, $\psi(a, \varkappa_1) = -m(\varkappa_1)$, $\psi'(a, \varkappa_1) > 0$, $\psi(b, \varkappa_1) = m(\varkappa_1)$, $\psi'(b, \varkappa_1) > 0$.

An diese Fallunterscheidung schließen sich die folgenden beiden Hilfssätze:

Erster Hilfssatz. Es mögen für a^*, b^*, $\varkappa^*$ die Relationen (12) oder (13) gelten. Dann kann in jedem der beiden Fälle ein $\eta > 0$ so bestimmt werden, daß diese Relationen in einer η-Umgebung des Wertetripels a^*, b^*, $\varkappa^*$, d. h. also für $(a - a^*)^2 + (b - b^*)^2 + (\varkappa - \varkappa^*)^2 \leqq \eta^2$ bestehen bleiben.

Gelten für a^*, b^*, $\varkappa^*$ die Relationen (14), so gibt es eine η-Umgebung, in welcher je nachdem, ob

$$(15^1) \qquad \psi(b, \varkappa)^2 - \psi(a, \varkappa)^2$$

positiv, negativ oder gleich Null ausfällt, die Relationen (12), (13) oder (14) Platz greifen.

Zusatz zum ersten Hilfssatz. Gelten für a^*, b^*, $\varkappa^*$ die Relationen (14), so bestehen bei festgehaltenem a^*, b^* für $\varkappa^* < \varkappa \leqq \varkappa^* + \eta$ die Relationen (12) und für $\varkappa^* - \eta \leqq \varkappa < \varkappa^*$ die Relationen (13).

Beweis. Zunächst kann durch Einschränkung von η das Folgende erreicht werden:

In der η-Umgebung bestehen, falls für a^*, b^*, $\varkappa^*$ (12) gilt, die Ungleichungen

$$(15^2) \qquad \psi(b, \varkappa) \geqq \tfrac{1}{2}\psi(b^*, \varkappa^*), \quad \psi'(b, \varkappa) \geqq \tfrac{1}{2}\psi'(b^*, \varkappa^*),$$

falls für a^*, b^*, $\varkappa^*$ (13) gilt, die Ungleichungen

$$(15^3) \qquad \psi(a, \varkappa) \leqq \tfrac{1}{2}\psi(a^*, \varkappa^*), \quad \psi'(a, \varkappa) \geqq \tfrac{1}{2}\psi'(a^*, \varkappa^*),$$

und falls für a^*, b^*, $\varkappa^*$ (14) gilt, die Ungleichungen

$$(15^4) \qquad \begin{aligned} \psi(a, \varkappa) &\leqq \tfrac{1}{2}\psi(a^*, \varkappa^*), \quad \psi'(a, \varkappa) \geqq \tfrac{1}{2}\psi'(a^*, \varkappa^*), \\ \psi(b, \varkappa) &\geqq \tfrac{1}{2}\psi(b^*, \varkappa^*), \quad \psi'(b, \varkappa) \geqq \tfrac{1}{2}\psi'(b^*, \varkappa^*). \end{aligned}$$

Man definiere nun die Differenzenquotienten

$$\frac{\psi(b,x)^2 - \psi(u,x)^2}{b-u}, \qquad \frac{\psi(b,x) - \psi(u,x)}{b-u}$$

für $b-u=0$ durch die entsprechenden Differentialquotienten,

$$2\,\psi(b,x)\,\psi'(b,x), \quad \psi'(b,x),$$

ebenso die Differenzenquotienten

$$\frac{\psi(a,x)^2 - \psi(u,x)^2}{u-a}, \qquad \frac{\psi(u,x) - \psi(a,x)}{u-a}$$

für $u-a=0$ durch die Differentialquotienten

$$-2\,\psi(a,x)\,\psi'(a,x), \quad \psi'(a,x).$$

Dann stellen diese Ausdrücke, wie der erste Mittelwertsatz erkennen läßt, Funktionen von u, b, x und u, a, x dar, welche überall, insbesondere auch für $b-u=0$, $u-a=0$ stetig bleiben. Setzt man daher

$$(15^5)\qquad \begin{aligned} \chi_1(a,b,x) &= \operatorname*{Min}_{a\leqq u\leqq b} \frac{\psi(b,x)^2 - \psi(u,x)^2}{b-u}, \\ \chi_2(a,b,x) &= \operatorname*{Min}_{a\leqq u\leqq b} \frac{\psi(a,x)^2 - \psi(u,x)^2}{u-a}; \end{aligned}$$

$$(15^6)\qquad \begin{aligned} \chi_3(a,b,x) &= \operatorname*{Min}_{a\leqq u\leqq b} \frac{\psi(b,x) - \psi(u,x)}{b-u}, \\ \chi_4(a,b,x) &= \operatorname*{Min}_{a\leqq u\leqq b} \frac{\psi(u,x) - \psi(a,x)}{u-a}, \end{aligned}$$

so bleiben die Funktionen χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, wie man leicht einsieht, in a, b, x stetig.

Gilt nun für a^*, b^*, x^* (12), so ist die durch den Ausdruck

$$\frac{\psi(b^*,x^*)^2 - \psi(u,x^*)^2}{b^*-u}$$

dargestellte Funktion von u im abgeschlossenen Intervall $a^* \leqq u \leqq b^*$ stetig und positiv. Daher hat man

$$(15^7)\qquad \chi_1(a^*,b^*,x^*) > 0.$$

Auf Grund der Stetigkeit der Funktion $\chi_1(a,b,x)$ folgt mithin für eine η-Umgebung von a^*, b^*, x^*

$$(15^8)\qquad \chi_1(a,b,x) \geqq c_1, \quad c_1 = \text{const} > 0,$$

wodurch bei Berücksichtigung von (15^2) die Relationen (12) gesichert sind, w. z. b. w.

Gelten für $a^*, b^*, \varkappa^*$ die Relationen (13), so erhält man in gleicher Weise für eine η-Umgebung von $a^*, b^*, \varkappa^*$

$$(15^9) \qquad \chi_2(a, b, \varkappa) \geqq c_2, \quad c_2 = \text{const} > 0,$$

wodurch bei Berücksichtigung von (15^3) die Relationen (13) gesichert sind.

Gelten endlich für $a^*, b^*, \varkappa^*$ die Relationen (14), so ergibt dieselbe Schlußweise für eine η-Umgebung von $a^*, b^*, \varkappa^*$

(15^{10}) $\chi_3(a, b, \varkappa) \geqq c_3, \quad c_3 = \text{const} > 0; \quad \chi_4(a, b, \varkappa) \geqq c_4, \quad c_4 = \text{const} > 0.$

Hieraus folgt für $a < u < b$

$$(15^{11}) \qquad \psi(a, \varkappa) < \psi(u, \varkappa) < \psi(b, \varkappa),$$

wodurch in Verbindung mit (15^4) die für diesen Fall gemachten Aussagen des Hilfssatzes gesichert sind.

Beweis des Zusatzes. Für $\varkappa > \varkappa^*$ ist

$$\psi(b^*, \varkappa) > \psi(b^*, \varkappa^*) = m(a^*, b^*, \varkappa^*), \quad \psi(a^*, \varkappa) > \psi(a^*, \varkappa^*) = -m(a^*, b^*, \varkappa^*).$$

Unter der Voraussetzung $\varkappa^* < \varkappa \leqq \varkappa^* + \eta$ hat man daher wegen (15^{11})

$$\psi(b^*, \varkappa) > |\psi(a^*, \varkappa)|, \quad \psi(b^*, \varkappa)^2 - \psi(a^*, \varkappa)^2 > 0,$$

woraus auf Grund des schon bewiesenen Hilfssatzes die Relationen (12) folgen, w. z. b. w.

Ebenso beweist man, daß die Voraussetzung $\varkappa^* - \eta \leqq \varkappa < \varkappa^*$ die Relationen (13) nach sich zieht.

Zweiter Hilfssatz. Die durch (2), (3) definierten Funktionen

$$S(\varkappa, q) = S(a, b, \varkappa, q), \quad V(\varkappa, q) = V(a, b, \varkappa, q)$$

sind als Funktionen von $a, b, \varkappa, q$ für $q > m(a, b, \varkappa)$ stetig; sie bleiben ferner unter den Voraussetzungen des ersten Hilfssatzes in der η-Umgebung von $a^*, b^*, \varkappa^*$ auch für $q \geqq m(a, b, \varkappa)$ stetig.

Beweis. Die erste Behauptung bedarf keines Beweises, da in den Integralen, durch welche die Funktionen dargestellt werden, die Integranden in $u, \varkappa, q$ stetig bleiben.

Es sei nunmehr $q = m(a^*, b^*, \varkappa^*)$, während für $a^*, b^*, \varkappa^*$ etwa die Relationen (12) gelten. Dann gelten sie gemäß dem ersten Hilfssatz auch für eine η-Umgebung von $a^*, b^*, \varkappa^*$, und es ist daher

$$q \geqq m(a, b, \varkappa) = \psi(b, \varkappa).$$

Die Definitionsgleichung

$$S(a, b, \varkappa, q) = \int_a^b \frac{q\,\sigma(u)}{\sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}}\, du$$

erhält durch die Substitution $u = b - t^2$ die Gestalt

$$(15^{12}) \qquad S(a,b,\varkappa,q) = 2q \int_0^{\sqrt{b-a}} \sigma(b-t^2) \sqrt{\frac{t^2}{q^2 - \psi(b-t^2,\varkappa)^2}}\, dt.$$

Der Integrand ist hier in dem nach unten offenen Integrationsintervall $0 < t \leqq \sqrt{b-a}$ in $b, \varkappa, q$ und t stetig. Ferner hat man wegen (15^5) und (15^8)

$$(15^{13}) \qquad \frac{t^2}{q^2 - \psi(b-t^2,\varkappa)} \leqq \frac{t^2}{\psi(b,\varkappa)^2 - \psi(b-t^2,\varkappa)^2} \leqq \frac{1}{c_1},$$

wodurch die zu beweisende Stetigkeit des Integrals in $a, b, \varkappa, q$ gewährleistet ist.

Ebenso wird die Stetigkeit von $V(a,b,\varkappa,q)$ festgestellt.

In gleicher Weise ergeben sich die Aussagen unseres Hilfssatzes für den Fall der Relationen (13), indem man sich der Substitution $u = a + t^2$ und der Abschätzungen (15^5), (15^9) bedient.

Im Falle der Relationen (14) endlich beweist man die Aussagen des Hilfssatzes, indem man an der Stelle b die Substitution $u = b - t^2$ und an der Stelle a die Substitution $u = a + t^2$ heranzieht und die Abschätzungen (15^6), (15^{10}) benutzt.

Man definiere nun bei festem L im Bereich

$$\alpha < a < b < \beta, \quad q \geqq m(a,b,\varkappa,q)$$

die Funktionen

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu(L,a,b,\varkappa,q), \qquad \nu = 1,2,3,4,$$

durch die Gleichungen

$$\Gamma_1 = 2\sigma(a)\sqrt{q^2 - \psi(a,\varkappa)^2},\ \Gamma_2 = -2\sigma(b)\sqrt{q^2 - \psi(b,\varkappa)^2},\ \Gamma_3 = 2V(a,b,\varkappa,q),$$
$$\Gamma_4 = L - 2S(a,b,\varkappa,q).$$

Dann sind für $q > m(a,b,\varkappa)$ die Funktionen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ in $a, b, \varkappa$ und q stetig, und $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ stellen die Ableitungen von Γ nach $a, b, \varkappa$ und q dar. $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ bleiben auch noch für $q = m(a,b,\varkappa)$ stetig, während bei Γ_3 und Γ_4 an einer solchen Stelle die Stetigkeit jedenfalls unter den Voraussetzungen des ersten Hilfssatzes, d. h. also beim Bestehen eines der drei Relationssysteme (12), (13), (14) durch den zweiten Hilfssatz gewährleistet ist. Nach dieser Vorbereitung kommen wir zum folgenden Satz:

Dritter Hilfssatz. Es liege die Kurve $a = a(t)$, $b = b(t)$, $\varkappa = \varkappa(t)$, $q = q(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ in unserem oben angegebenen Bereich. Die mit $\dot{a}(t)$, $\dot{b}(t)$, $\dot{\varkappa}(t)$, $\dot{q}(t)$ bezeichneten Ableitungen nach t seien stetig. Man bezeichne zur Abkürzung mit $\Gamma(t)$, $\Gamma_\nu(t)$, $m(t)$ die Werte der betreffenden Funktionen im laufenden Kurvenpunkt. Es sei nun $t = \tau$ eine Stelle, an welcher $q(\tau) > m(\tau)$

ist, oder im Falle, daß $q(\tau) = m(\tau)$ wäre, eines der drei Relationssysteme (12), (13), (14) gilt. Dann besteht die Gleichung

$$\dot{\Gamma}(\tau) = \Gamma_1(\tau)\dot{a}(\tau) + \Gamma_2(\tau)\dot{b}(\tau) + \Gamma_3(\tau)\dot{x}(\tau) + \Gamma_4(\tau)\dot{q}(\tau),$$

wobei $\dot{\Gamma}$ die Ableitung von Γ nach t bedeutet, und die punktierten Funktionen für $\tau = t_1$ die vordere und für $\tau = t_2$ die hintere Ableitung bezeichnen.

Beweis. Die Behauptung ist im Falle $q(\tau) > m(\tau)$ trivial. Sie bedarf daher nur unter der Annahme $q(\tau) = m(\tau)$ einer Begründung. Unter dieser Annahme können wir wegen der getroffenen Voraussetzungen das τ enthaltende Intervall t_1, t_2 auf Grund des ersten Hilfssatzes von vornherein als so klein gewählt annehmen, daß an jeder Stelle des Intervalls eines der drei Relationssysteme (12), (13), (14) gilt.

Nun setze man für $\varepsilon > 0$

$$\Gamma(\varepsilon, t) = \Gamma(L, a(t), b(t), x(t), q(t) + \varepsilon),$$
$$\Gamma_\nu(\varepsilon, t) = \Gamma_\nu(L, a(t), b(t), x(t), q(t) + \varepsilon) \qquad \nu = 1, 2, 3, 4,$$

so daß also

$$\Gamma(t) = \Gamma(0, t), \quad \Gamma_\nu(t) = \Gamma_\nu(0, t), \qquad \nu = 1, 2, 3, 4$$

wird. Dann hat man wegen $q(t) + \varepsilon > m(t)$

$$\dot{\Gamma}(\varepsilon, t) = \Gamma_1(\varepsilon, t)\,\dot{a}(t) + \Gamma_2(\varepsilon, t)\,\dot{b}(t) + \Gamma_3(\varepsilon, t)\,\dot{x}(t) + \Gamma_4(\varepsilon, t)\,\dot{q}(t)$$

und mithin

$$\Gamma(\varepsilon, t) - \Gamma(\varepsilon, t_1) = \int_{t_1}^{t} \{\Gamma_1(\varepsilon, x)\,\dot{a}(x) + \Gamma_2(\varepsilon, x)\,\dot{b}(x) + \Gamma_3(\varepsilon, x)\,\dot{x}(x) + \Gamma_4(\varepsilon, x)\,\dot{q}(x)\}\,dx.$$

Da nun die Stetigkeit der Funktionen

$$\Gamma(\varepsilon, t) \text{ und } \Gamma_\nu(\varepsilon, t) \quad \text{für } t_1 \leqq t \leqq t_2, \quad \varepsilon \geqq 0$$

durch den zweiten Hilfssatz gesichert ist, so ergibt sich, wenn man ε gegen Null konvergieren läßt,

$$\Gamma(t) - \Gamma(t_1) = \int_{t_1}^{t} \{\Gamma_1(x)\,\dot{a}(x) + \Gamma_2(x)\,\dot{b}(x) + \Gamma_3(x)\,\dot{x}(x) + \Gamma_4(x)\,\dot{q}(x)\}\,dx,$$

woraus, da der Integrand in x stetig ist, die zu beweisende Behauptung für jeden Wert von t, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, und mithin auch für $t = \tau$ folgt.

Schreibt man für a^*, b^*, x^* wieder a, b, x_1, so folgt aus dem ersten Hilfssatze im Falle (B, 1) auf Grund von (12) bei festgehaltenem a und b für $|x - x_1| \leqq \eta$

$$\Gamma(L, x, m(x)) = \Gamma(L, a, b, x, \psi(b, x)). \tag{16}$$

Auf Grund des dritten Hilfssatzes hat man daher

$$(17)\quad \frac{d}{dx}\,\Gamma(L, x, m(x)) = \Gamma_3(L, a, b, x, \psi(b, x) + \\ + \Gamma_4(L, a, b, x, \psi(b, x))\frac{d\,\psi(b,x)}{dx} \\ = 2\,V(a, b, x, \psi(b, x)) + \frac{L - 2\,S(a, b, x, \psi(b, x))}{\sigma(b)\,g(b)}.$$

So ergibt sich

$$(18)\quad \frac{d}{dx}\,\Gamma(L, x, m(x)) = \frac{L - L'(x, m(x))}{\sigma(b)\,g(b)}.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$(19)\quad L'(x, q) = L'(a, b, x, q)$$

zu setzen, und die Funktion $L'(a, b, x, q)$ ist definiert durch die Gleichung

$$(20)\quad L'(a, b, x, q) = 2\,S(a, b, x, q) - 2\,\sigma(b)\,g(b)\,V(a, b, x, q).$$

Da nun die Funktion $\Gamma(L, x, q)$ an der Stelle $x = x_1$, $q = m(x_1)$ voraussetzungsgemäß ihr Minimum annimmt, so muß an dieser Stelle die linke Seite der Gleichung (18) verschwinden. So erhält man das Resultat

$$(21)\quad L'(x_1, m(x_1)) = L'(a, b, x_1, m(x_1)) = L.$$

Ebenso erhält man im Falle (B, 2) bei festgehaltenem a und b für $|x - x_1| \leqq \eta$

$$(22)\quad \Gamma(L, x, m(x)) = \Gamma(L, a, b, x, -\psi(a, x)),$$

$$\frac{d}{dx}\,\Gamma(L, x, m(x)) = \Gamma_3(L, a, b, x, -\psi(a, x)) - \\ - \Gamma_4(L, a, b, x, -\psi(a, x))\,\frac{1}{\sigma(a)\,g(a)} \\ = 2\,V(a, b, x, -\psi(a, x)) - \frac{L - 2\,S(a, b, x, -\psi(a, x))}{\sigma(a)\,g(a)},$$

und wegen $-\psi(a, x) = m(x)$

$$(23)\quad \frac{d}{dx}\,\Gamma(L, x, m(x)) = -\frac{L - L''(x, m(x))}{\sigma(a)\,g(a)}.$$

Dabei ist

$$(24)\quad L''(x, q) = L''(a, b, x, q)$$

zu setzen, und die Funktion $L''(a, b, x, q)$ ist definiert durch die Gleichung

$$(25)\quad L''(a, b, x, q) = 2\,S(a, b, x, q) + 2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(a, b, x, q).$$

Ferner ergibt sich wie im Falle (B, 1)

$$(26)\quad L''(x_1, m(x_1)) = L''(a, b, x_1, m(x_1)) = L.$$

Im Falle (B, 3) gilt endlich auf Grund des Zusatzes zum ersten Hilfssatz für $x_1 \leqq x \leqq x_1 + \eta$ die Darstellung (16) und für $x_1 - \eta \leqq x \leqq x_1$ die Dar-

stellung (22). Laut dem dritten Hilfssatz wird daher an der Stelle x_1 die vordere Ableitung nach x durch die Gleichung (18) gegeben und die hintere durch die Gleichung (23), d. h. es gelten die Gleichungen

$$\left(\frac{d^+}{dx}\Gamma(L,x,m(x))\right)_{x=x_1} = \frac{L - L'(x_1, m(x_1))}{\sigma(b)\,g(b)}. \tag{27}$$

Ebenso erhält man auf Grund von (23), (25)

$$\left(\frac{d^-}{dx}\Gamma(L,x,m(x))\right)_{x=x_1} = -\frac{L - L''(x_1, m, (x_1))}{\sigma(a)\,g(a)}. \tag{28}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stellen also die vordere und hintere Ableitung der Funktion $\Gamma(L, x, m(x))$ nach x an der Stelle x_1 dar. Da bei einem Minimum die vordere Ableitung nicht negativ und die hintere nicht positiv sein kann, so ergeben sich die beiden Ungleichungen

$$L \geqq L'(x_1, m(x_1)), \quad L \geqq L''(x_1, m(x_1)). \tag{29}$$

In allen drei Fällen (B, 1), (B, 2), (B, 3) hat man endlich gemäß dem dritten Hilfssatz

$$\frac{d^+}{dq}(\Gamma(L,a,b,x,q))_{q=m(x_1)} = \Gamma_4(L,a,b,x_1,m(x_1)) = L - 2S(x_1, m(x_1)). \tag{29'}$$

Da bei einem Minimum die vordere Ableitung nicht negativ sein kann, so gilt in allen drei Fällen (B, 1), (B, 2), (B, 3)

$$2S(x_1, m(x_1)) \leqq L. \tag{30}$$

Im Falle (B, 1) ist diese Ungleichung wegen (21), (20) gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$V(x_1, m(x_1)) \leqq 0. \tag{31}$$

Im Falle (B, 2) ist (30) wegen (26), (25) gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$V(x_1, m(x_1)) \geqq 0. \tag{32}$$

Im Falle (B, 3) ist die Ungleichung (30) schon im Paar der beiden Ungleichungen (29) als Konsequenz enthalten, indem sie je nach dem Vorzeichen von $V(x_1, m(x_1))$ aus einer von beiden folgt.

Wir können das Ergebnis der Diskussion in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz IV. *Nimmt $\Gamma(L, x, q)$ bei festem L als Funktion von x und q an der Stelle x_1, q_1 das Minimum an, so kann nur einer der vier Fälle* (A), (B, 1) (B, 2), (B, 3) *vorliegen, wobei* (A) *durch die Relation $q_1 > m(x_1)$ gekennzeichnet ist,* (B, 1) *durch die Relationen $q_1 = m(x_1)$ und* (12), (B, 2) *durch $q_1 = m(x_1)$ und* (13), (B, 3) *durch $q_1 = m(x_1)$ und* (14). *Ferner gelten dann noch im Falle* (A)

die Gleichung (5′) *und die L als Funktion von* $\varkappa_1$ *und* q_1 *darstellende Gleichung* (5), *im Falle* (B, 1) *die Ungleichung* (31) *und die L als Funktion von* $\varkappa_1$ *darstellende Gleichung* (21), *im Falle* (B, 2) *die Ungleichung* (32) *und die L als Funktion von* $\varkappa_1$ *darstellende Gleichung* (26), *im Falle* (B, 3) *die L nach unten beschränkenden beiden Ungleichungen* (29).

Aus der diesem Satze zugrunde gelegten Voraussetzung, daß $\Gamma(L, \varkappa, q)$ als Funktion von $\varkappa$ und q ein Minimum besitzt, folgt gemäß dem im § 4 bewiesenen Zusatz 3 zu Satz III auch die Ungleichung

$$L > 2\int_a^b \sigma(u)\,du. \tag{33}$$

Diese fließt übrigens auch unmittelbar aus den im obigen Satze IV als Konsequenzen des vorausgesetzten Minimums aufgezählten Gleichungen und Ungleichungen. Denn diese sichern, wie in der voraufgehenden Diskussion festgestellt, die Ungleichung (30), und da gemäß der Definitionsgleichung (3) für alle Wertepaare $\varkappa$, q, $q \geqq m(\varkappa)$,

$$S(\varkappa, q) > \int_a^b \sigma(u)\,du$$

bleibt, auch die Ungleichung (33).

An den Satz IV schließt sich unmittelbar der folgende Satz, der im nächsten Paragraphen bewiesen werden wird:

Satz V. *Es seien das Wertepaar* $a, b, a < b$, *des Bereiches* § 1 (2) *und eine positive Größe L gegeben. Es bestehe für* $\varkappa = \varkappa_1$, $q = q_1$ *einer der im Satz* IV *gekennzeichneten vier Fälle* (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) *einschließlich der in diesem Satz an diese Fälle angeschlossenen Gleichungen und Ungleichungen.*

Dann gehört zu diesem Wertepaar eine und nur eine in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ *eingeschriebene Extremale mit dem Werte L des Integrals* § 1 (5), *oder, was gemäß Satz* I′ *damit gleichbedeutend ist, es gibt dann eine und nur eine in den Streifen* $a \leqq u \leqq b$ *eingeschriebene einfache, geschlossene Kurve mit dem Werte L des Integrales* § 1 (5), *welche in der isoperimetrischen Fundamentalungleichung, wenn in dieser* $\varkappa = \varkappa_1$, $q = q_1$ *gesetzt wird, die Gleichheit erreicht.*

Dabei wird die Klasse von Kurven, welche durch die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse auseinander hervorgehen, als eine einzige Kurve gezählt.

Die im § 4 bewiesene Aussage 1 des Satzes III, der im laufenden Paragraphen bewiesene Satz IV und der im nächsten Paragraphen zu beweisende Satz V sind so ineinander verzahnt, daß stets die Konklusion des vorhergehenden Satzes die Prämisse des nachfolgenden bildet. Die Konklusion des letzten Satzes ist die Aussage 3 des Satzes III.

Da ferner die Aussage 2 des Satzes III aus der Aussage 3 in Verbindung mit dem Satze II folgt, *so ist mit dem im nächsten Paragraphen zu führenden Beweise des Satzes* V *der Beweis für alle ausgesprochenen Sätze vollendet.*

Endlich darf, obgleich in den obigen Sätzen implizite schon gesagt, doch noch darauf hingewiesen werden, daß der Sachverhalt, daß die Funktion $\Gamma(L, \varkappa, q)$ an der Stelle $\varkappa_1$, q_1 ihr Minimum annimmt, für den Satz V keine Voraussetzung bildet, sondern vielmehr vermöge des Satzes II sich als eine Konsequenz der Voraussetzungen des Satzes V herausstellt.

§ 6.

Beweis der Existenz und Unität der das Extremum erreichenden Extremalen.

Wir kommen jetzt zum Beweise des Satzes V. Zunächst bestimmen wir auf Grund der Sätze I und I', wie eine zu $\varkappa_1$, q_1 gehörende Extremale in den Intervallen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ verlaufen müßte.

Gemäß § 1 (17) gilt auf der Extremalen

$$\cos(N, u) = \frac{\psi(u, \varkappa_1)}{q_1}. \tag{1}$$

Im Falle (A) folgt hieraus wegen $q_1 > m(\varkappa_1)$

$$|\cos(N, u)| < 1.$$

In den Fällen (B, 1), (B, 2), (B, 3) gilt entsprechend § 1 (21) in den offenen Intervallen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ die Ungleichung $a < u < b$ und mithin wegen § 5 (12), (13), (14)

$$|\psi(u, \varkappa_1)| < m(\varkappa_1) = q_1.$$

Daher gilt in allen vier Fällen in den offenen Intervallen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ $|\cos(N, u)| < 1$ und mithin gemäß § 1 (23)

(2) für $0 < s < s_1$ $\cos(N, v) < 0$ und für $s_2 < s < s_3$ $\cos(N, v) > 0$.

Gemäß § 1 (8) gilt die Identität

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\cos(N, u)}{g(u)\cos(N, v)} = -\operatorname{sign}(\cos(N, v))\frac{\cos(N, u)}{g(u)\sqrt{1 - \cos^2(N, u)}}, \tag{3}$$

wobei hier wie im folgenden das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen ist. Die Einführung von (1) ergibt bei Berücksichtigung der Vorzeichenbestimmung (2)

$$\text{für } 0 < s < s_1 \quad \frac{dv}{du} = \frac{\psi(u, \varkappa_1)}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}, \tag{4}$$

$$\text{für } s_2 < s < s_3 \quad \frac{dv}{du} = -\frac{\psi(u, \varkappa_1)}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}. \tag{5}$$

Umgekehrt ist in diesen beiden Intervallen durch die letzten beiden Gleichungen auch die Gültigkeit von (1) gesichert, wie die Einführung dieser Gleichungen auf der linken Seite der Identität (3) bei Berücksichtigung der Vorzeichenbestimmung (2) ergibt.

Zunächst erkennt man aus den letzten beiden Gleichungen, daß die beiden Kurvenbögen in dem Sinne miteinander *symmetrisch* sind, daß sie durch Vertauschung von v mit $-v$ und eine Verschiebung parallel zur v-Achse zur Deckung gebracht werden können.

Man erhält aus (4)[5])

$$(6) \qquad \text{für } 0 < s < s_1 \qquad v = v(0) + \int_a^u \frac{\varphi(t, x_1)\,dt}{g(t)\sqrt{q_1^2 - \varphi(t, x_1)^2}},$$

$$v(s_1) = v(0) + \int_a^b \frac{\varphi(t, x_1)\,dt}{g(t)\sqrt{q_1^2 - \varphi(t, x_1)^2}},$$

$$(7) \qquad v(s_1) = v(0) + V(x_1, q_1),$$

wobei die Funktion $V(x, q)$ wie im vorigen Paragraphen durch § 5 (2), (3) definiert ist. Ebenso erhält man aus (5)

$$(8) \qquad \text{für } s_2 < s < s_3 \qquad v = v(s_2) + \int_u^b \frac{\varphi(t, x_1)\,dt}{g(t)\sqrt{q_1^2 - \varphi(t, x_1)^2}},$$

$$(9) \qquad v(s_3) = v(s_2) + V(x_1, q_1).$$

Die Funktion $\gamma(u) + x_1$ nimmt mit wachsendem u zu. Sie kann daher im Intervall $a \leqq u \leqq b$ nur einmal das Zeichen wechseln. Findet kein Vorzeichenwechsel statt[6]), so nimmt, da $\varphi(u, x_1)$ und $\gamma(u) + x_1$ das gleiche Vorzeichen haben, auf dem Bogen $0 < s < s_1$ v mit wachsendem u entweder monoton ab oder monoton zu. Wechselt aber die Funktion $\gamma(u) + x_1$ an der Stelle u_0 das Vorzeichen, so nimmt v mit wachsendem u von a bis u_0 ab und von u_0 bis b zu. Jedenfalls gilt also

$$(10) \qquad \text{für } 0 < s < s_1 \quad v < \max\,(v(0), v(s_1)).$$

---

[5]) Für den Fall des klassischen isoperimetrischen Problems sind die Formeln (6) und (8), durch welche auf Flächen mit der Maßbestimmung einer Rotationsfläche die Extremalbögen oder, was dasselbe ist (vgl. Anmerkung 3, S. 496), die Kurven konstanter geodätischer Krümmung mittels Quadraturen dargestellt werden, schon von MINDING aufgestellt worden.

MINDING, „Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings bei gegebenem Flächeninhalt auf krummen Flächen". Crelles Journal 86 (1878), S. 279. Vgl. auch DARBOUX. Leçons sur la théorie générale des surfaces 3 (1894), S. 152.

[6]) Dieser Fall ist, wie am Schluß des laufenden Paragraphen durch Satz VII klargestellt werden wird, ausgeschlossen.

Ebenso ergibt sich für den symmetrischen Bogen

$$(11) \qquad s_2 < s < s_3 \qquad v > \min\,(v(s_2), v(s_3)).$$

Im Falle (A) gilt nun wegen $q_1 > m(\varkappa_1)$ weder $q_1 = \psi(b, \varkappa_1)$ noch $q_1 = -\psi(a, \varkappa_1)$, und es muß daher gemäß Satz I $s_1 = s_2$ und $s_3 = l$ sein, d. h. die Kurve besteht nur aus den beiden symmetrischen Kurvenbögen (6) und (8). Ferner folgt aus (7), (9) wegen § 5 (5')

$$(12) \qquad v(s_1) = v(0), \quad v(s_3) = v(s_2)$$

und mithin

$$(13) \qquad v(l) = v(s_3) = v(s_2) = v(s_1) = v(0).$$

Da nun gemäß § 1 (20)

$$(14) \qquad u(l) = u(s_3) = a = u(0) \quad \text{und} \quad u(s_2) = u(s_1) = b$$

ist, so ist die Kurve *geschlossen*. Aus (10), (11), (12) folgt ferner, daß die beiden symmetrischen Kurvenbögen $0 \leqq s \leqq s_1$ und $s_2 \leqq s \leqq s_3$ nur die beiden Endpunkte miteinander gemein haben. Die Kurve ist also *einfach geschlossen* und die Normalenrichtung N weist wegen der Vorzeichenbestimmung (2) in der Tat nach außen.

Damit ist bewiesen, daß im Falle (A) *zu* $\varkappa_1$, q_1 *eine und nur eine in den Streifen* $a \leqq u \leqq b$ *eingeschriebene Extremale gehört.* Der willkürlichen Konstanten $v\,(0)$ entspricht hierbei die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse. *Die Extremale hat die geodätische Linie* $v = v\,(0)$ *zur Symmetrieachse und besitzt zwei und nur zwei Ecken, nämlich an den Stellen* $u = a$, $v = v(0)$ *und* $u = b$, $v = v\,(0)$.

Ehe wir feststellen, daß der Wert des Integrals § 1 (5) auf der Extremalen in der Tat gleich L wird, wenden wir uns den anderen Fällen zu.

Im Falle (B, 1) gilt gemäß § 5 (12)

$$q_1 = m(\varkappa_1) = \psi(b, \varkappa_1) > |\psi(a, \varkappa_1)|.$$

Gemäß Satz I hat man daher

$$(15) \qquad s_3 = l, \quad s_1 \leqq s_2,$$

und es besteht für $s_1 < s_2$ der Bogen $s_1 \leqq s \leqq s_2$ aus einem Stück der Kurve $u = b$. Da auf letzterem entsprechend § 2 (1) $\cos(N, u) = 1$ und mithin wegen § 1 (8)

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{g(b)}$$

ist, so erhält man

$$(16) \qquad v(s_2) - v(s_1) = \frac{s_2 - s_1}{g(b)},$$

eine Formel, die natürlich auch für $s_1 = s_2$ gültig bleibt.

Nun ist wegen (15)

$$v(l) - v(0) = v(s_3) - v(0)$$
$$= (v(s_3) - v(s_2)) + (v(s_2) - v(s_1)) + (v(s_1) - v(0)),$$

also wegen (7), (9), (16)

$$v(l) - v(0) = 2V(x_1, m(x_1)) + \frac{s_2 - s_1}{g(b)}. \tag{17}$$

Da gemäß (15), (14) $u(l) = u(0)$ ist, so ist die Kurve dann und nur dann *geschlossen*, wenn $v(l) = v(0)$ ist. Gemäß (17) hat man also

$$s_2 - s_1 = -2g(b)V(x_1, m(x_1)), \tag{18}$$

wobei durch die zu den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes V gehörende Ungleichung § 5 (31), nämlich die Ungleichung $V(x_1, m(x_1)) \leqq 0$ sichergestellt ist, daß die rechte Seite nicht negativ ausfällt.

Nun ergeben (7) und (9) wegen $V(x_1, m(x_1)) \leqq 0$

$$v(s_1) \leqq v(0), \quad v(s_3) \leqq v(s_2)$$

und mithin

$$\max(v(0), v(s_1)) = v(0), \quad \min(v(s_2), v(s_3)) = v(s_3).$$

Da wegen (15), (17), (18)

$$v(s_3) = v(l) = v(0)$$

ist, so hat man

$$\min(v(s_2), v(s_3)) = \max(v(0), v(s_1)).$$

Also zeigen (10) und (11), daß die beiden offenen Kurvenbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ sich nicht schneiden können. Die Kurve ist mithin *einfach geschlossen* und die Normalenrichtung N weist wegen der Vorzeichenbestimmung (2) in der Tat nach außen. Die Kurve ist daher kraft Satz I eine *Extremale*.

Damit ist bewiesen, daß auch im Fall (B, 1) *zu* x_1, q_1 *eine und bis auf die durch die willkürliche Konstante* $v(0)$ *angezeigte Verschiebung parallel zur v-Achse nur eine Extremale gehört.*

Ist $V(x_1, m(x_1)) < 0$, so ist gemäß (18) $s_1 < s_2$, und die beiden symmetrischen Bögen $0 \leqq s \leqq s_1$ und $s_2 \leqq s \leqq s_3$ haben daher nur den Endpunkt $u = a$, $v = v(0) = v(l)$ miteinander gemein. Ist aber $V(x_1, m(x_1)) = 0$, so ist $s_1 = s_2$ und wegen (7), (9) $v(s_1) = v(0)$, $v(s_3) = v(s_2)$. Man hat also in diesem Falle

$$v(l) = v(s_3) = v(s_2) = v(s_1) = v(0),$$

und die beiden symmetrischen Bögen haben auch noch den anderen Endpunkt $u = b$, $v = v(0)$ miteinander gemein.

Wie die Gleichungen (4), (5) bei Berücksichtigung der Gleichung $q_1 = \psi(b, x_1)$ zeigen, geht im Falle (B, 1) die Tangentialrichtung der beiden

Extremalenbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ an den Stellen s_1 und s_2 stetig in die der Kurve $u = b$ über. *Die Extremale besitzt also nur eine einzige Ecke, nämlich an der Stelle* $u = a, v = v(0)$. Sie hat die geodätische Linie $v = v(0)$ zur Symmetrieachse.

Ebenso beweist man, daß im Falle (B, 2) *zu* $\varkappa_1, q_1$ *eine und bis auf die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse nur eine Extremale gehört.* Für diese gilt

(19) $s_2 = s_1$, ferner für $s_3 < l$ und $s_3 < s < l$ $u = a$, $\cos(N, u) = -1$ und mithin $\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{g(a)}$,

(20) $v(l) - v(s_3) = -\frac{l - s_3}{g(a)}$, $v(l) - v(0) = 2V(\varkappa_1, m(\varkappa_1)) - \frac{l - s_3}{g(a)}$,

(21) $l - s_3 = 2g(a)V(\varkappa_1, m(\varkappa_1))$,

wobei durch die zu den Voraussetzungen des Satzes V gehörende Ungleichung § 5 (32), nämlich durch die Ungleichung $V(\varkappa_1, m(\varkappa_1)) \geqq 0$ sichergestellt ist, daß die rechte Seite nicht negativ ausfällt. Die Tangentialrichtung der Extremalenbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ geht an den Stellen $s = 0$ und $s = s_3$ stetig in die der Kurve $u = a$ über. *Die Extremale besitzt also eine und nur eine Ecke, nämlich an der Stelle* $u = b$, $v = v(s_1) = v(s_2)$. Sie hat die geodätische Linie

$$v = v(s_1) = v(0) + V(\varkappa_1, m(\varkappa_1))$$

zur Symmetrieachse.

Ebenso erhält man im Falle (B, 3) wegen $q_1 = \psi(b, \varkappa_1) = -\psi(a, \varkappa_1)$

(22) für $s_1 < s_2$ und $s_1 < s < s_2$ $u = b$, $\cos(N, u) = 1$,
$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{g(b)}$, $v(s_2) - v(s_1) = \frac{s_2 - s_1}{g(b)}$,

(23) für $s_3 < l$ und $s_3 < s < l$ $u = a$, $\cos(N, u) = -1$,
$\frac{dv}{ds} = \frac{-1}{g(a)}$, $v(l) - v(s_3) = -\frac{l - s_3}{g(a)}$.

(24) $v(l) - v(0) = 2V(\varkappa_1, m(\varkappa_1)) + \frac{s_2 - s_1}{g(b)} - \frac{l - s_3}{g(a)}$,

welche Gleichung natürlich auch für $s_2 = s_1$ oder $l = s_3$ gültig bleibt. Da $u(l) = a = u(0)$ ist, so ist die Kurve dann und nur dann *geschlossen*, wenn $v(l) = v(0)$ ist, also wenn

(25) $$\frac{l - s_3}{g(a)} - \frac{s_2 - s_1}{g(b)} = 2V(\varkappa_1, m(\varkappa_1))$$

gilt.

Nun ist wegen (7). (9)

$$v(s_1) - v(0) = v(s_3) - v(s_2).$$

Es folgt also aus

$$\max(v(0), v(s_1)) = v(0) \quad \min(v(s_2), v(s_3)) = v(s_3)$$

und aus

$$\max(v(0), v(s_1)) = v(s_1) \quad \min(v(s_2), v(s_3)) = v(s_2).$$

Da wegen (22), (23) $v(s_2) \geqq v(s_1)$, $v(s_3) \geqq v(l) = v(0)$ ist, so gilt stets

$$\min(v(s_2), v(s_3)) \geqq \max(v(0), v(s_1)).$$

Gemäß (10), (11) können daher die beiden symmetrischen offenen Kurvenbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ sich nicht schneiden. Die Kurve ist daher *einfach geschlossen* und die Normalenrichtung N weist wegen (2) in der Tat nach außen.

Damit ist bewiesen, daß im Falle (B, 3) *jedem nichtnegativen, der Gleichung* (25) *genügenden Wertepaar von* $(l - s_3)$ *und* $(s_2 - s_1)$ *eine und bis auf die Verschiebung parallel zur v-Achse nur eine zu* x_1, q_1 *gehörende Extremale entspricht. Diese Extremalen besitzen keine Ecken* und haben, da wegen (7), (9)

$$\frac{v(s_3)+v(0)}{2} = \frac{v(s_2)+v(s_1)}{2}$$

ist, die geodätische Linie $v = \frac{1}{2}(v(s_3) + v(0))$ zur Symmetrieachse.

Wird die Extremale mit C_1 bezeichnet, so erhält man in allen vier Fällen (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) für das Integral § 1 (5)

$$(26) \qquad \int_{C_1} \sigma(u)\,ds = \int_0^{s_1} \sigma(u)\,ds + \int_{s_1}^{s_2} \sigma(u)\,ds + \int_{s_2}^{s_3} \sigma(u)\,ds + \int_{s_3}^{l} \sigma(u)\,ds.$$

Nun ist für $s_1 \leqq s \leqq s_2$ $u = b$ und für $s_3 \leqq s \leqq l$ $u = a$. Also ist

$$(27) \qquad \int_{s_1}^{s_2} \sigma(u)\,ds = \sigma(b)(s_2 - s_1), \quad \int_{s_3}^{l} \sigma(u)\,ds = \sigma(a)(l - s_3).$$

Ferner hat man wegen $ds^2 = du^2 + g(u)^2 dv^2$ bei Berücksichtigung von (4), (5), (2)

$$(28) \qquad \int_0^{s_1} \sigma(u)\,ds = \int_{s_2}^{s_3} \sigma(u)\,ds = \int_a^b \sigma(u)\sqrt{1 + g(u)^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du$$

$$= \int_a^b \frac{q_1\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \varphi(u, x_1)^2}} = S(x_1, q_1),$$

wobei die Funktion $S(x, q)$ wie im vorigen Paragraphen durch § 5 (2), (3) definiert ist. Da nun $s_2 - s_1$ in den Fällen (A) und (B, 2) verschwindet und im Falle (B, 1) durch (18) gegeben ist, während $l - s_3$ in den Fällen (A) und (B, 1) verschwindet und im Falle (B, 2) durch (21) gegeben ist, so ergeben (26), (27), (28)

(29) im Falle (A) $\int_{C_1} \sigma(u)\,ds = 2\,S(x_1, q_1)$,

(30) im Falle (B, 1) $\int_{C_1} \sigma(u)\,ds = 2\,S(x_1, m(x_1)) - 2\,\sigma(b)\,g(b)\,V(x_1, m(x_1))$
$= L'(x_1, m(x_1))$,

(31) im Falle (B, 2) $\int_{C_1} \sigma(u)\,ds = 2\,S(x_1, m(x_1)) +$
$+ 2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(x_1, m(x_1)) = L''(x_1, m(x_1))$,

wobei die Funktionen $L'(\varkappa, q)$ und $L''(\varkappa, q)$ wie im vorigen Paragraphen durch § 5 (19), (20), (24), (25) definiert sind. Nun gehört zu den Voraussetzungen unseres Satzes V im Falle (A) die Gleichung § 5 (5), im Falle (B, 1) die Gleichung § 5 (21), im Falle (B, 2) die Gleichung § 5 (26), und diese Gleichungen zeigen unmittelbar, daß in allen drei Fällen (A), (B, 1), (B, 2) in der Tat

$$\int_{C_1} \sigma(u)\, du = L \tag{32}$$

wird, was für diese drei Fälle allein noch zu beweisen war.

Im Falle (B, 3) hat man

$$\int_{C_1} \sigma(u)\, du = 2S(\varkappa_1, m(\varkappa_1)) + \sigma(b)(s_2 - s_1) + \sigma(a)(l - s_3)$$

und mithin die Aufgabe der Befriedigung der Gleichung

$$\sigma(b)(s_2 - s_1) + \sigma(a)(l - s_3) = L - 2S(\varkappa_1, m(\varkappa_1)). \tag{33}$$

Diese Gleichung und die Gleichung (25) ergeben als Lösungen

$$s_2 - s_1 = \frac{g(b)\{L - L''(\varkappa_1, m(\varkappa_1))\}}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}, \quad l - s_3 = \frac{g(a)\{L - L'(\varkappa_1, m(\varkappa_1))\}}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}, \tag{34}$$

wobei die unter den Voraussetzungen unseres Satzes V aufgeführten Ungleichungen § 5 (29) sicherstellen, daß die rechten Seiten nicht negativ ausfallen. *Wir sehen also, daß auch im Falle* (B, 3) *zu* $\varkappa_1$, q_1 *eine und bis auf die Verschiebung parallel zur v-Achse nur eine Extremale mit dem vorgeschriebenen Wert L des Integrals* § 1 (5) *gehört.*

Damit ist der Satz V vollständig bewiesen.

Wenn bei gegebenem a und b zum beliebigen Wertepaar $\varkappa^*$, q^* eine Extremale gehört, so nimmt gemäß Satz II, wenn L^* den Wert des über die Extremale erstreckten Integrals § 1 (5) angibt, $\Gamma(L^*, \varkappa, q)$ bei festem L^* als Funktion von $\varkappa$ und q an der Stelle $\varkappa^*$, q^* das Minimum an. Gemäß Satz IV liegt daher einer der vier Fälle (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) vor. Im laufenden Paragraphen ist für jeden dieser Fälle die Gestalt der Extremalen gekennzeichnet worden. Es gilt daher der folgende Satz.

Satz VI. *Jede Extremale gehört einem der vier Gestaltstypen* (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) *an, welche oben für die vier Fälle festgestellt worden sind.*

Hieran schließt sich noch der folgende für den Verlauf der Extremalen wichtige Satz:

Satz VII. *Bei jeder Extremalen wechselt die Funktion* $\psi(u, \varkappa_1)$ *im Intervall* $a \leqq u \leqq b$ *einmal und nur einmal das Vorzeichen, und zwar ist sie an der Stelle a negativ und an der Stelle b positiv.* Da auf dem Bogen $0 < s < s_1$ gemäß (2) $\cos(N, v)$ negativ und mithin wegen § 1 (8) $\frac{du}{ds}$ positiv bleibt, *so*

wechselt auch auf diesem Bogen die Funktion $\psi(u, \varkappa_1)$ in einem und nur einem Punkt das Vorzeichen. Dasselbe gilt für den symmetrischen Bogen $s_2 < s < s_3$.

Beweis. Da die Funktion $\gamma(u)$ mit u wächst, so kann nur ein einziger Vorzeichenwechsel stattfinden. Nun wird im Falle (B, 3) der Vorzeichenwechsel durch die gemäß § 5 (14) bestehenden Gleichungen $\psi(a, \varkappa_1) = -m(\varkappa_1)$, $\psi(b, \varkappa_1) = m(\varkappa_1)$ gesichert. Fände im Falle (B, 1) kein Vorzeichenwechsel statt, so müßte $\psi(u, \varkappa_1)$ im ganzen Intervall das Vorzeichen von $\psi(b, \varkappa_1)$ aufweisen, welches gemäß § 5 (12) positiv ist. Mithin müßte wegen § 5 (2), (3) $V(\varkappa_1, m(\varkappa_1))$ positiv ausfallen — im Widerspruch zu § 5 (31). Fände im Falle (B, 2) kein Vorzeichenwechsel statt, so müßte $\psi(u, \varkappa_1)$ im ganzen Intervall das Vorzeichen von $\psi(a, \varkappa_1)$ aufweisen, welches gemäß § 5 (13) negativ ist. Mithin müßte $V(\varkappa_1, m(\varkappa_1))$ negativ ausfallen — im Widerspruch zu § 5 (32). Fände endlich im Falle (A) kein Vorzeichenwechsel statt, so könnte $V(\varkappa_1, q_1)$ nicht verschwinden — im Widerspruch zu § 5 (5′).

§ 7.

Die lineare isoperimetrische Ungleichung.

Es seien das Wertepaar a, b, $a < b$, des Bereiches § 1 (2) und L gegeben, und es sei

$$L > 2\int_a^b \sigma(u)\,du. \tag{1}$$

Dann lassen sich gemäß dem Hauptsatz III $\varkappa_1$ und q_1 auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß die isoperimetrische Fundamentalungleichung

$$J \leqq q_1 L - 2\int_a^b \sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}\,\sigma(u)\,du \tag{2}$$

für alle in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschriebenen einfachen, geschlossenen Kurven als genaue Schranke Geltung hat — und zwar wird dann die Gleichheit von einer und bis auf die Verschiebung parallel zur v-Achse von nur einer Kurve erreicht.

Hält man a und b fest und betrachtet L als variabel, so ist die isoperimetrische Ungleichung in L und J linear, wenn $\varkappa_1$ und q_1 nicht von L abhängen. Das kann in den Fällen (A), (B, 1), (B, 2) nicht eintreten, weil in diesen Fällen vermöge der entsprechenden Gleichungen § 5 (5), (21), (26) L durch $\varkappa_1$ und q_1 bestimmt ist, sich also bei festem $\varkappa_1$ und q_1 nicht ändern kann.

Anders liegt es im Falle (B, 3). In diesem Falle sind $\varkappa_1$ und q_1 von L unabhängig und lassen sich direkt explizite berechnen. Gemäß § 5 (12), (13) (14) ist nämlich

$$\begin{cases} \text{im Falle (B, 1)} & \psi(a, \varkappa_1) + \psi(b, \varkappa_1) > 0, \\ \text{im Falle (B, 2)} & \psi(a, \varkappa_1) + \psi(b, \varkappa_1) < 0, \\ \text{im Falle (B, 3)} & \psi(a, \varkappa_1) + \psi(b, \varkappa_1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Bestimmt man also $\varkappa_0$ aus der Gleichung

$$(4) \qquad \frac{\gamma(a)+\varkappa_0}{\sigma(a)\,g(a)} + \frac{\gamma(b)+\varkappa_0}{\sigma(b)\,g(b)} = \psi(a,\varkappa_0) + \psi(b,\varkappa_0) = 0,$$

so erkennt man, daß der Fall (B, 1) nur für $\varkappa_1 > \varkappa_0$ eintreten kann, der Fall (B, 2) nur für $\varkappa_1 < \varkappa_0$ und der Fall (B, 3) nur für $\varkappa_1 = \varkappa_0$. Definiert man die Funktionen $\varkappa_0(a,b)$ und $\mu(a,b)$ durch die Gleichungen

$$(5) \quad \varkappa_0(a,b) = -\frac{\sigma(b)\,g(b)\,\gamma(a)+\sigma(a)\,g(a)\,\gamma(b)}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}, \quad \mu(a,b) = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)},$$

so erhält man aus (4)

$$(6) \qquad \varkappa_0 = \varkappa_0(a,b), \quad -\psi(a,\varkappa_0) = \psi(b,\varkappa_0) = \mu(a,b).$$

Gemäß § 5 (14) kann für $\varkappa_1 = \varkappa_0$ der Fall (B, 3) nur dann eintreten, wenn für

$$(7) \qquad a < u < b \quad \psi(a,\varkappa_0) < \psi(u,\varkappa_0) < \psi(b,\varkappa_0)$$

bleibt, und ferner noch

$$(8) \qquad \psi'(a,\varkappa_0) > 0, \quad \psi'(b,\varkappa_0) > 0$$

ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat gemäß den Sätzen V und VI die Extremale dann und nur dann den Typus (B, 3), wenn die beiden Ungleichungen § 5 (29) gelten, d. h. also wenn

$$(9) \qquad L \geqq L'(a,b,\varkappa_0,\mu) \quad \text{und} \quad L \geqq L''(a,b,\varkappa_0,\mu)$$

ist. Da $\varkappa_0$ und μ vermöge (5) Funktionen von a und b sind, so darf man setzen

$$(10) \qquad L'(a,b) = L'(a,b,\varkappa_0,\mu), \quad L''(a,b) = L''(a,b,\varkappa_0,\mu).$$

Setzt man noch

$$(11) \qquad \overline{L}(a,b) = \max\left(L'(a,b),\ L''(a,b)\right),$$

so ist das gleichzeitige Bestehen der Ungleichungen (9) gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$(12) \qquad L \geqq \overline{L}(a,b).$$

Dabei sind vermöge des zweiten Hilfssatzes des § 5 und der Stetigkeit der Funktionen $\varkappa_0(a,b)$ und $\mu(a,b)$ die Funktionen $L'(a,b)$, $L''(a,b)$ und mithin auch $\overline{L}(a,b)$ in a und b stetig. Da ferner gemäß den Definitionsgleichungen § 5 (20), (25) der Funktionen $L'(a,b,\varkappa,q)$ und $L''(a,b,\varkappa,q)$ immer eine von ihnen größer oder gleich $2\,S(a,b,\varkappa,q)$ sein muß, so folgt bei Berücksichtigung von § 5 (2), (3)

$$(13) \qquad \overline{L}(a,b) \geqq 2\,S(a,b,\varkappa_0,\mu) > 2\int_a^b \sigma(u)\,du.$$

Berücksichtigen wir noch, daß die isoperimetrische Fundamentalungleichung für alle Wertepaare $\varkappa, q$, $q \geqq m(\varkappa)$, wenn auch nicht als genaue Schranke, Geltung behält, so ergibt sich der folgende Satz:

Satz VIII. *Es seien a, b, $a < b$, im Bereiche* (2) *vorgeschrieben. Man definiere durch* (5), (6) $\varkappa_0$ *und* μ *als Funktionen von* a *und* b. *Ist dann für* $a < u < b$

$$\psi(a, \varkappa_0) \leqq \psi(u, \varkappa_0) \leqq \psi(b, \varkappa_0)$$

oder gleichbedeutend

$$|\psi(u, \varkappa_0)| \leqq \mu,$$

so gilt für alle in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ *eingeschriebenen einfachen, geschlossenen Kurven die lineare isoperimetrische Ungleichung*

$$J \leqq \mu L - 2\int_a^b \sqrt{\mu^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}\, \sigma(u)\, du. \tag{14}$$

Gelten vollends die Ungleichungen (7), (8), *so wird in der obigen isoperimetrischen Ungleichung für*

$$L \geqq \bar{L}(a, b) \tag{15}$$

die Gleichheit von einer und bis auf die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse nur von einer Kurve erreicht. Diese besitzt den Typus (B, 3).

Ist dagegen

$$2\int_a^b \sigma(u)\, du < L < \bar{L}(a, b),$$

oder sind die Ungleichungen (7), (8) *nicht beide erfüllt, so kann die obige isoperimetrische Schranke gemäß Satz* III *durch eine kleinere ersetzt werden, die dann ebenfalls von einer und bis auf die Verschiebung parallel zur v-Achse nur von einer Kurve erreicht wird. Diese ist eine Extremale vom Typus* (A), (B, 1) *oder* (B, 2).

§ 8.

Das Kriterium für das Auftreten der linearen isoperimetrischen Ungleichung.

Die lineare isoperimetrische Ungleichung besitzt neben dem Vorzug des linearen Charakters noch den der expliziten Darstellung. Es entbehrt daher nicht des Interesses, einfache Kriterien für ihr Auftreten als genaue Schranke festzustellen. Das geschieht durch die folgenden Sätze:

Satz IX. *Die gemäß Satz* VIII *für das Auftreten der linearen isoperimetrischen Ungleichung als genaue Schranke notwendigen und hinreichenden Bedingungen* § 7 (7) *und* (8) *lassen sich folgendermaßen in eine leichter nachprüfbare Gestalt bringen: Die Bedingung* § 7 (7) *ist gleichbedeutend mit dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Ungleichungen*

(1) . für $a < u < b$ $\quad \mu(a, b) > \mu(u, b)$ und $\mu(a, b) > \mu(a, u)$.

Die Bedingung (8) *ist gleichbedeutend mit dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Ungleichungen*

$$\mu_a(a, b) < 0, \quad \mu_b(a, b) > 0. \tag{2}$$

Beweis. Es gelten die beiden Identitäten

$$(3)\qquad \psi(b,x_0)-\psi(u,x_0)=\frac{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(u)\,g(u)}{\sigma(u)\,g(u)}\{\mu(a,b)-\mu(a,u)\},$$

$$(4)\qquad \psi(u,x_0)-\psi(a,x_0)=\frac{\sigma(u)\,g(u)+\sigma(b)\,g(b)}{\sigma(u)\,g(u)}\{\mu(a,b)-\mu(u,b)\}.$$

Denn es ist wegen § 7 (5), (6)

$$\begin{aligned}\psi(b,x_0)-\psi(u,x_0)&=\mu(a,b)-\frac{\gamma(u)+x_0}{\sigma(u)\,g(u)}\\&=\mu(a,b)-\frac{1}{\sigma(u)\,g(u)}\Big\{(\sigma(a)\,g(a)+\sigma(u)\,g(u))\,\frac{\gamma(u)-\gamma(a)}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(u)\,g(u)}+\\&\qquad+\sigma(a)\,g(a)\,\frac{\gamma(a)+x_0}{\sigma(a)\,g(a)}\Big|\\&=\mu(a,b)-\frac{(\sigma(a)\,g(a)+\sigma(u)\,g(u))\,\mu(a,u)-\sigma(a)\,g(a)\,\mu(a,b)}{\sigma(u)\,g(u)}\\&=\frac{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(u)\,g(u)}{\sigma(u)\,g(u)}\{\mu(a,b)-\mu(a,u)\}.\end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned}\psi(u,x_0)-\psi(a,x_0)&=\mu(a,b)+\frac{\gamma(u)+x_0}{\sigma(u)\,g(u)}\\&=\mu(a,b)+\frac{1}{\sigma(u)\,g(u)}\Big\{-(\sigma(u)\,g(u)+\sigma(b)\,g(b))\,\frac{\gamma(b)-\gamma(u)}{\sigma(u)\,g(u)+\sigma(b)\,g(b)}+\\&\qquad+\sigma(b)\,g(b)\,\frac{\gamma(b)+x_0}{\sigma(b)\,g(b)}\Big|\\&=\mu(a,b)+\frac{-(\sigma(u)\,g(u)+\sigma(b)\,g(b))\,\mu(u,b)+\sigma(b)\,g(b)\,\mu(a,b)}{\sigma(u)\,g(u)}\\&=\frac{\sigma(u)\,g(u)+\sigma(b)\,g(b)}{\sigma(u)\,g(u)}\{\mu(a,b)-\mu(u,b)\}.\end{aligned}$$

Jetzt dividiere man die erste der soeben hergeleiteten beiden Identitäten durch $b-u$ und lasse u gegen b konvergieren. Ebenso dividiere man die zweite durch $u-a$ und lasse u gegen a konvergieren. So ergeben sich die Gleichungen

$$(5)\qquad \psi'(b,x_0)=\frac{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}{\sigma(b)\,g(b)}\,\mu_b(a,b),$$

$$(6)\qquad \psi'(a,x_0)=-\frac{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}{\sigma(a)\,g(a)}\,\mu_a(a,b).$$

Die Gleichungen (3), (4), (5), (6) setzen die zu beweisenden Behauptungen in Evidenz.

Satz X. *Von den nachstehenden vier sich auf alle Wertepaare a, b, $(a<b)$, des Bereiches* § 1 (2) *beziehenden Aussagen folgen aus jeder die drei anderen.*

Aussage 1. *Für jedes Wertepaar a, b tritt die lineare isoperimetrische Ungleichung als genaue Schranke im Sinne von Satz* VIII *in Kraft, oder, was gemäß Satz* VI *gleichbedeutend ist, in jedem Streifen a, b sind Extremalen vom Typus* (B, 3) *eingeschrieben.*

Aussage 2. *Für jedes Wertepaar a, b gelten die Ungleichungen* § 7 (7) *und* (8).

Aussage 3. *Für jedes Wertepaar (a, b) gilt im Intervall*

$$a \leqq u \leqq b \qquad \psi'(u, x_0) > 0. \tag{7}$$

Aussage 4. *Für jedes Wertepaar a, b gilt*

$$\mu_a\ (a, b) < 0, \quad \mu_b(a, b) > 0.$$

Zusatz zu Satz X. Der Satz X bleibt, wie aus seinem nachstehenden Beweise einleuchtet, unverändert bestehen, wenn die vier Aussagen sich auf eine beliebige offene oder abgeschlossene, endliche oder unendliche Teilstrecke des Bereiches § 1 (2) beziehen.

Beweis. Daß aus der Aussage 2 die Aussage 1 folgt und umgekehrt, ist schon in Satz VIII enthalten. Ebenso ist schon in Satz IX enthalten, daß aus der Aussage 2 die Aussage 4 folgt. Ferner folgt aus der Aussage 4 auch die Aussage 2. Denn da die Aussage 4 für alle Wertepaare a, b gilt, so folgen aus ihr die Ungleichungen (1) des laufenden Paragraphen und aus diesen gemäß Satz IX die Ungleichung § 7 (7), während die Ungleichung § 7 (8) wegen Satz IX (2) in der Aussage 4 enthalten ist. Endlich ist es klar, daß die Aussage 3 die Aussage 2 als unmittelbare Konsequenz in sich schließt. Es erübrigt also lediglich noch der Nachweis dafür, daß aus der Aussage 2 auch die Aussage 3 folgt. Dieser soll jetzt geführt werden.

An den Stellen $u = a$ und $u = b$ ist die Aussage 3 in der Aussage 2 enthalten. Es sei nun $a < u^* < b$. Wir müssen die drei Fälle

$$\psi(u^*, x_0) = 0, \quad \psi(u^*, x_0) > 0, \quad \psi(u^*, x_0) < 0$$

unterscheiden. Im ersten Fall hat man

$$\psi'(u^*, x_0) = \frac{d}{du}\left(\frac{\gamma(u) + x_0}{\sigma(u)\, g(u)}\right)_{u = u^*}$$

$$= \frac{\tau(u^*)}{\sigma(u^*)} - \frac{\psi(u^*, x_0)}{\sigma(u^*)\, g(u^*)}\left(\sigma'(u^*)\, g(u^*) + \sigma(u^*)\, g'(u^*)\right) = \frac{\tau(u^*)}{\sigma(u^*)} > 0.$$

Im zweiten Fall ist gemäß Aussage 2

$$\psi(u^*, x_0) < \psi(b, x_0)$$

und mithin wegen § 7 (4)

$$\psi(a, x_0) + \psi(u^*, x_0) < 0.$$

Da voraussetzungsgemäß

$$\psi(u^*, x_0) + \psi(u^*, x_0) = 2\,\psi(u^*, x_0) > 0$$

ist, so gibt es zwischen a und u^* mindestens einen Wert a^*, für welchen

$$\psi(a^*, x_0) + \psi(u^*, x_0) = 0$$

wird. Um hervorzuheben, daß $\varkappa_0$ durch § 7 (5) als Funktion von a und b definiert ist, schreiben wir

$$\psi(a^*, \varkappa_0(a, b)) + \psi(u^*, \varkappa_0(a, b)) = 0.$$

Nun ist gemäß § 7 (4), (5) $\varkappa_0(a^*, u^*)$ durch die Gleichung

$$\psi(a^*, \varkappa_0(a^*, u^*)) + \psi(u^*, \varkappa_0(a^*, u^*)) = 0$$

eindeutig definiert. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt also

$$\varkappa_0(a^*, u^*) = \varkappa_0(a, b).$$

Da die Aussage 2 für alle Wertepaare a, b gilt, so gilt sie auch für das Wertepaar a^*, u^*; es gilt daher

$$\psi'(u^*, \varkappa_0(a^*, u^*)) > 0$$

und mithin wegen der unmittelbar vorhergehenden Gleichung

$$\psi'(u^*, \varkappa_0(a, b)) > 0.$$

Damit ist die zu beweisende Aussage 3 auch für den Fall

$$\psi(u^*, \varkappa_0) > 0$$

festgestellt.

Es sei endlich

$$\psi(u^*, \varkappa_0) < 0.$$

Gemäß Aussage 2 ist

$$\psi(u^*, \varkappa_0) > \psi(a, \varkappa_0)$$

und mithin wegen § 7 (4)

$$\psi(u^*, \varkappa_0) + \psi(b, \varkappa_0) > 0.$$

Da voraussetzungsgemäß

$$\psi(u^*, \varkappa_0) + \psi(u^*, \varkappa_0) = 2\,\psi(u^*, \varkappa_0) < 0$$

ist, so gibt es zwischen u^* und b mindestens einen Wert b^*, für welchen

$$\psi(u^*, \varkappa_0) + \psi(b^*, \varkappa_0) = 0$$

wird. Um hervorzuheben, daß $\varkappa_0$ eine Funktion von a und b ist, schreiben wir

$$\psi(u^*, \varkappa_0(a, b)) + \psi(b^*, \varkappa_0(a, b)) = 0.$$

Nun ist gemäß § 7 (4), (5) $\varkappa_0(u^*, b^*)$ durch die Gleichung

$$\psi(u^*, \varkappa_0(u^*, b^*)) + \psi(b^*, \varkappa_0(u^*, b)) = 0$$

eindeutig definiert. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt also

$$\varkappa_0(u^*, b^*) = \varkappa_0(a, b).$$

Da die Aussage 2 für alle Wertepaare a, b gilt, so gilt sie auch für das Wertepaar u^*, b^*; es ist daher

$$\psi'(u^*, \varkappa_0(u^*, b^*)) > 0$$

und mithin wegen der unmittelbar vorhergehenden Gleichung

$$\psi'(u^*, \varkappa_0(a, b)) > 0.$$

Damit ist der allein noch zu führende Nachweis dafür, daß aus der Aussage 2 auch die Aussage 3 folgt, für alle drei Fälle erbracht. *Der Satz* **X** *ist also vollständig bewiesen.*

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Aussage 3 des Satzes X gemäß § 6 (1), (2), (22), (23) die folgende anschauliche Bedeutung besitzt.

Man messe den Winkel, der in einem Punkte von einer gegebenen Richtung mit der Richtung des wachsenden u gebildet wird, in dem Sinne, daß der Winkel zwischen den Richtungen des wachsenden u und des wachsenden v gleich $\pi/2$ wird. Durchläuft man nun eine Extremale vom Typus (B, 3) in dem am Eingang dieser Arbeit festgelegten Durchlaufungssinn, so wächst der Winkel, welchen die äußere Normalenrichtung mit der Richtung des wachsenden u bildet, monoton, und zwar auf den symmetrischen Bögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ eigentlich monoton, auf dem ersteren von $-\pi$ bis 0 und auf dem letzteren von 0 bis π.

Im Falle der klassischen isoperimetrischen Aufgabe wird ein einfaches hinreichendes Kriterium noch durch den folgenden Satz gegeben:

Satz XI. *Es sei* $\sigma(u) = \tau(u) = 1$. *Wenn dann die Funktion* $\log g(u)$ *nach oben konvex ist, und a fortiori, wenn die Funktion* $g(u)$ *nach oben konvex ist, so gelten die vier Aussagen des Satzes X. Es gilt dann ferner auch für die Extremalen vom Typus* (A), (B, 1), (B, 2), *d. h. also gemäß Satz VI für alle Extremalen im Intervall*

$$a \leqq u \leqq b \qquad \psi'(u, \varkappa_1) > 0 \tag{9}$$

mit der dieser Ungleichung im Anschluß an den Satz X gegebenen geometrischen Deutung.

Beweis. Daß die Funktionen $\log g(u)$ bzw. $g(u)$ nach oben konvex sind, wird durch die Gleichungen

$$\frac{d^2}{du^2} \log g(u) = \frac{d}{du} \frac{g'(u)}{g(u)} = \frac{g(u)\, g''(u) - g'(u)^2}{g(u)^2} \leqq 0, \quad \text{bzw. } g''(u) \leqq 0 \tag{10}$$

ausgedrückt. Daraus folgt zunächst unmittelbar, daß die Konvexität nach oben von $g(u)$ diejenige von $\log g(u)$ a fortiori mit sich bringt.

Nun ist wegen $\sigma(u) = \tau(u) = 1$

$$\psi'(u, \varkappa) = \frac{d}{du} \frac{\gamma(u) + \varkappa}{g(u)} = 1 - (\gamma(u) + \varkappa) \frac{g'(u)}{g(u)^2}.$$

Setzt man also

$$\Phi(u) = g(u)\, \psi'(u, \varkappa), \tag{11}$$

so ergibt sich

$$\Phi(u) = g(u) - (\gamma(u) + \varkappa)) \frac{g'(u)}{g(u)}, \quad \frac{d}{du} \Phi(u) = -(\gamma(u) + \varkappa) \frac{d}{du} \frac{g'(u)}{g(u)}. \tag{12}$$

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, daß $\psi(u, \varkappa)$ im Bereich § 1 (2) eine Nullstelle besitze, die mit u_0 bezeichnet werden möge. Dann ist

$$\text{für } u > u_0 \quad \gamma(u) + \varkappa > 0, \qquad \text{für } u < u_0 \quad \gamma(u) + \varkappa < 0$$

und mithin wegen der ersten Ungleichung (10) und der zweiten Gleichung (12)

$$\text{für } u > u_0 \quad \frac{d\Phi}{du} \geqq 0, \quad \text{für } u < u_0 \quad \frac{d\Phi}{du} \leqq 0.$$

Die Funktion $\Phi(u)$ nimmt also im Bereich § 1 (2) an der Stelle u_0 ihr Minimum an, und da

$$\Phi(u_0) = g(u_0) > 0$$

ist, so folgt für den ganzen Bereich $\Phi(u) > 0$ und mithin wegen der $\Phi(u)$ definierenden Gleichung (11) auch

$$\psi'(u, \varkappa) > 0.$$

Nun besitzt die Funktion $\psi(u, \varkappa_0)$ gemäß § 7 (4) im Intervall $a \leqq u \leqq b$ eine Nullstelle. Es gilt daher im ganzen Bereich § 1 (2) und a fortiori im Intervall $a \leqq u \leqq b$ $\psi'(u, \varkappa_0) > 0$. Das ist aber die Aussage 3 des Satzes X, aus welcher dann die drei anderen Aussagen folgen.

Ferner besitzt gemäß Satz VII § 6 auch in den Fällen (A), (B, 1), (B, 2) $\psi(u, \varkappa_1)$ eine Nullstelle im Intervall $a \leqq u \leqq b$. Mithin ist auch in diesen Fällen, d. h. also für alle Extremalen $\psi'(u, \varkappa_1)$ beständig positiv, was allein noch zu beweisen war.

Im allgemeinen Fall hat man

$$\psi'(u, \varkappa) = \frac{\tau(u)}{\sigma(u)} - (\gamma(u) + \varkappa) \frac{(\sigma(u)\, g(u))'}{(\sigma(u)\, g(u))^2}.$$

Setzt man daher

$$\Phi(u) = g(u) \frac{\sigma(u)^2}{\tau(u)} \quad \psi'(u, \varkappa) = \sigma(u)\, g(u) - (\gamma(u) + \varkappa) \frac{(\sigma(u)\, g(u))'}{\tau(u)\, g(u)},$$

so ergibt sich

$$\Phi'(u) = -(\gamma(u) + \varkappa) \frac{d}{du} \left[\frac{(\sigma(u)\, g(u))'}{\tau(u)\, g(u)}\right].$$

Die Wiederholung des Beweisganges des Satzes XI führt daher zum

Satz XI'. Wenn die Funktion

$$\frac{(\sigma(u)\, g(u))'}{\tau(u)\, g(u)}$$

mit wachsendem u nicht zunimmt, so gelten die vier Aussagen des Satzes X. Es ist dann auch bei allen Extremalen $\psi'(u, \varkappa_1)$ positiv.

§ 9.

Die lineare isoperimetrische Ungleichung in der Euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrie.

Als Beispiel für die Anwendung der letzten Sätze betrachten wir die folgenden wohlbekannten sechs Linienelemente

1) $ds^2 = du^2 + dv^2$;

2) $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2 \qquad (u > 0)$;

3) $ds^2 = du^2 + \varrho^2 \sin^2 \frac{u}{\varrho}\, dv^2 \qquad \left(0 < \frac{u}{\varrho} < \pi\right)$;

4) $ds^2 = du^2 + e^{2\frac{u}{\varrho}} dv^2$;

5) $ds^2 = du^2 + \varrho^2 \sinh^2 \frac{u}{\varrho}\, dv^2 \qquad (u > 0)$;

6) $ds^2 = du^2 + \cosh^2 \frac{u}{\varrho}\, dv^2$.

Die ersten beiden Linienelemente entsprechen der Euklidischen Ebene in rechtwinkligen und Polarkoordinaten; das dritte entspricht der Oberfläche der Kugel vom Radius ϱ, wobei die Kurven $u = \text{const}$ Breitenkreise und die Kurven $v = \text{const}$ Meridiane darstellen; das vierte, fünfte und sechste entsprechen der hyperbolischen Ebene mit dem Krümmungsmaß $-\frac{1}{\varrho^2}$ — und zwar bilden die Kurven $u = \text{const}$ beim vierten Linienelement eine Schar äquidistanter Orizyklen, beim fünften eine Schar konzentrischer Kreise mit dem Mittelpunkt $u = 0$, beim sechsten die Äquidistanten der Geraden $u = 0$, während die Kurven $v = \text{const}$ natürlich bei allen Linienelementen Geraden sind.

Bei den ersten fünf dieser Linienelemente ist $\log g(u)$ nach oben konvex, bei den ersten drei sogar $g(u)$ selbst. Gemäß Satz XI gelten daher beim klassischen isoperimetrischen Problem, d. h. für $\sigma(u) = \tau(u) = 1$ in diesen Linienelementen die vier Aussagen des Satzes X. Insbesondere tritt also bei diesen fünf Linienelementen die lineare isoperimetrische Ungleichung im Sinne von Satz VIII als genaue Schranke in Kraft.

Setzt man

$$r = \frac{b-a}{2},$$

so ergibt die Definitionsgleichung § 7 (5) bei den beiden ersten Linienelementen

$$\mu(a, b) = r$$

und beim dritten Linienelement

$$\mu(a, b) = \varrho \frac{\cos\frac{a}{\varrho} - \cos\frac{b}{\varrho}}{\sin\frac{a}{\varrho} + \sin\frac{b}{\varrho}} = \varrho \operatorname{tg} \frac{r}{\varrho}.$$

Bei den Linienelementen 4), 5), 6) erhält man, wie die Identität

$$\frac{e^{\frac{b}{\varrho}}-e^{\frac{a}{\varrho}}}{e^{\frac{b}{\varrho}}+e^{\frac{a}{\varrho}}}=\frac{e^{-\frac{a}{\varrho}}-e^{-\frac{b}{\varrho}}}{e^{-\frac{a}{\varrho}}+e^{-\frac{b}{\varrho}}}=\frac{e^{\frac{r}{\varrho}}-e^{-\frac{r}{\varrho}}}{e^{\frac{r}{\varrho}}+e^{-\frac{r}{\varrho}}}$$

leicht ergibt

$$\mu(a,b)=\varrho\,\mathrm{tgh}\,\frac{r}{\varrho}.$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß $\mu(a,b)$ bei allen sechs Linienelementen mit wachsendem r zunimmt. Also gilt auch beim Linienelement 6), bei welchem $\log g(u)$ nicht nach oben konvex ist,

$$\mu_a(a,b)<0,\quad \mu_b(a,b)>0,$$

und es tritt daher gemäß dem Satz X *auch beim Linienelement* 6) *für jeden Streifen* a, b *die lineare isoperimetrische Ungleichung als genaue Schranke in Kraft, wobei die Koeffizienten der Ungleichung durch die Formeln* § 7 (14), (5) *explizite gegeben sind. Im* § 19 *wird sich herausstellen, daß diese Koeffizienten nur von der Krümmung des Linienelementes und der Breite* $2r$ *des Streifens abhängen, insbesondere also nicht von der speziellen Wahl des Linienelementes und von der Lage des Streifens.* Da im § 19 das isoperimetrische Problem auf Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung von einer höheren Warte zusammenhängend behandelt wird, so können wir an dieser Stelle, um Wiederholungen zu vermeiden, auf die weitere Diskussion verzichten.

§ 10.

Das asymptotische Verhalten der das Extremum angebenden Funktion $G(L,a,b)$.

Die Funktion $\Gamma(L,a,b,\varkappa,q)$ ist in ihrem durch die Ungleichungen

(1) $$\alpha<a<b<\beta,\quad 2\int_a^b\sigma(u)\,du<L,$$

(2) $$m(a,b,\varkappa)\leqq q$$

bestimmten Definitionsbereich in ihren fünf Argumenten stetig. Dabei bringt die erste Ungleichung lediglich die selbstverständliche Voraussetzung zum Ausdruck, daß a und b dem Definitionsbereich § 1 (2) der Funktionen $g(u)$, $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ angehören. Gemäß Satz III erreicht die Funktion $\Gamma(L,a,b,\varkappa,q)$ als Funktion von $\varkappa$ und q ihr Minimum an einer und nur einer Stelle $\varkappa_1, q_1$. Es sind daher $\varkappa_1, q_1$ und die das Minimum darstellende Funktion $\Gamma(L,a,b,\varkappa_1,q_1)$ eindeutige Funktionen von L, a und b, welche im Bereich (1) definiert sind. Man darf also schreiben

(3) $$\varkappa_1=\varkappa_1(L,a,b),\quad q_1=q_1(L,a,b),\quad \Gamma(L,a,b,\varkappa_1,q_1)=G(L,a,b).$$

Wir werden im folgenden Paragraphen die Stetigkeit dieser Funktionen beweisen und im nächstfolgenden ihre Ableitungen bestimmen. Im laufenden Paragraphen soll das asymptotische Verhalten dieser Funktionen bei Annäherung an die durch die Gleichungen

$$a = b, \quad L = 2\int_a^b \sigma(u)\,du$$

gegebenen natürlichen Grenzen des Definitionsbereiches festgestellt werden.

Satz XII. *Im Bereich* (1) *gelten die Ungleichungen*

$$-\gamma(b) < \varkappa_1 < -\gamma(a), \quad m(a, b, \varkappa_1) < \overline{m}(a, b), \tag{4}$$

wobei

$$\overline{m}(a, b) = \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{\underset{a \leqq u \leqq b}{\mathrm{Min}}\,(\sigma(u)\, g(u))} \tag{5}$$

gesetzt und mithin in a und b stetig ist.

Beweis. Wegen Satz VII § 6 ist

$$\frac{\gamma(a) + \varkappa_1}{\sigma(a)\, g(a)} = \psi(a, \varkappa_1) < 0, \qquad \frac{\gamma(b) + \varkappa_1}{\sigma(b)\, g(b)} = \psi(b, \varkappa_1) > 0$$

und mithin $\gamma(a) + \varkappa_1 < 0$, $\gamma(b) + \varkappa_1 > 0$, woraus die erste Ungleichung (4) folgt. Auf Grund dieses Resultats hat man ferner für $a \leqq u \leqq b$

$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} \geqq \frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} > \frac{\gamma(u) + \varkappa_1}{\sigma(u)\, g(u)} = \psi(u, \varkappa_1) > \frac{\gamma(u) - \gamma(b)}{\sigma(u)\, g(u)} \geqq \frac{\gamma(a) - \gamma(b)}{\sigma(u)\, g(u)}$$

und mithin

$$|\psi(u, \varkappa_1)| < \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} \leqq \overline{m}(a, b),$$

woraus sich die zweite Ungleichung (4) ablesen läßt.

Hilfssatz XIII. Man bestimme c durch die Gleichung

$$\int_a^b \frac{\psi(u, c)}{g(u)}\,du = 0, \tag{6}$$

woraus zunächst $\psi(a, c) < 0$, $\psi(b, c) > 0$ folgt und mithin wie oben

$$-\gamma(b) < c < -\gamma(a). \tag{6'}$$

$$m(a, b, c) < \overline{m}(a, b). \tag{6''}$$

Man erhält

$$c = c(a, b) = -\frac{\int_a^b \frac{\gamma(t)}{\sigma(t)\, g(t)^2}\,dt}{\int_a^b \frac{dt}{\sigma(t)\, g(t)^2}\,dt}. \tag{7}$$

Man setze ferner

$$\lambda^2 = \lambda(a,b)^2 = \int_a^b \psi(u,c)^2 \sigma(u)\, du, \quad \lambda(a,b) \geqq 0. \tag{8}$$

Dann ist natürlich, da $\psi(u,c)$ nicht identisch verschwinden kann,

$$\lambda(a,b) > 0,$$

und $c(a,b)$ und $\lambda(a,b)$ sind in a und b stetig.

Der zu beweisende Hilfssatz besteht nun darin, daß für alle Werte von $\varkappa$ die Gleichung gilt

$$\int_a^b \psi(u,\varkappa)^2 \sigma(u)\, du = \lambda(a,b)^2 + (\varkappa - c)^2 \int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\, g(u)^2}. \tag{9}$$

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned}\psi(u,\varkappa)^2 \sigma(u) &= \Big(\psi(u,c) + \frac{\varkappa - c}{\sigma(u)\, g(u)}\Big)^2 \sigma(u) \\ &= \psi(u,c)^2 \sigma(u) + \frac{(\varkappa - c)^2}{\sigma(u)\, g(u)^2} + 2(\varkappa - c)\frac{\psi(u,c)}{g(u)}.\end{aligned}$$

Die Einführung dieser Formel im Integranden auf der linken Seite der zu beweisenden Gleichung (9) ergibt wegen (6) und (8) den Beweis.

Das asymptotische Verhalten der Funktionen $\varkappa_1(L,a,b)$, $q_1(L,a,b)$, $G(L,a,b)$ bei Annäherung an die durch die Gleichung

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du = 0$$

gegebene Grenze des Definitionsbereiches wird durch den folgenden Satz klargestellt:

Satz XIV. *Setzt man zur Abkürzung*

$$\Delta = L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du, \tag{10}$$

so gelten die Ungleichungen

$$\lambda \Delta^{-\frac{1}{2}} < q_1 \leqq \lambda \Delta^{-\frac{1}{2}} + E_2 \Delta^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$2\lambda \Delta^{\frac{1}{2}} < G(L,a,b) < 2\lambda \Delta^{\frac{1}{2}} + E_1 \Delta^{\frac{3}{2}}, \tag{12}$$

$$c - E_3 \Delta^{\frac{1}{2}} \leqq \varkappa_1 \leqq c + E_3 \Delta^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Dabei sind λ und c durch (7) und (8) definiert, und es ist

$$E_1 = \frac{\overline{m}^4}{\lambda^3}\int_a^b \sigma(u)\, du, \quad E_2 = E_1 + \frac{\overline{m}^2}{2\lambda}, \quad E_3 = +\frac{\sqrt{\lambda E_1 + \frac{\lambda^2}{\overline{m}^2} E_1 E_2}}{\sqrt{\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\, g(u)^2}}},$$

wobei $\overline{m} = \overline{m}(a, b)$ gesetzt und $\overline{m}(a, b)$ durch (5) definiert ist. Ferner bedürfen die q_1 nach oben abschätzende Ungleichung (11), die $G(L, a, b)$ nach oben abschätzende Ungleichung (12) und die Ungleichungen (13) noch der Voraussetzung

$$\Delta < \frac{\lambda^2}{\overline{m}^2}. \tag{14}$$

Beweis. Die Differenz

$$L - 2\int_a^b \frac{q_1\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}} = L - 2\,S(x_1, q_1)$$

verschwindet gemäß § 5 (5) im Falle (A) und ist gemäß § 5 (30) in den Fällen (B, 1), (B, 2), (B, 3) nicht negativ. Also ist in allen Fällen

$$\Delta \geqq 2\int_a^b \frac{q_1\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}} - 2\int_a^b \sigma(u)\,du = 2\int_a^b \frac{q_1 - \sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}}\sigma(u)\,du \tag{15}$$

$$= 2\int_a^b \frac{\psi(u, x_1)^2\,\sigma(u)\,du}{(q_1 + \sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2})\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}} > \frac{1}{q_1^2}\int_a^b \psi(u, x_1)^2\,\sigma(u)\,du$$

und mithin wegen (9) bei Weglassung eines positiven Summanden

$$\Delta > \frac{\lambda^2}{q_1^2}, \tag{16}$$

womit die q_1 nach unten abschätzende Ungleichung (11) bewiesen ist.

Nun ist gemäß der Definitionsgleichung § 3 (1)

$$\Gamma(L, a, b, x, q) = q\Delta + 2\int_a^b \left(q - \sqrt{q^2 - \psi(u, x)^2}\right)\sigma(u)\,du \tag{17}$$

$$= q\Delta + 2\int_a^b \frac{\psi(u, x)^2\,\sigma(u)\,du}{q + \sqrt{q^2 - \psi(u, x)^2}},$$

$$\frac{\psi(u, x)^2}{q + \sqrt{q^2 - \psi(u, x)^2}} = \frac{\psi(u, x)^2}{2q} + \frac{\psi(u, x)^2\,(q - \sqrt{q^2 - \psi(u, x)^2})}{2q\,(q + \sqrt{q^2 - \psi(u, x)^2})}$$

$$= \frac{\psi(u, x)^2}{2q} + \frac{\psi(u, x)^4}{2q\,(q + \sqrt{q^2 - \psi(u, x)^2})^2} < \frac{\psi(u, x)^2}{2q} + \frac{\overline{m}^4}{2q^3}.$$

Die Einführung in (17) ergibt

$$\Gamma(L, a, b, x, q) < q\Delta + \frac{1}{q}\int_a^b \psi(u, x)^2\,\sigma(u)\,du + \frac{\overline{m}^4}{q^3}\int_a^b \sigma(u)\,du, \tag{18}$$

$$\Gamma(L, a, b, x, q) > q\Delta + \frac{1}{q}\int_a^b \psi(u, x)^2\,\sigma(u)\,du. \tag{19}$$

Aus der letzten Ungleichung erhält man wegen (9)

$$\Gamma(L,a,b,\varkappa,q) > q\Delta + \frac{\lambda^2}{q} + \frac{(\varkappa-c)^2}{q}\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\,g(u)^2}. \tag{20}$$

Nun erreicht der Ausdruck

$$x\Delta + \frac{\lambda^2}{x}$$

als Funktion von x sein Minimum an der Stelle

$$x = \xi, \quad \xi = \lambda\Delta^{-\frac{1}{2}} \tag{21}$$

und dieses Minimum ist $2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}}$. Also ergibt (20)

$$\Gamma(L,a,b,\varkappa,q) > 2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + \frac{(\varkappa-c)^2}{q}\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\,g(u)^2}. \tag{22}$$

Wegen der Definitionsgleichung (3) der Extremalfunktion $G(L,a,b)$ hat man also

$$G(L,a,b) > 2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + \frac{(\varkappa_1-c)^2}{q_1}\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\,g(u)^2} \geqq 2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

womit die $G(L,a,b)$ nach unten abschätzende Ungleichung (12) bewiesen ist.

Andererseits ist wegen der Minimumseigenschaft durch welche die Funktion $G(L,a,b)$ definiert ist,

$$G(L,a,b) \leqq \Gamma(L,a,b,c,\xi). \tag{24}$$

Dabei muß aber gemäß (2) $\xi \geqq m(a,b,c)$ sein, was wegen (21) und (6″) durch die Voraussetzung (14) gesichert ist. Schätzt man jetzt die rechte Seite von (24) mittels (18) ab, so ergibt sich bei Berücksichtigung von (21) und (8)

$$G(L,a,b) < \xi\Delta + \frac{\lambda^2}{\xi} + \frac{\bar{m}^4}{\xi^3}\int_a^b \sigma(u)\,du = 2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + E_1\Delta^{\frac{3}{2}}.$$

Damit ist auch die $G(L,a,b)$ nach oben abschätzende Ungleichung (12) bewiesen.

Wir kommen jetzt zum Beweise der q_1 nach oben abschätzenden Ungleichung (11).

Aus der schon bewiesenen ersten Ungleichung (11) und der Voraussetzung (14) folgt $q_1 > m$ und mithin wegen (4) $q_1 > m(a,b,\varkappa_1)$. Es liegt also der Fall (A) vor, und man hat wegen § 5 (5)

$$L - 2\int_a^b \frac{q_1\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u,\varkappa_1)^2}} = 0.$$

Man erhält also entsprechend (15)

$$(25)\quad \Delta = 2\int_a^b \frac{q_1\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2-\varphi(u,x_1)^2}} - 2\int_a^b \sigma(u)\,du$$

$$= 2\int_a^b \frac{\varphi(u,x_1)^2\,\sigma(u)\,du}{(q_1+\sqrt{q_1^2-\varphi(u,x_1)^2})\sqrt{q_1^2-\varphi(u,x_1)^2}} < \frac{2}{\sqrt{q_1^2-\bar{m}^2}}\int_a^b \frac{\varphi(u,x_1)^2\,\sigma(u)\,du}{q_1+\sqrt{q_1^2-\varphi(u,x_1)^2}}.$$

Nun ist wegen (17)

$$2\int_a^b \frac{\varphi(u,x_1)^2\,\sigma(u)\,du}{q_1+\sqrt{q_1^2-\varphi(u,x_1)^2}} = \Gamma(L,a,b,x_1,q_1) - q_1\Delta = G(L,a,b) - q_1\Delta.$$

Man hat also

$$\Delta < \frac{G(L,a,b) - q_1\Delta}{\sqrt{q_1^2-\bar{m}^2}}$$

und wegen der schon bewiesenen q_1 nach unten und $G(L,a,b)$ nach oben abschätzenden Ungleichungen (11) und (12)

$$\Delta < \frac{G(L,a,b) - \lambda\Delta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{q_1^2-\bar{m}^2}} < \frac{\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + E_1\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{q_1^2-\bar{m}^2}},$$

$$q_1^2 < (\lambda\Delta^{-\frac{1}{2}} + E_1\Delta^{\frac{1}{2}})^2 + \bar{m}^2 < \left(\lambda\Delta^{-\frac{1}{2}} + \left(E_1 + \frac{\bar{m}^2}{2\lambda}\right)\Delta^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= (\lambda\Delta^{-\frac{1}{2}} + E_2\Delta^{\frac{1}{2}})^2.$$

Damit ist auch die q_1 nach oben abschätzende Ungleichung (11) bewiesen.

Endlich folgt aus (23) und der schon bewiesenen $G(L,a,b)$ nach oben abschätzenden Ungleichung (12)

$$2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + \frac{(x_1-c)^2}{q_1}\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\,g(u)^2} < G(L,a,b) < 2\lambda\Delta^{\frac{1}{2}} + E_1\Delta^{\frac{3}{2}}$$

$$(x_1-c)^2\int_a^b \frac{\sigma u}{\sigma(u)\,g(u)^2} < E_1\Delta^{\frac{3}{2}} q_1$$

und wegen der schon bewiesenen q_1 nach oben abschätzenden Ungleichung (11)

$$(x_1-c)^2\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\,g(u)^2} < \lambda E_1\Delta + E_1E_2\Delta^2.$$

Hieraus folgt bei Berücksichtigung von (14)

$$(x_1-c)^2 < \frac{\lambda E_1 + \frac{\lambda^2}{\bar{m}^2}E_1E_2}{\int_a^b \frac{du}{\sigma(u)\,g(u)^2}}\Delta = E_3^2\Delta.$$

Damit sind auch die Ungleichungen (13) bewiesen.

Die eben bewiesenen Abschätzungen lassen sich beliebig weit verschärfen. Wie oben schon benutzt, gilt nämlich wegen der Voraussetzung (14) der Fall (A), und es bestehen daher die beiden Gleichungen § 5 (5) und (5'). Entwickelt man die linken Seiten dieser Gleichungen nach Potenzen von $(\varkappa_1 - c)$ und $\frac{1}{q_1}$, so erkennt man leicht, daß $\varkappa_1$ und $\frac{1}{q_1}$ bei genügend kleinem Δ sich als konvergente Potenzreihen von $\Delta^{\frac{1}{2}}$ darstellen lassen.

Zusatz zu Satz XIV. Die Abschätzung (12) von q_1 ist zwar bei kleinem Δ im Koeffizienten niedrigster Ordnung von Δ genau, aber bei großem nicht mehr der Voraussetzung (14) genügendem Δ nach oben ungültig. In der Folge benötigen wir aber einer für alle Werte von Δ gültigen Abschätzung von q_1 nach oben. Eine solche bietet die Ungleichung

$$q_1 < \vartheta \bar{m}, \quad \vartheta^2 = 1 + \frac{\int_a^b \sigma(u)\,du}{\Delta}. \tag{26}$$

Beweis. Ist $q_1 \leqq \bar{m}$, so ist (26) selbstverständlich. Wir können also $q_1 > \bar{m}$ annehmen. Dann liegt der Fall (A) vor, und man hat wegen (25) und (4)

$$\Delta < \frac{2}{\sqrt{q_1^2 - \bar{m}^2}} \int_a^b \frac{\varphi(u, \varkappa_1)^2 \sigma(u)\,du}{q_1 + \sqrt{q_1^2 - \varphi(u, \varkappa_1)^2}} <$$

$$< \frac{2\bar{m}^2}{\sqrt{q_1^2 - \bar{m}^2}\,(q_1 + \sqrt{q_1^2 - \bar{m}^2})} \int_a^b \sigma(u)\,du < \frac{\bar{m}^2}{q_1^2 - \bar{m}^2} \int_a^b \sigma(u)\,du,$$

$$\frac{q_1^2 - \bar{m}^2}{\bar{m}^2} < \frac{\int_a^b \sigma(u)\,du}{\Delta},$$

woraus die zu beweisende Ungleichung (26) folgt.

Das Verhalten der Extremalfunktion bei Annäherung an die durch die Gleichung

$$a = b$$

gegebene Grenze des Definitionsbereiches wird durch den folgenden Satz präzisiert:

Satz XV. *Es gilt die Ungleichung*

$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{2M_2}\left(L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du\right) < G(L, a, b) < \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{2M_1} L, \tag{27}$$

wobei

$$M_1 = \min_{a \leqq u \leqq b} \left(\sigma(u)\, g(u)\right), \qquad M_2 = \max_{a \leqq u \leqq b} \left(\sigma(u)\, g(u)\right) \tag{28}$$

gesetzt ist. Aus

(29) $a \to a^*,\ b \to a^*$ *folgt also* $\dfrac{G(L,a,b)}{(b-a)} \to \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma'(a^*)L}{\sigma(a^*)g(a^*)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\tau(a^*)L}{\sigma(a^*)}$.

Beweis. Es ist entsprechend (17)

(30) $$G(L,a,b) = \Gamma(L,a,b,\varkappa_1,q_1) > q_1\left(L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du\right).$$

Ferner ist definitionsmäßig bei Berücksichtigung von Satz VII § 6

$$m(a,b,\varkappa_1) \geqq |\psi(b,\varkappa_1)| = \psi(b,\varkappa_1) = \frac{\gamma(b)+\varkappa_1}{\sigma(b)\,g(b)} \geqq \frac{\gamma(b)+\varkappa_1}{M_2},$$

$$m(a,b,\varkappa_1) \geqq |\psi(a,\varkappa_1)| = -\psi(a,\varkappa_1) = \frac{-\gamma(a)-\varkappa_1}{\sigma(a)\,g(a)} \geqq \frac{-(\gamma(a)+\varkappa_1)}{M_2}.$$

Die Addition ergibt

$$m(a,b,\varkappa_1) \geqq \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2M_2}$$

und mithin wegen (2)

$$q_1 \geqq \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2M_2}.$$

Die Einführung in (30) ergibt die zu beweisende $G(L,a,b)$ nach unten abschätzende Ungleichung (27).

Setzt man andererseits

$$\bar{\varkappa} = -\frac{\gamma(a)+\gamma(b)}{2},$$

so ist für

$$a \leqq u \leqq b \quad \text{wegen} \quad \gamma(a) \leqq \gamma(u) \leqq \gamma(b) \quad |\gamma(u)+\bar{\varkappa}| \leqq \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2},$$

$$|\psi(u,\bar{\varkappa})| = \frac{|\gamma(u)+\bar{\varkappa}|}{\sigma(u)\,g(u)} \leqq \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2M_1}$$

und mithin

$$m(a,b,\bar{\varkappa}) \leqq \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2M_1}.$$

Setzt man daher

$$\bar{q} = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2M_1},$$

so ist

$$\bar{q} \geqq m(a,b,\bar{\varkappa}),$$

d. h. der Punkt $L, a, b, \bar{\varkappa}, \bar{q}$ gehört dem Definitionsbereich (1), (2) der Funktion $\Gamma(L,a,b,\varkappa,q)$ an. Nun gilt wegen der Minimumseigenschaft der Extremalfunktion $G(L,a,b)$

$$G(L,a,b) \leqq \Gamma(L,a,b,\bar{\varkappa},\bar{q}) < \bar{q}\,L = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{2M_1}L.$$

Damit ist auch die zweite, $G(L,a,b)$ nach oben abschätzende Ungleichung bewiesen.

§ 11.

Die Stetigkeit der Extremalfunktion $G(L, a, b)$ in ihren drei Argumenten.

Satz XVI. *Die Funktionen* $\varkappa_1(L, a, b)$, $q_1(L, a, b)$ *und* $G(L, a, b)$ *sind in ihrem Definitionsbereich* § 10 (1) *überall stetig.*

Beweis. Da die Funktion $\Gamma(L, a, b, \varkappa, q)$ in ihren fünf Argumenten stetig ist, und da $G(L, a, b)$ durch $\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, q_1)$ definiert ist, so sichert die Stetigkeit von $\varkappa_1(L, a, b)$ und $q_1(L, a, b)$ auch diejenige von $G(L, a, b)$. Wir haben also lediglich die Stetigkeit von $\varkappa_1$ und q_1 in L, a und b zu beweisen.

Es seien nun im Definitionsbereich § 10 (1) L^*, a^*, b^* ein Punkt und $L^{(n)}$, $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ eine unendliche gegen diesen Punkt konvergierende Folge.

$$L^{(n)} \to L^*, \quad a^{(n)} \to a^*, \quad b^{(n)} \to b^*. \tag{1}$$

Man setze

$$\varkappa_1^{(n)} = \varkappa_1(L^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}), \quad \varkappa_1^* = \varkappa_1(L^*, a^*, b^*), \quad q_1^{(n)} = q_1(L^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}),$$
$$q_1^* = q_1(L^*, a^*, b^*), \tag{2}$$

$$\Delta^{(n)} = L^{(n)} - 2\int_{a^{(n)}}^{b^{(n)}} \sigma(u)\, du, \quad \Delta^* = L^* - 2\int_{a^*}^{b^*} \sigma(u)\, du. \tag{3}$$

Dann ist wegen (1) und § 10 (1)

$$\Delta^{(n)} \to \Delta^*, \quad \Delta^{(n)} > 0, \quad \Delta^* > 0. \tag{4}$$

Diese Relationen in Verbindung mit dem Zusatz zu Satz XIV § 10 (26) sichern die Beschränktheit der Folge $q_1^{(n)}$. Da ferner gemäß Satz XII § 10 (4)

$$-\gamma(b^{(n)}) < \varkappa_1^{(n)} < -\gamma(a^{(n)})$$

ist, so sichert (1) auch die Beschränktheit der Folge $\varkappa_1^{(n)}$. Die Punktfolge $\varkappa_1^{(n)}$, $q_1^{(n)}$ hat mithin mindestens einen Häufungspunkt. Es sei $\tilde{\varkappa}$, $\tilde{q}$ ein solcher, und es seien n_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, die Indizes einer unendlichen Teilfolge, für welche

$$\varkappa_1^{(n_\nu)} \to \tilde{\varkappa}, \quad q_1^{(n_\nu)} \to \tilde{q} \tag{5}$$

gilt. Zunächst ist jetzt wegen § 10 (2)

$$q_1^{(n_\nu)} \geqq m(a^{(n_\nu)}, b^{(n_\nu)}, \varkappa_1^{(n_\nu)}),$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit der Funktion $m(a, b, \varkappa)$ in ihren drei Argumenten auf Grund von (1) und (5)

$$\tilde{q} \geqq m(a^*, b^*, \tilde{\varkappa}).$$

Der Punkt $L^*, a^*, b^*, \tilde{x}, \tilde{q}$ gehört somit dem Definitionsbereich § 10 (1), (2) der Funktion $\Gamma(L, a, b, x, q)$ an, und man hat wegen der Stetigkeit dieser Funktion auf Grund von (1) und (5)

$$\Gamma(L^{(n_\nu)}, a^{(n_\nu)}, b^{(n_\nu)}, x_1^{(n_\nu)}, q_1^{(n_\nu)}) \to \Gamma(L^*, a^*, b^*, \tilde{x}, \tilde{q}). \tag{6}$$

Man setze nun

$$q^{*(n)} = m(a^{(n)}, b^{(n)}, x_1^*) + q_1^* - m(a^*, b^*, x_1^*).$$

Dann ist, da gemäß § 10 (2)

$$q_1^* \geqq m(a^*, b^*, x_1^*)$$

ist, auch

$$q^{*(n)} \geqq m(a^{(n)}, b^{(n)}, x_1^*)$$

und der Punkt $L^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}, x_1^*, q^{*(n)}$ gehört mithin dem Definitionsbereich der Funktion $\Gamma(L, a, b, x, q)$ an. Ferner gilt wegen der Stetigkeit der Funktion $m(a, b, x)$ in ihren drei Argumenten auf Grund von (1)

$$q^{*(n)} \to q_1^*$$

und mithin

$$\Gamma(L^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}, x_1^*, q^{*(n)}) \to \Gamma(L^*, a^*, b^*, x_1^*, q_1^*).$$

Daher gilt auch

$$\Gamma(L^{(n_\nu)}, a^{(n_\nu)}, b^{(n_\nu)}, x_1^*, q^{*(n_\nu)}) \to \Gamma(L^*, a^*, b^*, x_1^*, q_1^*). \tag{7}$$

Da nun definitionsmäßig

$$\Gamma(L^{(n_\nu)}, a^{(n_\nu)}, b^{(n_\nu)}, x_1^{(n_\nu)}, q_1^{(n_\nu)})$$

das Minimum der Funktion

$$\Gamma(L^{(n_\nu)}, a^{(n_\nu)}, b^{(n_\nu)}, x, q)$$

bei festem $L^{(n_\nu)}, a^{(n_\nu)}, b^{(n_\nu)}$ darstellt, so kann die linke Seite von (6) nicht größer sein als die linke Seite von (7). Daher kann auch die rechte Seite von (6) nicht größer sein als die rechte Seite von (7). Da aber die letztere definitionsmäßig das Minimum der Funktion

$$\Gamma(L^*, a^*, b^*, x, q)$$

bei festem L^*, a^*, b^* darstellt, so müßte dieses Minimum auch an der Stelle $\tilde{x}, \tilde{q}$ erreicht werden. Nun wird aber dieses Minimum laut Satz III nur an einer einzigen Stelle angenommen. Folglich ist $\tilde{x} = x_1^*$, $\tilde{q} = q_1^*$. Die beschränkte unendliche Punktfolge $x_1^{(n)}, q_1^{(n)}$ hat mithin den einzigen Häufungspunkt x_1^*, q_1^* und konvergiert daher gegen diesen Punkt. Gemäß (2) gilt also als Konsequenz von (1)

$$x_1(L^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}) \to x_1(L_1^*, a^*, b^*), \quad q_1(L^{(n)}, a^{(n)}, b^{(n)}) \to q_1(L^*, a^*, b^*),$$

w. z. b. w.

§ 12.

Die Ableitungen der Extremalfunktion.

Im folgenden wird auch ohne besondere Erwähnung durchweg vorausgesetzt, daß der Punkt L, a, b dem Definitionsbereich § 10 (1) der Extremalfunktion $G(L, a, b)$ angehört. Die Punkte des Bereiches sollen je nachdem, ob in ihnen der Fall (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) eintritt, oder mit anderen Worten, ob die zugehörige Extremale den Typus (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) aufweist, in die Klassen (A), (B, 1), (B, 2), (B, 3) eingeteilt werden.

Das Eintreten des Falles (A) ist durch die Ungleichung

$$q_1 > m(a, b, \varkappa_1)$$

gesichert. Nun sind $\varkappa_1$ und q_1 gemäß Satz XVI stetige Funktionen von L, a und b und $m(a, b, \varkappa)$ ist eine stetige Funktion von $a, b, \varkappa$. Daraus folgt, daß im (L, a, b)-Raum die Klasse (A) eine *offene* Punktmenge bildet.

Ebenso folgt aus § 7 (3), daß ein Punkt der Klasse (B, 1) nicht Häufungspunkt der Klassen (B, 2) oder (B, 3) sein kann, und aus § 5 (3), (5′) bei Berücksichtigung des zweiten Hilfssatzes des § 5, daß er nur dann Häufungspunkt der Klasse (A) sein kann, wenn in ihm

$$V(a, b, \varkappa_1, q_1) = 0 \tag{1}$$

ist. Daher bilden diejenigen Punkte der Klasse (B, 1), in welchen

$$V(a, b, \varkappa_1, q_1) < 0 \tag{2}$$

ist, eine *offene* Punktmenge, wobei zu berücksichtigen ist, daß gemäß § 5 (31) in dieser Klasse

$$V(a, b, \varkappa_1, q_1) \leqq 0$$

bleibt.

Ebenso ergibt sich auf Grund von § 7 (3) und § 5 (5′), daß ein Punkt der Klasse (B, 2) nicht Häufungspunkt der Klassen (B, 1) und (B, 3) sein kann und nur dann Häufungspunkt der Klasse (A), wenn in ihm

$$V(a, b, \varkappa_1, q_1) = 0 \tag{3}$$

ist. Man erkennt daher, daß diejenigen Punkte der Klasse (B, 2), in welchen

$$V(a, b, \varkappa_1, q_1) > 0$$

ist, eine *offene* Punktmenge bilden, wobei zu berücksichtigen ist, daß gemäß § 5 (32) in der Klasse (B, 2)

$$V(a, b, \varkappa_1, q_1) \geqq 0$$

gilt.

Durch dieselbe Schlußweise folgt aus § 5 (20), (21), (25), (26), (29) bei Einführung der Bezeichnung § 7 (11) und der dort festgestellten Stetigkeit von

$L'(a,b)$, $L''(a,b)$ und $\overline{L}(a,b)$ in a und b, daß ein Punkt der Klasse (B, 3) nur dann Häufungspunkt der Klasse (B, 1) sein kann, wenn in ihm

(4) $$L = \overline{L}(a,b) = L'(a,b) \geqq L''(a,b), \quad V(a,b,\varkappa_0,\mu) \leqq 0$$

ist, oder, was gemäß § 6 (34) damit gleichbedeutend ist, wenn $l - s_3 = 0$ wird, d. h. wenn das auf der Kurve $u = a$ liegende Stück der Extremalen sich auf einen Punkt reduziert.

Ebenso folgt, daß ein Punkt der Klasse (B, 3) nur dann Häufungspunkt der Klasse (B, 2) sein kann, wenn in ihm

(5) $$L = \overline{L}(a,b) = L''(a,b) \geqq L'(a,b), \quad V(a,b,\varkappa_0,\mu) \geqq 0$$

ist, oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn das auf der Kurve $u = b$ liegende Stück der Extremalen sich auf einen Punkt reduziert.

Endlich ergibt sich in gleicher Weise bei Berücksichtigung von § 5 (5'), daß ein Punkt der Klasse (B, 3) nur dann Häufungspunkt der Klasse (A) sein kann, wenn in ihm

(6) $$L = \overline{L}(a,b) = L'(a,b) = L''(a,b), \quad V(a,b,\varkappa_0,\mu) = 0$$

ist, oder, was gemäß § 6 (34) damit gleichbedeutend ist, wenn die auf den Kurven $u = a$ und $u = b$ liegenden Stücke der Extremalen sich beide auf einen Punkt reduzieren.

Insbesondere folgt aus den obigen Feststellungen, daß die Punkte der Klasse (B, 3), für welche

(7) $$L > \overline{L}(a,b)$$

ist, eine *offene* Punktmenge bilden.

Es seien nun L', a, b und L'', a, b zwei beliebige Punkte des Definitionsbereiches § 10 (1). Definitionsgemäß ist dann

$$G(L',a,b) = \Gamma(L',a,b,\varkappa_1',q_1'), \quad \varkappa_1' = \varkappa_1(L',a,b), \quad q_1' = q_1(L',a,b), \quad q_1' \geqq m(a,b,\varkappa_1');$$

$$G(L'',a,b) = \Gamma(L'',a,b,\varkappa_1'',q_1''), \quad \varkappa_1'' = \varkappa_1(L'',a,b), \quad q_1'' = q_1(L'',a,b), \quad q_1'' \geqq m(a,b,\varkappa_1'').$$

Wegen der Minimumseigenschaft, durch welche die Funktion $G(L,a,b)$ definiert ist, gilt nun

$$\Gamma(L',a,b,\varkappa_1',q_1') \leqq \Gamma(L',a,b,\varkappa_1'',q_1''), \quad \Gamma(L'',a,b,\varkappa_1'',q_1'') \leqq \Gamma(L'',a,b,\varkappa_1',q_1').$$

Also ist bei Berücksichtigung der Definitionsgleichung § 3 (1) von $\Gamma(L,a,b,\varkappa,q)$

$$G(L'',a,b) - G(L',a,b) \leqq \Gamma(L'',a,b,\varkappa_1',q_1') - \Gamma(L',a,b,\varkappa_1'q_1') = q_1'(L'' - L'),$$

$$G(L'',a,b) - G(L',a,b) \geqq \Gamma(L'',a,b,\varkappa_1'',q_1'') - \Gamma(L',a,b,\varkappa_1'',q_1'') = q_1''(L'' - L'),$$

$$q_1''(L'' - L') \leqq G(L'',a,b) - G(L',a,b) \leqq q_1'(L'' - L').$$

Hieraus folgt zunächst, daß für

$$L'' > L', \quad q_1'' \geqq q_1' \tag{8}$$

ist, d. h. also, daß $q_1(L, a, b)$ bei festem a und b eine monotone, mit wachsendem L nicht zunehmende Funktion von L ist.

Da ferner gemäß Satz XVI $q_1(L, a, b)$ in L, a und b stetig ist, so folgt aus $L'' \to L'$ auch $q_1'' \to q_1'$. Mithin ergibt (8)

$$G_L(L, a, b) = q_1, \tag{9}$$

wobei für L' und q_1' wieder L und q_1 geschrieben sind.

Wir wollen jetzt die Ableitungen von $G(L, a, b)$ nach a und b bestimmen. Zu diesem Zweck sei der folgende Satz vorausgeschickt:

Satz XVII. *Die Ableitungen von $\varkappa_1$ und q_1 nach L, a und b sind in allen Punkten der Klasse* (A) *und in den inneren Punkten der Klassen* (B, 1), (B, 2), (B, 3) *bestimmt und stetig.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß der Punkt L, a, b der Klasse (A) angehört. Da diese, wie oben festgestellt, offen ist, so gelten die für die Klasse (A) bestehenden Gleichungen § 5 (5), (5′) auch in einer gewissen Umgebung des Punktes. Man hat also in dieser

$$\frac{L}{2} - S(\varkappa_1, q_1) = 0, \qquad V(\varkappa_1, q_1) = 0. \tag{10}$$

Nun ist wegen § 5 (1)

$$-\frac{\partial S(\varkappa_1, q_1)}{\partial \varkappa_1} = \frac{\partial V(\varkappa_1, q_1)}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)\,\sigma(u)\,du}{\sigma(u)\,g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}$$

$$= -\int_a^b \frac{q_1\,\psi(u, \varkappa_1)\,\sigma(u)\,du}{\sigma(u)\,g(u)\,(q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$-\frac{\partial S(\varkappa_1, q_1)}{\partial q_1} = -\frac{\partial}{\partial q_1}\int_a^b \frac{q_1\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = \int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)^2\,\sigma(u)\,du}{(q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial V(\varkappa_1, q_1)}{\partial \varkappa_1} = \frac{\partial}{\partial \varkappa_1}\int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)\,\sigma(u)\,du}{\sigma(u)\,g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = \int_a^b \frac{q_1^2\,\sigma(u)\,du}{\sigma(u)^2\,g(u)^2\,(q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man erhält also für die Funktionaldeterminante der linken Seiten der Gleichungen (10)

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial S}{\partial \varkappa_1}, & -\frac{\partial S}{\partial q_1} \\ \frac{\partial V}{\partial \varkappa_1}, & \frac{\partial V}{\partial q_1} \end{vmatrix} = \left\{\int_a^b \frac{q_1}{\sigma(u)\,g(u)}\,\psi(u, \varkappa_1)\,\frac{\sigma(u)\,du}{(q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2 -$$

$$-\int_a^b \left(\frac{q_1}{\sigma(u)\,g(u)}\right)^2 \frac{\sigma(u)\,du}{(q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^b \psi(u, \varkappa_1)^2\,\frac{\sigma(u)\,du}{(q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist die rechte Seite nicht positiv. Sie könnte nur dann verschwinden, wenn

$$\psi(u, \varkappa_1) = \text{Const}\, \frac{q_1}{\sigma(u)\, g(u)}$$

und mithin

$$\gamma(u) + \varkappa_1 = \text{Const}$$
$$\tau(u)\, g(u) = \gamma'(u) = 0$$

ist — im Widerspruch zu den Grundvoraussetzungen des Paragraphen 1. Also verschwindet die Funktionaldeterminante nirgends. Hieraus folgt, da die Ableitungen von $S(\varkappa_1, q_1)$ und $V(\varkappa_1, q_1)$ nach a, b, $\varkappa_1$ und q_1 offenbar stetig sind, die Stetigkeit der Ableitungen von $\varkappa_1$ und q_1 nach L, a und b.

Damit ist der zu führende Beweis für die Punkte der Klasse (A) erbracht.

Es sei nunmehr L, a, b ein innerer Punkt der Klasse (B, 1). Dann gilt die für diese Klasse bestehende Gleichung § 5 (21) auch in einer gewissen Umgebung des Punktes. Man hat also bei Berücksichtigung von § 5 (20), (3), da im Falle (B, 1) $m(\varkappa_1) = \psi(b, \varkappa_1)$ ist,

$$(11)\quad \frac{L - L'(a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1))}{\sigma(b)\, g(b)} = \frac{L}{\sigma(b)\, g(b)} - 2\int_a^b \frac{\frac{\psi(b, \varkappa_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \frac{\psi(u, \varkappa_1)}{\sigma(u)\, g(u)}}{\sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}\, \sigma(u)\, du = 0.$$

Hierbei ist es zweckmäßig, den Integranden auf der rechten Seite an der kritischen Stelle $u = b$ durch Null zu definieren. Er bleibt dann auch an dieser Stelle als Funktion von u, $\varkappa_1$ und b stetig. Das leuchtet ein, wenn man den Zähler nach dem ersten Mittelwertsatz abschätzt und den Nenner mittels § 5 (15^5) und (15^8).

Man erhält

$$(12)\quad \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{L - L'(a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1))}{\sigma(b)\, g(b)}\right\} = 2\, \frac{\frac{\psi(b, \varkappa_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \frac{\psi(a, \varkappa_1)}{\sigma(a)\, g(a)}}{\sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(a, \varkappa_1)^2}}\, \sigma(a),$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\, \frac{\left(\frac{\psi(b, \varkappa_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \frac{\psi(u, \varkappa_1)}{\sigma(u)\, g(u)}\right)}{\sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = -\frac{\psi(b, \varkappa_1)\, \frac{(\sigma(b)\, g(b))'}{(\sigma(b)\, g(b))^2}}{\sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} +$$

$$+ \psi'(b, \varkappa_1)\left(\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left\{\frac{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}{\sigma(b)\, g(b)} -\right.$$

$$\left. - \psi(b, \varkappa_1)\left(\frac{\psi(b, \varkappa_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \frac{\psi(u, \varkappa_1)}{\sigma(u)\, g(u)}\right)\right\}$$

$$= -\frac{\psi(b, \varkappa_1)\, (\sigma(b)\, g(b))'}{\sigma(b)^2\, g(b)^2 \sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} + \frac{\psi'(b, \varkappa_1)\, \psi(u, \varkappa_1)\, (\gamma(b) - \gamma(u))}{\sigma(b)\, g(b)\, \sigma(u)\, g(u)\, (\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man hat also

$$(13)\quad \frac{\partial}{\partial b}\, \frac{\frac{\psi(b, \varkappa_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \frac{\psi(u, \varkappa_1)}{\sigma(u)\, g(u)}}{\sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = \frac{H(u, b, \varkappa_1)}{\sqrt{b - u}},$$

wobei

$$(14)\quad H(u,b,x_1)=\frac{\psi'(b,x_1)\,\psi(u,x_1)\,\frac{\gamma(b)-\gamma(u)}{b-u}}{\sigma(b)\,g(b)\,\sigma(u)\,g(u)\left(\frac{\psi(b,x_1)^2-\psi(u,x_1)^2}{b-u}\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\psi(b,x_1)\,(\sigma(b)\,g(b))'}{\sigma(b)^2\,g(b)^2\sqrt{\frac{\psi(b,x_1)^2-\psi(u,x_1)^2}{b-u}}}$$

gesetzt ist. Man definiere jetzt den Differenzenquotienten

$$(15)\qquad \frac{\gamma(b)-\gamma(u)}{b-u}$$

an der Stelle $b-u=0$ durch den Differenzialquotienten

$$(15')\qquad \gamma'(b)=\tau(b)\,g(b)$$

und den Differenzenquotienten

$$(16)\qquad \frac{\psi(b,x_1)^2-\psi(u,x_1)^2}{b-u}$$

an der Stelle $b-u=0$ durch den Differenzialquotienten

$$(16')\qquad 2\,\psi(b,x_1)\,\psi'(b,x_1).$$

Dann bleibt an dieser Stelle, wie der erste Mittelwertsatz erkennen läßt, die erste dieser beiden Funktionen in u und b stetig, die zweite in u, b und x_1. Da ferner gemäß § 5 (12) $\psi'(b,x_1)>0$ ist, so gibt es, wenn die in Betracht kommende Stelle für den Augenblick durch die Bezeichnung a^*, b^*, x_1^* kenntlich gemacht wird, ein $\delta>0$, so daß für

$$(17)\qquad |a-a^*|\leqq\delta,\quad |b-b^*|\leqq\delta,\quad |x_1-x_1^*|\leqq\delta,\quad a\leqq u\leqq b$$

$H(u,b,x_1)$ in u, b, x_1 stetig und daher dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen positiven Schranke. Mithin gilt unter Beschränkung auf positive Werte von ε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b-\varepsilon}^{b}\frac{|H(u,b,x_1)|}{\sqrt{b-u}}\,\sigma(u)\,du=0,$$

und zwar gleichmäßig im Bereich (17). Hieraus folgt, daß das Integral

$$\int_a^b\frac{H(u,b,x_1)}{\sqrt{b-u}}\,\sigma(u)\,du$$

eine in a, b und x_1 stetige Funktion darstellt, und daß die Differenziation nach b des in der Gleichung (11) auftretenden Integrals unter dem Integral-

zeichen ausgeführt werden darf. Da der Integrand an der oberen Grenze verschwindet, so ergibt sich

$$(18)\quad \frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{L - L'(a, b, x_1, \psi(b, x_1))}{\sigma(b)\, g(b)}\right\} = \frac{L\,(\sigma(b)\, g(b))'}{\sigma(b)^2\, g(b)^2} - 2\int_a^b \frac{H(u, b, x_1)}{\sqrt{b-u}}\,\sigma(u)\,du,$$

wobei die rechte Seite eine in L, a, b und x_1 stetige Funktion darstellt.

Endlich erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\dfrac{\psi(b, x_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \dfrac{\psi(u, x_1)}{\sigma(u)\, g(u)}}{\sqrt{\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2}}\,\sigma(u)$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\sigma(b)^2\, g(b)^2} - \dfrac{1}{\sigma(u)^2\, g(u)^2}\right)(\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2) - \left(\dfrac{\psi(b, x_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \dfrac{\psi(u, x_1)}{\sigma(u)\, g(u)}\right)^2}{(\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2)^{\frac{3}{2}}}\,\sigma(u)$$

$$= \frac{-\left(\dfrac{\psi(b, x_1)}{\sigma(u)\, g(u)} - \dfrac{\psi(u, x_1)}{\sigma(b)\, g(b)}\right)^2 \sigma(u)}{(\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\left(\dfrac{\gamma(b) - \gamma(u)}{b-u}\right)^2 \sigma(u)\sqrt{b-u}}{\sigma(b)^2\, g(b)^2\, \sigma(u)^2\, g(u)^2 \left(\dfrac{\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2}{b-u}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bei Einführung der Definitionen (15), (15′), (16), (16′) ergibt sich hieraus ganz wie oben, daß die rechte Seite an der Stelle $b - u = 0$ in u, b und x_1 stetig bleibt und verschwindet. Daraus folgt, daß die Differenziation des in der Gleichung (11) auftretenden Integrals nach x_1 unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf. Man erhält

$$(19)\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{L - L'(a, b, x_1, \psi(b, x_1))}{\sigma(b)\, g(b)}\right\} = 2\int_a^b \frac{(\gamma(b) - \gamma(u))^2\,\sigma(u)\,du}{\sigma(b)^2\, g(b)^2\, \sigma(u)^2\, g(u)^2\, (\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Endlich hat man

$$(20)\quad \frac{\partial}{\partial L}\left\{\frac{L - L'(a, b, x_1, \psi(b, x_1))}{\sigma(b)\, g(b)}\right\} = \frac{1}{\sigma(b)\, g(b)}.$$

Wie aus den obigen Feststellungen hervorgeht, sind die Ableitungen der linken Seite der Gleichung (11) nach a, b, x_1, L in diesen Veränderlichen stetig. Da ferner, wie (19) erkennen läßt, die Ableitung nach x_1 nicht verschwindet, sondern positiv bleibt, so sind die Ableitungen von x_1 nach L, a und b stetig. Dasselbe gilt, da in der Klasse (B, 1) $q_1 = \psi(b, x_1)$ ist, auch für die Ableitungen von q_1.

Damit ist auch für die inneren Punkte der Klasse (B, 1) *der zu führende Beweis erbracht.*

Da ferner, wie die Darstellung (12) bei Berücksichtigung von Satz VII § 6 und die Darstellung (20) zeigen, die Ableitungen der linken Seite der Glei-

chung (11) nach a und nach L ebenfalls positiv sind, so folgt noch für die inneren Punkte der Klasse (B, 1)

$$(21)\qquad \frac{\partial x_1(L,a,b)}{\partial a} < 0, \quad \frac{\partial x_1(L,a,b)}{\partial L} < 0.$$

Es sei jetzt der Punkt L, a, b ein innerer Punkt der Klasse (B, 2). Dann gilt die für diese Klasse bestehende Gleichung § 5 (26) auch in einer gewissen Umgebung des Punktes. Man hat also in dieser bei Berücksichtigung von § 5 (25), (3), da in der Klasse (B, 2) $m(x_1) = -\psi(a, x_1)$ ist,

$$(22)\qquad \frac{L - L''(a,b,x_1, -\psi(a,x_1))}{\sigma(a)\,g(a)} = \frac{L}{\sigma(a)g(a)} + 2\int_a^b \frac{\dfrac{\psi(a,x_1)}{\sigma(a)\,g(a)} - \dfrac{\psi(u,x_1)}{\sigma(u)\,g(u)}}{\sqrt{\psi(a,x_1)^2 - \psi(u,x_1)^2}}\sigma(u)\,du = 0.$$

Dabei erkennt man ganz wie oben bei der Gleichung (11), daß der Integrand auch an der kritischen Stelle $u = a$ stetig bleibt, wenn er dort durch Null definiert wird. Ganz wie bei der Klasse (B, 1) beweist man jetzt, daß die Ableitungen der linken Seite der Gleichung (22) nach L, a, b und x_1 stetig sind. Man erhält insbesondere

$$(23)\qquad \frac{\partial}{\partial b}\frac{L - L''(a,b,x_1, -\psi(a,x_1))}{\sigma(a)\,g(a)} = 2\,\frac{\begin{matrix}\psi(a,x_1) & \psi(b,x_1)\\ \sigma(a)\,g(a) & \sigma(b)\,g(b)\end{matrix}}{\sqrt{\psi(a,x_1)^2 - \psi(b,x_1)^2}}\sigma(b),$$

$$(24)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{L - L''(a,b,x_1, -\psi(a,x_1))}{\sigma(a)\,g(a)} = -2\int_a^b \frac{(\gamma(u) - \gamma(a))^2\,\sigma(u)\,du}{\sigma(a)^2 g(a)^2 \sigma(u)^2 g(u)^2 (\psi(a,x_1)^2 - \psi(u,x_1)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(25)\qquad \frac{\partial}{\partial L}\frac{L - L''(a,b,x_1, -\psi(a,x_1))}{\sigma(a)\,g(a)} = \frac{1}{\sigma(a)\,g(a)}.$$

Da die Ableitung nach x_1 nicht verschwindet, sondern negativ bleibt, so ergibt die Gleichung (22), daß die Ableitungen von x_1 nach L, a und b stetig sind. Dasselbe gilt, da in der Klasse (B, 2) $q_1 = -\psi(a, x_1)$ ist, auch für die Ableitungen von q_1.

Damit ist auch für die inneren Punkte der Klasse (B, 2) *der zu führende Beweis erbracht.*

Da ferner, wie die Darstellung (23) bei Berücksichtigung von Satz VII § 6 und die Darstellung (25) zeigen, die Ableitung der linken Seite der Gleichung (22) nach L positiv und b negativ ist, so folgt für die inneren Punkte der Klasse (B, 2)

$$(26)\qquad \frac{\partial x_1(L,a,b)}{\partial b} < 0, \quad \frac{\partial x_1(L,a,b)}{\partial L} > 0.$$

In der Klasse (B, 3) hat man endlich gemäß § 7 (5), (6)

$$(27)\qquad x_1 = x_0(a,b), \quad q_1 = -\psi(a,x_0) = \psi(b,x_0) = \mu(a,b),$$

wobei $x_0(a, b)$ und $\mu(a, b)$ als stetig differenzierbare, von L unabhängige Funktionen von a und b explizite gegeben sind.

Damit ist der zu führende Beweis für die Stetigkeit der Ableitungen von x_1 und q_1 nach L, a und b in allen Fällen vollständig erbracht.

Nunmehr ist es leicht, die Ableitungen von $G(L, a, b)$ nach L, a und b zunächst für die inneren Punkte der Klassen zu bestimmen.

In der Klasse (A) hat man

$$\frac{\partial G(L,a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \Gamma\big(L, a, b, x_1(L,a,b), q_1(L,a,b)\big) = \Gamma_1(L,a,b,x_1,q_1) + \\ + \Gamma_3(L,a,b,x_1,q_1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + \Gamma_4(L,a,b,x_1,q_1)\frac{\partial q_1}{\partial a},$$

wobei Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 dieselbe Bedeutung haben wie im dritten Hilfssatz § 5. Da nun gemäß § 5 (5), (5′)

$$\Gamma_3(L, a, b, x_1, q_1) = \Gamma_4(L, a, b, x_1, q_1) = 0$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial G(L,a,b)}{\partial a} = \Gamma_1(L, a, b, x_1, q_1).$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial G(L,a,b)}{\partial b} = \Gamma_2(L, a, b, x_1, q_1).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich für die inneren Punkte der Klasse (A) — und zwar, da diese, wie am Eingang des laufenden Paragraphen festgestellt, offen ist, für *alle* Punkte der Klasse (A)

$$(28)\quad G_a(L,a,b) = 2\sigma(a)\sqrt{q_1^2 - \psi(a,x_1)^2},\quad G_b(L,a,b) = -2\sigma(b)\sqrt{q_1^2 - \psi(b,x_1)^2}.$$

Für einen inneren Punkt der Klasse (B, 1) hat man

$$G_a(L,a,b) = \frac{\partial}{\partial a}\Gamma\big(L,a,b,x_1,\psi(b,x_1)\big),\quad G_b(L,a,b) = \frac{\partial}{\partial b}\Gamma\big(L,a,b,x_1,\psi(b,x_1)\big).$$

wobei $x_1 = x_1(L, a, b)$ als Funktion von a und b zu betrachten ist. Gemäß dem dritten Hilfssatz § 5 ergibt sich bei Berücksichtigung von § 5 (20)

$$\frac{\partial}{\partial a}\Gamma\big(L,a,b,x_1,\psi(b,x_1)\big) = \Gamma_1 + \Gamma_3\frac{\partial x_1}{\partial a} + \Gamma_4\frac{1}{\sigma(b)\,g(b)}\frac{\partial x_1}{\partial a} \\ = \Gamma_1 + \frac{L - L'(a,b,x_1,\psi(b,x_1))}{\sigma(b)\,g(b)}\frac{\partial x_1}{\partial a},$$

wobei die Argumente der Funktionen Γ_1, Γ_3, Γ_4 natürlich L, a, b, x_1, $\psi(b, x_1)$ sind.

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial}{\partial b}\Gamma\big(L,a,b,x_1,\psi(b,x_1)\big) = \Gamma_2 + \Gamma_3\frac{\partial x_1}{\partial b} + \Gamma_4\left\{\psi'(b,x_1) + \frac{1}{\sigma(b)\,g b}\frac{\partial x_1}{\partial b}\right\} \\ = \Gamma_2 + \Gamma_4\psi'(b,x_1) + \frac{L - L'(a,b,x_1,\psi(b,x_1))}{\sigma(b)\,g(b)}\frac{\partial x_1}{\partial b}.$$

Wegen (11) verschwindet in den letzten Gleichungen der Faktor von $\frac{\partial \varkappa_1}{\partial a}$ und $\frac{\partial \varkappa_1}{\partial b}$. Führt man für die Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$ ihre dem dritten Hilfssatz §5 vorangestellten Definitionsgleichungen ein, so erkennt man, daß Γ_2 verschwindet, und man erhält die für die inneren Punkte der Klasse (B, 1) geltenden Gleichungen

$$(29)\quad G_a(L\ a\ b) = \frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1)) = 2\,\sigma(a)\sqrt{\psi(b,\varkappa_1)^2 - \psi(a,\varkappa_1)^2},$$

$$(30)\quad G_b(L,a,b) = \frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L,a,b,\varkappa_1,\psi(b,\varkappa_1)) = \{L - 2S(a,b,\varkappa_1,\psi(b,\varkappa_1))\}\psi'(b,\varkappa_1)$$
$$= -\,2\,\sigma(b)\,g(b)\,V(a,b,\varkappa_1,\psi(b,\varkappa_1))\,\psi'(b,\varkappa_1),$$

wobei der letzte Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung sich durch Einführung von (11) ergibt.

Ebenso hat man für einen inneren Punkt der Klasse (B, 2) bei Berücksichtigung von § 5 (25)

$$G_a(L, a, b) = \frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)),$$

$$G_b(L, a, b) = \frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)), \qquad \varkappa_1 = \varkappa_1(L, a, b),$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)) = \Gamma_1 + \Gamma_3\frac{\partial \varkappa_1}{\partial a} - \Gamma_4\left\{\psi'(a, \varkappa_1) + \frac{1}{\sigma(a)\,g(a)}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial a}\right\}$$
$$= \Gamma_1 - \Gamma_4\,\psi'(a,\varkappa_1)\,\frac{L - L''(a,b,\varkappa_1,-\psi(a,\varkappa_1))}{\sigma(a)\,g(a)}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial a},$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)) = \Gamma_2 + \Gamma_3\frac{\partial \varkappa_1}{\partial b} - \Gamma_4\frac{1}{\sigma(a)\,g(a)}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial b}$$
$$= \Gamma_2 - \frac{L - L''(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))}{\sigma(a)\,g(a)}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial b}.$$

Nun verschwindet in den letzten Gleichungen der Faktor von $\frac{\partial \varkappa_1}{\partial a}$ und $\frac{\partial \varkappa_1}{\partial b}$, ebenso Γ_1, und man erhält für die inneren Punkte der Klasse (B, 2)

$$(31)\quad G_a(L, a, b) = \frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))$$
$$= -\{L - 2S(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))\}\psi'(a, \varkappa_1)$$
$$= -\,2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))\,\psi'(a, \varkappa_1),$$

$$(32)\quad G_b(L, a, b) = \frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L, a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))$$
$$= -\,2\,\sigma(b)\sqrt{\psi(a,\varkappa_1)^2 - \psi(b,\varkappa_1)^2},$$

wobei der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (31) sich durch die Einführung von (22) ergibt.

In den inneren Punkten der Klasse (B, 3) hat man endlich

$$\varkappa_1 = \varkappa_0(a, b) = \varkappa_0, \quad q_1 = -\psi(a, \varkappa_1) = \psi(b, \varkappa_1) = \mu(a, b) = \mu,$$
$$G(L, a, b) = \Gamma(L, a, b, \varkappa_0, \psi(b, \varkappa_0)) = \Gamma(L, a, b, \varkappa_0, -\psi(a, \varkappa_0)).$$

Man erhält wie oben

$$(33)\quad \frac{\partial G(L,a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\Gamma\big(L,a,b,\varkappa_0,\psi(b,\varkappa_0)\big) = \Gamma_1 + \frac{L - L'(a,b,\varkappa_0,\mu)}{\sigma(b)\,g(b)}\,\frac{\partial \varkappa_0}{\partial a},$$

$$(34)\quad \frac{\partial G(L,a,b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\Gamma\big(L,a,b,\varkappa_0,-\psi(a,\varkappa_0)\big) = \Gamma_2 - \frac{L - L''(a,b,\varkappa_0,\mu)}{\sigma(a)\,g(a)}\,\frac{\partial \varkappa_0}{\partial b}.$$

Nun ist

$$\Gamma_1\big(L,a,b,\varkappa_0,\psi(b,\varkappa_0)\big) = 0,\quad \Gamma_2\big(L,a,b,\varkappa_0,-\psi(a,\varkappa_0)\big) = 0.$$

Ferner folgt aus

$$\psi(a,\varkappa_0) + \psi(b,\varkappa_0) = 0$$

$$\psi'(a,\varkappa_0) + \Big(\frac{1}{\sigma(a)\,g(a)} + \frac{1}{\sigma(b)\,g(b)}\Big)\frac{\partial \varkappa_0}{\partial a} = 0,$$

$$\psi'(b,\varkappa_0) + \Big(\frac{1}{\sigma(a)\,g(a)} + \frac{1}{\sigma(b)\,g(b)}\Big)\frac{\partial \varkappa_0}{\partial b} = 0,$$

$$(35)\quad \frac{\partial \varkappa_0}{\partial a} = -\frac{\sigma(a)\,g(a)\,\sigma(b)\,g(b)}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(a,\varkappa_0),\quad \frac{\partial \varkappa_0}{\partial b} = -\frac{\sigma(a)\,g(a)\,\sigma(b)\,g(b)}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(b,\varkappa_0).$$

Die Einführung dieser Gleichungen in (33), (34) ergibt bei Berücksichtigung von § 6 (34) für die inneren Punkte der Klasse (B, 3)

$$(36)\quad G_a(L,a,b) = -\frac{\sigma(a)\,g(a)\,(L - L'(a,b,\varkappa_0,\mu))}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(a,\varkappa_0) = -\,\sigma(a)\,\psi'(a,\varkappa_0)\,(l - s_3),$$

$$(37)\quad G_b(L,a,b) = \frac{\sigma(b)\,g(b)\,(L - L''(a,b,\varkappa_0,\mu))}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(b,\varkappa_0) = \sigma(b)\,\psi'(b,\varkappa_0)\,(s_2 - s_1).$$

Diese Gleichungen können auch in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$(38)\quad G_a(L,a,b) = -\frac{\sigma(a)\,g(a)\,(L - L''(a,b,\varkappa_0,\mu))}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(a,\varkappa_0) - 2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(a,b,\varkappa_0,\mu)\,\psi'(a,\varkappa_0),$$

$$(39)\quad G_b(L,a,b) = \frac{\sigma(b)\,g(b)\,(L - L'(a,b,\varkappa_0,\mu))}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(b,\varkappa_0) - 2\,\sigma(b)\,g(b)\,V(a,b,\varkappa_0,\mu)\,\psi'(b,\varkappa_0).$$

§ 13.

Die Ableitungen der Extremalfunktion in den Randpunkten der Klassen.

In den Randpunkten der Klassen wird die Diskussion des Verhaltens der Ableitungen von $\varkappa_1$ und q_1 kompliziert. Da es jedoch allein auf die Bestimmung der Ableitungen der Extremalfunktion $G(L,a,b)$ ankommt, so kann man diese Schwierigkeiten auf sich beruhen lassen, indem die bisherigen Ergebnisse ausreichen, um den folgenden Satz zu sichern:

Satz XVIII. *Die im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln für die Ableitungen der Extremalfunktion nach a und nach b, nämlich* (29), (30) *für die*

inneren Punkte der Klasse (B, 1), (31), (32) *für die inneren Punkte der Klasse* (B, 2), (36), (37), (38), 39) *für die inneren Punkte der Klasse* (B, 3) *gelten auch für diejenigen Punkte dieser Klassen, welche auf ihrem Rande liegen; sie gelten also für alle Punkte dieser Klassen. Die somit in allen Punkten des Definitionsbereiches* § 10 (1) *bestimmten Ableitungen der Extremalfunktion sind überall stetig.*

Dem Beweise dieses Satzes sei der folgende triviale Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz XIX. Es bezeichne $F(x)$ eine im Intervall $|x - x^*| < h$ definierte, stetige Funktion. Es sei $F(x^*) = 0$. Es sei ferner in denjenigen Punkten, in welchen $F(x)$ nicht verschwindet, $F(x)$ differenzierbar — und zwar dergestalt, daß, wenn x diese Punkte durchläuft,

$$\lim_{x \to x^*} F'(x) = 0 \tag{1}$$

ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist $F(x)$ an der Stelle x^* differenzierbar — und zwar ist

$$F'(x^*) = 0. \tag{2}$$

Beweis. Es sei $x^* < \xi < h$, $F(\xi) \neq 0$. Die Nullstellen von $F(x)$ im Intervall $x^* \leqq x \leqq \xi$ bilden dann wegen der Stetigkeit von $F(x)$ eine abgeschlossene Punktmenge. Es gibt daher unter ihnen eine größte, die mit ξ_0 bezeichnet werden möge. Dann ist $x^* \leqq \xi_0 < \xi$, und $F(x)$ ist im Intervall $\xi_0 < x \leqq \xi$ von Null verschieden und mithin voraussetzungsgemäß differenzierbar. Daher gilt der erste Mittelwertsatz, und man erhält

$$F(\xi) = F(\xi) - F(\xi_0) = F'(\xi_1)(\xi - \xi_0),$$

wobei ξ_1 zwischen ξ_0 und ξ liegt. Man hat also

$$\frac{F(\xi) - F(x^*)}{\xi - x^*} = \frac{F(\xi)}{\xi - x^*} = F'(\xi_1)\frac{\xi - \xi_0}{\xi - x^*},$$

$$\left|\frac{F(\xi) - F(x^*)}{\xi - x^*}\right| \leqq |F'(\xi_1)|.$$

Diese Ungleichung ist unter der Voraussetzung $F(\xi) \neq 0$ abgeleitet. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist

$$\left|\frac{F(\xi) - F(x^*)}{\xi - x^*}\right| = 0.$$

Wie aus den letzten beiden Relationen in Verbindung mit (1) hervorgeht, ist also die vordere Ableitung von $F(x)$ an der Stelle x^* gleich Null. Ebenso beweist man das Verschwinden der hinteren Ableitung an dieser Stelle. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Es sei jetzt L^*, a^*, b^* ein auf dem Rande gelegener Punkt der Klasse (B, 1). Man setze

$$\varkappa_1^* = \varkappa_1(L^*, a^*, b^*), \quad q_1^* = q_1(L^*, a^*, b^*). \tag{3}$$

Dann gilt, da der Punkt der Klasse (B, 1) angehört,

$$q_1^* = \psi(b, \varkappa_1^*). \tag{4}$$

Ferner sind die Ungleichungen § 5 (12) auch in einer gewissen Umgebung des Punktes $a^*, b^*, \varkappa_1^*$ durch den ersten Hilfssatz des § 5 gesichert. Man betrachte nun die Gleichung

$$\frac{L - L'(a, b, \varkappa', \psi(b, \varkappa'))}{\sigma(b)\, g(b)} = 0, \tag{5}$$

die gemäß § 5 (21) an der Stelle L^*, a^*, b^* durch $\varkappa' = \varkappa_1^*$ erfüllt ist. Die partiellen Ableitungen der linken Seite sind durch die Formeln (12), (18), (19), (20) des vorigen Paragraphen gegeben, und die dort durchgeführte Diskussion zeigt, daß in einer gewissen Umgebung des Punktes L^*, a^*, b^* $\varkappa'$ durch die Gleichung (5) als stetig differenzierbare Funktion von L, a, b, welche an der Stelle L^*, a^*, b^* den Wert $\varkappa_1^*$ annimmt, eindeutig bestimmt ist.

$$\varkappa' = \varkappa'(L, a, b), \quad \varkappa'(L^*, a^*, b^*) = \varkappa_1^*. \tag{6}$$

Jetzt setze man

$$\begin{aligned} F(L, a, b) &= G(L, a, b) - \Gamma(L, a, b, \varkappa', \psi(b, \varkappa')) \\ &= \Gamma(L, a, b, \varkappa_1, q_1) - \Gamma(L, a, b, \varkappa', \psi(b, \varkappa')). \end{aligned} \tag{7}$$

Dann folgt aus (3), (4), (6)

$$F(L^*, a^*, b^*) = 0. \tag{8}$$

Gehört nun der Punkt L, a, b der Klasse (B, 1) an, so ist gemäß (5) und § 5 (21)

$$\varkappa_1(L, a, b) = \varkappa'(L, a, b), \quad q_1(L, a, b) = \psi(b, \varkappa_1) = \psi(b, \varkappa') \tag{9}$$

und mithin

$$F(L, a, b) = 0. \tag{10}$$

Ist also $F(L, a, b) \neq 0$, so gehört der Punkt nicht zur Klasse (B, 1). Da nun, wie am Eingang des vorigen Paragraphen festgestellt, der Punkt L^*, a^*, b^* als Punkt der Klasse (B, 1) nicht Häufungspunkt der Klassen (B, 2) oder (B, 3) sein kann, so muß jetzt der Punkt L, a, b bei genügend kleiner Entfernung von L^*, a^*, b^* in der Klasse (A) liegen. Dann gelten aber für die Ableitungen von $G(L, a, b)$ nach a und b die im vorigen Paragraphen festgestellten Formeln § 12 (28)

$$\begin{aligned} G_a(L, a, b) &= 2\sigma(a)\sqrt{q_1^2 - \psi(a, \varkappa_1)^2}, \\ G_b(L, a, b) &= -2\sigma(b)\sqrt{q_1^2 - \psi(b, \varkappa_1)^2}, \\ \varkappa_1 &= \varkappa_1(L, a, b), \quad q_1 = q_1(L, a, b). \end{aligned} \tag{11}$$

Ferner erhält man entsprechend den Gleichungen (29) und (30) des vorigen Paragraphen

$$(12)\quad \frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L,a,b,\varkappa',\psi(b,\varkappa')) = 2\sigma(a)\sqrt{\psi(b,\varkappa')^2-\psi(a,\varkappa')^2},$$

$$(13)\quad \frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L,a,b,\varkappa',\psi(b,\varkappa')) = -2\sigma(b)g(b)V(a,b,\varkappa',\psi(b,\varkappa'))\,\psi'(b,\varkappa').$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$(14)\quad F_a(L,a,b) = 2\sigma(a)\sqrt{q_1^2-\psi(a,\varkappa_1)^2} - 2\sigma(a)\sqrt{\psi(b,\varkappa')^2-\psi(a,\varkappa')^2}$$

$$(15)\quad F_b(L,a,b) = -2\sigma(b)\sqrt{q_1^2-\psi(b,\varkappa_1)^2} + 2\sigma(b)g(b)V(a,b,\varkappa',\psi(b,\varkappa'))\,\psi'(b,\varkappa').$$

Da ferner der Punkt L^*, a^*, b^* voraussetzungsgemäß auf dem Rande der Klasse (B, 1) liegt, so ist gemäß § 12 (1)

$$(16)\quad V(L^*,a^*,b^*,\varkappa_1^*,\psi(b^*,\varkappa_1^*)) = 0.$$

Die letzten Gleichungen ergeben bei Berücksichtigung von (6), (4), (3) und der Stetigkeit von q_1 und $\varkappa_1$ als Funktionen von L, a und b, daß für diejenigen Punkte, in welchen $F(L,a,b) \neq 0$ ist, aus

$$(L,a,b)\to(L^*,a^*,b^*)\quad F_a(L,a,b)\to 0\quad\text{und}\quad F_b(L,a,b)\to 0$$

folgt. Also sind bei Berücksichtigung von (8) die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes für $F(L^*,a^*,b)$ als Funktion von b und für $F(L^*,a,b^*)$ als Funktion von a erfüllt. Gemäß dem Hilfssatz ist daher

$$F_a(L^*,a^*,b^*) = 0,\quad F_b(L^*,a^*,b^*) = 0.$$

Die Einführung dieses Resultats in (7) ergibt wegen (12), (13), (6), (16)

$$G_a(L^*,a^*,b^*) = 2\sigma(a^*)\sqrt{\psi(b^*,\varkappa_1^*)^2-\psi(a^*,\varkappa_1^*)^2},$$

$$G_b(L^*,a^*,b^*) = -2\sigma(b^*)g(b^*)V(a^*,b^*,\varkappa_1^*,\psi(b^*,\varkappa_1^*))\,\psi'(b^*,\varkappa_1^*) = 0.$$

Die letzten Gleichungen setzen die Behauptung des zu beweisenden Satzes XVIII in Evidenz, daß die im § 12 für die inneren Punkte der Klasse (B, 1) hergeleiteten Formeln (29), (30) auch in den auf dem Rande gelegenen Punkten dieser Klasse Geltung behalten.

Führt man die Funktion $F(L,a,b)$ ein durch die Gleichung

$$F(L,a,b) = G(L,a,b) - \Gamma(L,a,b,\varkappa',-\psi(a,\varkappa')),$$

wobei $\varkappa'$ definiert ist durch die Gleichung

$$\frac{L-L''(a,b,\varkappa',-\psi(a,\varkappa'))}{\sigma(a)g(a)} = 0,$$

so ergibt sich auf Grund des Hilfssatzes ganz wie oben, daß die im § 12 für die inneren Punkte der Klasse (B, 2) hergeleiteten Formeln (31), (32) auch in den auf dem Rande gelegenen Punkten dieser Klasse gültig bleiben.

Endlich sei L^*, a^*, b^* ein auf dem Rande gelegener Punkt der Klasse (B, 3). Man setze

$$(17) \qquad \varkappa_1^* = \varkappa_1(L^*, a^*, b^*), \quad q_1^* = q_1(L^*, a^*, b^*).$$

Dann gilt, da der Punkt der Klasse (B, 3) angehört, gemäß § 7 (5), (6)

$$(18) \quad \varkappa_1^* = \varkappa_0(a^*, b^*) = \varkappa_0^*, \; q_1^* = \psi(b^*, \varkappa_0^*) = -\psi(a^*, \varkappa_0^*) = \mu(a^*, b^*) = \mu^*,$$

wobei die Funktionen $\varkappa_0(a, b)$ und $\mu(a, b)$ durch die Formeln § 7 (5) definiert sind. Jetzt setze man

$$(19) \qquad F(L, a, b) = G(L, a, b) - \Gamma(L, a, b, \varkappa_0, \mu)$$

$$= \Gamma(L, a, b, \varkappa_1, q_1) - \Gamma(L, a, b, \varkappa_0, \mu), \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(a, b), \quad \mu = \mu(a, b).$$

Dabei bleiben wegen der Stetigkeit von $\varkappa_0(a, b)$ gemäß derjenigen Aussage des ersten Hilfssatzes § 5, welche sich auf die Voraussetzungen § 5 (14) bezieht, in genügender Nähe des Punktes a, b vom Punkte a^*, b^* die Ungleichungen § 7 (7), (8), d. h. die Ungleichungen

$$\text{für } a < u < b \qquad \psi(a, \varkappa_0) < \psi(u, \varkappa_0) < \psi(b, \varkappa_0), \; \psi'(a, \varkappa_0) > 0, \; \psi'(b, \varkappa_0) = 0$$

noch gültig.

Aus (17), (18) folgt

$$(20) \qquad F(L^*, a^*, b^*) = 0.$$

Gehört nun der Punkt L, a, b der Klasse (B, 3) an, so ist gemäß § 7 (5) $\varkappa_1 = \varkappa_0$, $q_1 = \mu$ und mithin $F(L, a, b) = 0$. Ist also $F(L, a, b) \neq 0$, so muß der Punkt einer der Klassen (A), (B, 1), (B, 2) angehören, und die Ableitungen von $G(L, a, b)$ nach a und nach b werden durch die Formeln § 12, (28), (29), (30), (31), (32) gegeben, welche gemäß den schon bewiesenen Behauptungen des Satzes XVIII jetzt für alle Punkte dieser Klassen Geltung haben.

Entsprechend den Formeln § 12 (33), (34), (36), (37), (38), (39) erhält man ferner

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L, a, b, \varkappa_0(a, b), \mu(a, b)) = -\frac{\sigma(a)\, g(a)\, (L - L'(a, b, \varkappa_0, \mu))}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}\, \psi'(a, \varkappa_0)$$

$$= -\frac{\sigma(a)\, g(a)\, (L - L''(a, b, \varkappa_0, \mu))}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}\, \psi'(a, \varkappa_0) - 2\,\sigma(a)\, g(a)\, V(a, b, \varkappa_0, \mu)\, \psi'(a, \varkappa_0),$$

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L, a, b, \varkappa_0(a, b), \mu(a, b)) = \frac{\sigma(b)\, g(b)\, (L - L''(a, b, \varkappa_0, \mu))}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}\, \psi'(b, \varkappa_0)$$

$$= \frac{\sigma(b)\, g(b)\, (L - L'(a, b, \varkappa_0, \mu))}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}\, \psi'(b, \varkappa_0) - 2\,\sigma(b)\, g(b)\, V(a, b, \varkappa_0, \mu)\, \psi'(b, \varkappa_0).$$

Da nun der Punkt L^*, a^*, b^* ein auf dem Rande gelegener Punkt der Klasse (B, 3) ist, so ist gemäß § 12 (7)

$$(23) \qquad L^* = \overline{L}(a, b),$$

wobei die Funktion $\overline{L}(a, b)$ durch § 7 (11) definiert ist. Gemäß § 5 (20), (25) und der Schreibweise § 7 (10) ist jetzt

(24) im Falle $V(a^*, b^*, x_0^*, \mu^*) < 0 \quad L^* = L'(a^*, b^*), \quad L^* > L''(a^*, b^*),$

(25) im Falle $V(a^*, b^*, x_0^*, \mu^*) > 0 \quad L^* = L''(a^*, b^*), \quad L^* > L'(a^*, b^*),$

(26) im Falle $V(a^*, b^*, x^*, \mu^*) = 0 \quad L^* = L'(a^*, b^*) = L''(a^*, b^*).$

Im Falle (24) kann ferner der Punkt L, a, b, wenn er nicht zur Klasse (B, 3) gehört, wegen Satz V gemäß § 5 (5), (31), (32) in genügend kleiner Entfernung vom Punkte L^*, a^*, b^* nur zur Klasse (B, 1) gehören, im Falle (25) nur zur Klasse (B, 2) und im Falle (26) zu allen drei Klassen (A), (B, 1), (B, 2).

Liegt also (24) vor und ist $F(L, a, b) \neq 0$, so gehört in genügender Nähe vom Punkte L^*, a^*, b^* der Punkt L, a, b zur Klasse (B, 1).

Man differenziere jetzt die Gleichung (19) unter Einführung der für alle Punkte der Klasse (B, 1) als gültig erwiesenen Formeln § 12 (29), (30) und der Darstellungen (21) und (22) des laufenden Paragraphen. Man erhält bei Einführung der Schreibweise § 7 (10)

$$(27)\quad F_a(L,a,b) = 2\sigma(a)\sqrt{\psi(b,x_1)^2 - \psi(a,x_1)^2} + \frac{\sigma(a)\,g(a)\,(L - L'(a,b))}{\sigma(a)\,g(a) + \sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(a,x_0),$$

$$(28)\quad F_b(L,a,b) = -2\,\sigma(b)\,g(b)\,V(a,b,x_1,\psi(b,x_1))\,\psi'(b,x_1) +$$
$$+ 2\,\sigma(b)\,g(b)\,V(a,b,x_0,\mu)\,\psi'(b,x_0) - \frac{\sigma(b)\,g(b)\,(L - L'(a,b))}{\sigma(a)\,g(a) + \sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(b,x_0).$$

Aus $(L\ a, b) \to (L^*, a^*, b^*)$ folgt nun wegen (17), (18), (24)

$$(29)\quad x_1 \to x_0^*, \quad x_0 \to x_0^*, \quad \psi(b,x_1) \to \psi(b^*, x_0^*) = \mu^*,$$
$$-\psi(a,x_1) \to -\psi(a^*, x_0^*) = \mu^*, \quad L'(a,b) \to L'(a^*,b^*) = L^*$$

und mithin bei nicht verschwindendem $F(L, a, b)$

$$(30)\qquad F_a(L,a,b) \to 0, \quad F_b(L,a,b) \to 0.$$

Liegt der Fall (25) vor und ist $F(L, a, b) \neq 0$, so gehört in genügender Nähe vom Punkte L^*, a^*, b^* der Punkt L, a, b zur Klasse (B, 2). Man differenziere nun (19) unter Einführung der für alle Punkte der Klasse (B, 2) als gültig erwiesenen Formeln § 12 (31), (32). Man erhält

$$F_a(L,a,b) = -2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(a,b,x_1,-\psi(a,x_1))\,\psi'(a,x_1) +$$
$$+ 2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(a,b,x_0,\mu)\,\psi'(a,x_0) + \frac{\sigma(a)\,g(a)\,(L - L''(a,b))}{\sigma(a)\,g(a) + \sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(a,x_0),$$

$$F_b(L,a,b) = -2\,\sigma(b)\sqrt{\psi(a,x_1)^2 - \psi(b,x_1)^2} -$$
$$- \frac{\sigma(b)\,g(b)\,(L - L''(a,b))}{\sigma(a)\,g(a) + \sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(b,x_0).$$

Diese Gleichungen sichern wie im Falle (24), daß bei nicht verschwindendem $F(L, a, b)$ aus

$$(31) \qquad (L, a, b) \to (L^*, a^*, b^*) \qquad F_a(L, a, b) \to 0, \quad F_b(L, a, b) \to 0$$

folgt.

Liegt endlich der Fall (26) vor, und ist $F(L, a, b) \neq 0$, so wissen wir bloß, daß der Punkt L, a, b nicht der Klasse (B, 3) angehört. Nun konvergieren aber in diesem Fall die rechten Seiten der Gleichungen (21), (22) für $(L, a, b) \to (L^*, a^*, b^*)$ gegen Null. Ferner konvergieren dann auch in allen drei Klassen die, wie eben bewiesen, in allen Punkten dieser Klassen für die Ableitungen der Extremalfunktion nach a und b gültigen Darstellungen § 12 (28), (29), (30), (31), (32) gegen Null. Mithin ist auch in diesem Fall die Grenzrelation (31) sichergestellt.

Bei Berücksichtigung von (20) sehen wir also, daß in allen drei durch die Relationen (24), (25), (26) gekennzeichneten Fällen für die betreffenden Funktionen $F(L^*, a^*, b)$ als Funktion von b und $F(L^*, a, b^*)$ als Funktion von a die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes erfüllt sind. Gemäß dem Hilfssatz ist also in allen drei Fällen

$$(32) \qquad F_a(L^*, a^*, b^*) = 0, \quad F_b(L^*, a^*, b^*) = 0.$$

Wegen (19) werden daher

$$G_a(L^*, a^*, b^*) \text{ und } G_b(L^*, a^*, b^*)$$

durch die rechten Seiten der Gleichungen (21), (22) an der Stelle L^*, a^*, b^* gegeben. Also gelten die Formeln § 12 (36), (37), (38), (39) auch in den auf dem Rande gelegenen Punkten L^*, a^*, b^* der Klasse (B, 3), was allein noch zu beweisen war.

Daß die Ableitungen der Extremalfunktion $G(L, a, b)$ nach L, a und b, deren Existenz durch die Formeln § 12 (9), (28), (29), (30), (31), (32), (36), (37), (38), (39) und den ergänzenden Satz XVIII nunmehr in allen Punkten des Bereiches § 10 (1) sichergestellt ist, überall stetig sind, bedarf nur in den Randpunkten der Klassen (B, 1), (B, 2), (B, 3) einer besonderen Begründung, die aber aus den Darstellungsformeln leicht abgelesen werden kann, um so mehr, als sie in dem eben durchgeführten Beweise implizite schon enthalten ist.

Zusammenfassend können wir also unter Heranziehung der Gleichungen § 6 (18), (21), (34) für die Ableitungen der Extremalfunktion $G(L, a, b)$ die hier zur Abkürzung mit G bezeichnet werden soll, die folgende Tafel aufstellen:

Es gilt

in allen Klassen

$$G_L = q_1;$$

in der Klasse (A)

$$G_a = 2\sigma(a)\sqrt{q_1^2 - \psi(a, \varkappa_1)^2}, \qquad G_b = -2\sigma(b)\sqrt{q_1^2 - \psi(b, \varkappa_1)^2},$$
$$q_1 > |\psi(a, \varkappa_1)| = -\psi(a, \varkappa_1), \quad q_1 > |\psi(b, \varkappa_1)| = \psi(b, \varkappa_1);$$

in der Klasse (B, 1)

$$G_a = 2\sigma(a)\sqrt{\psi(b, \varkappa_1)^2 - \psi(a, \varkappa_1)^2},$$
$$G_b = -2\sigma(b)\, g(b)\, V(a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1))\, \psi'(b, \varkappa_1) = \sigma(b)(s_2 - s_1)\psi'(b, \varkappa_1),$$
$$\psi(b, \varkappa_1) > |\psi(a, \varkappa_1)| = -\psi(a, \varkappa_1), \quad \psi'(b, \varkappa_1) > 0;$$

in der Klasse (B, 2)

$$G_a = -2\sigma(a)\, g(a)\, V(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))\, \psi'(a, \varkappa_1)$$
$$= -\sigma(a)(l - s_3)\psi'(a, \varkappa_1),$$
$$G_b = -2\sigma(b)\sqrt{\psi(a, \varkappa_1)^2 - \psi(b, \varkappa_1)^2}, \quad -\psi(a, \varkappa_1) > |\psi(b, \varkappa_1)|$$
$$= \psi(b, \varkappa_1), \quad \psi'(a, \varkappa_1) > 0;$$

in der Klasse (B, 3)

$$G_a = \frac{-\sigma(a)\, g(a)\,(L - L'(a, b))}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}\, \psi'(a, \varkappa_0) = -\sigma(a)(l - s_3)\psi'(a, \varkappa_0),$$
$$G_b = \frac{\sigma(b)\, g(b)\,(L - L''(a, b))}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)}\, \psi'(b, \varkappa_0) = \sigma(b)(s_2 - s_1)\psi'(b, \varkappa_0),$$
$$\psi'(a, \varkappa_0) > 0, \quad \psi'(b, \varkappa_0) > 0.$$

Gleichzeitig verschwinden also die Ableitungen G_a und G_b dann und nur dann, wenn die Extremale den Typus (B, 3) *besitzt, und ihre auf den Kurven $u = a$ und $u = b$ liegenden Stücke sich beide auf einen Punkt reduzieren.* Da letzteres dann und nur dann der Fall ist, wenn $L = L'(a, b) = L''(a, b)$ ist, und da gemäß § 7 (10) und § 5 (20), (25) die Gleichung $L'(a, b) = L''(a, b)$ mit dem Verschwinden von $V(a, b, \varkappa_0, \mu)$ gleichbedeutend ist, so folgt, daß die auf den Kurven $u = a$ und $u = b$ liegenden Stücke sich dann und nur dann auf einen Punkt reduzieren, wenn $V(a, b, \varkappa_0, \mu)$ verschwindet und eine der drei dann miteinander gleichbedeutenden Gleichungen $L = L'(a, b)$, $L = L''(a, b)$, $L = \overline{L}(a, b)$ statthat.

§ 14.

Die uneingeschränkte isoperimetrische Aufgabe.

In diesem Paragraphen wollen wir uns von der Voraussetzung befreien, daß die einfachen geschlossenen Kurven in einem gegebenen Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschrieben sein sollen. Es gilt der folgende Satz:

Satz XX. *Man beschränke die in Betracht gezogenen Kurven lediglich durch die Forderung, daß sie in einem beliebigen durch die Ungleichungen*

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1$$

gegebenen, endlichen Bereich verlaufen. Dann gibt es bei vorgegebenem Werte L unseres Kurvenintegrals § 1 (5) *mindestens eine einfache geschlossene Kurve, welche unser Flächenintegral* (6) *zum Maximum macht. Diese Kurve ist eine Extremale vom* π *pus* (B, 3). Dabei müssen α_1 und β_1 natürlich dem Definitionsgebiet § 1 (2) der Funktionen $\sigma(u)$, $\tau(u)$, $g(u)$ angehören, d. h. es muß gelten

$$\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta.$$

Beweis. Bezeichnen wie früher a das Minimum und b das Maximum von u auf der Kurve, so gelten jetzt lediglich die Beschränkungen

$$\alpha_1 \leqq a \leqq \beta_1, \quad \alpha_1 \leqq b \leqq \beta_1, \quad a < b, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\,du < L,$$

wobei L als fest vorgegebene positive Größe figuriert. In diesem Bereich ist die Extremalfunktion $G(L, a, b)$ kraft Satz XVI § 11 eine stetige Funktion von a und b. Man erweitere jetzt den Definitionsbereich dieser Funktion, indem man sie beim Bestehen einer der beiden Gleichungen

$$a = b, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\,du = L$$

durch Null definiert. Sie bleibt dann gemäß den Sätzen XIV, XV § 10 (10), (12), (27) auch an diesen Stellen stetig. Die Funktion $G(L, a, b)$ muß daher in dem beschränkten und nunmehr abgeschlossenen durch die Ungleichungen

$$\alpha_1 \leqq a \leqq \beta_1, \quad \alpha_1 \leqq b \leqq \beta_1, \quad a \leqq b, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\,du \leqq L$$

gegebenen Gebiet ihr Maximum an mindestens einer Stelle a^*, b^* annehmen, und es ist, da dieses Maximum nicht verschwinden kann,

$$a^* < b^*, \quad 2\int_{a^*}^{b^*} \sigma(u)\,du < L.$$

Da nun gemäß der am Schluß des § 13 zusammengestellten Tafel für die Ableitungen der Extremalfunktion diese in den Klassen (A) und (B, 1) mit wachsendem a zunimmt und in den Klassen (A) und (B, 2) mit fallendem b, so muß der Punkt L, a^*, b^* der Klasse (B, 3) angehören und mithin die entsprechende Extremale den Typus (B, 3) aufweisen, w. z. b. w.

Für die Extremale gelten daher die expliziten Formeln § 7 (14), (5), (6).

Ist ferner $\alpha_1 < a^*$ und $b^* < \beta_1$, so müssen die Ableitungen der Extremalfunktion nach a und b verschwinden. Gemäß der Schlußbemerkung des § 13

reduzieren sich also in diesem Falle die auf den Kurven $u = a^*$ und $u = b^*$ verlaufenden Stücke der Extremalen beide auf einen Punkt. Ist dagegen $\alpha_1 < a^*$ und $b^* = \beta_1$, so muß bloß die Ableitung der Extremalfunktion nach a verschwinden, während die Ableitung nach b auch positiv ausfallen darf. Es reduziert sich also in diesem Fall nur das auf der Kurve $u = a^*$ liegende Stück der Extremalen auf einen Punkt. Ebenso reduziert sich im Falle $\alpha_1 = a^*$ und $b^* < \beta_1$ das auf der Kurve $u = b^*$ liegende Stück der Extremalen auf einen Punkt. Ist endlich L groß genug, um den Fall $\alpha_1 = a^*$, $b^* = \beta_1$ zuzulassen, d. h. ist $L \geqq \overline{L}(\alpha_1, \beta_1)$, so braucht keines der beiden Stücke, welches die Lösungskurve mit den Kurven $u = a^* = \alpha_1$ und $u = b^* = \beta_1$ gemein hat, sich auf einen Punkt zu reduzieren.

Die in dem eben bewiesenen Satze XX gemachten Voraussetzungen genügen aber nicht, um sicherzustellen, daß das Extremum abgesehen von der trivialen Verschiebung parallel zur v-Achse nur von einer einzigen Kurve erreicht wird. Daß die Unität der Lösung durch die Vorgabe von a und b erzielt wird, ist ein bei der Willkürlichkeit der Funktionen $\sigma(u)$, $\tau(u)$, $g(u)$ merkwürdiges Ergebnis, welches die Zweckmäßigkeit dieser Voraussetzung ins Licht setzt.

Man setze zur Abkürzung

$$\Gamma(L, a, b) = \Gamma(L, a, b, \varkappa_0, \mu), \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(a, b), \quad \mu = \mu(a, b). \tag{1}$$

Die Funktion $\Gamma(L, a, b)$ ist dann bei festem L durch die Definitionsgleichungen § 3 (1) und § 7(5) in allen Punkten a, b definiert und stetig, für welche im Intervall $a < u < b$

$$\psi(a, \varkappa_0) \leqq \psi(u, \varkappa_0) \leqq \psi(b, \varkappa_0) \tag{2}$$

bleibt. Wie aus dem Beweise des ersten Hilfssatzes § 5 hervorgeht, sind diese Relationen gleichbedeutend damit, daß die Ungleichungen

$$\chi_3(a, b, \varkappa_0) \geqq 0, \quad \chi_4(a, b, \varkappa_0) \geqq 0 \tag{3}$$

bestehen, wobei die linken Seiten durch § 5 (15^6) definiert sind und wegen $\varkappa_0 = \varkappa_0(a, b)$ stetige Funktionen von a und b darstellen. Die Funktionen $\varkappa_0(a, b)$ und $\mu(a, b)$ bleiben auch an den Stellen $b = a$ stetig, und zwar wird

$$\varkappa_0(a, a) = -\gamma(a), \quad \mu(a, a) = 0. \tag{4}$$

Daher bleibt auch $\Gamma(L, a, b)$ für $b = a$ stetig, und es ist

$$\Gamma(L, a, a) = 0. \tag{5}$$

Nun gelten für $a \leqq u \leqq b$ offenbar die Ungleichungen

$$\operatorname*{Min}_{a \leqq u \leqq b} \psi'(u, \varkappa) \leqq \frac{\psi(b, \varkappa) - \psi(u, \varkappa)}{b - u} \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} \psi'(u, \varkappa),$$

$$\operatorname*{Min}_{a \leqq u \leqq b} \psi'(u, \varkappa) \leqq \frac{\psi(u, \varkappa) - \psi(a, \varkappa)}{u - a} \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} \psi'(u, \varkappa),$$

wobei die Differenzenquotienten an den Stellen $u = a$ und $u = b$ durch die Differentialquotienten zu definieren sind. Daher liegen auch die als Minima dieser Differenzenquotienten definierten Funktionen $\chi_3(a, b, \varkappa)$ und $\chi_4(a, b, \varkappa)$ zwischen denselben Grenzen, und hieraus erkennt man leicht, daß auch die Funktionen $\chi_3(a, b, \varkappa_0)$, $\chi_4(a, b, \varkappa_0)$ für $b = a$ stetig bleiben, wenn sie an diesen Stellen durch die Gleichungen

$$(5) \quad \chi_3(a, a, \varkappa_0(a, a)) = \chi_4(a, a, \varkappa_0(a, a)) = \psi'(a, \varkappa_0(a, a)) = \frac{d}{du}\left(\frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)}\right)_{u=a} = \frac{\tau(a)}{\sigma(a)}$$

definiert werden.

Endlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß, während die Extremalfunktion $G(L\ a, b)$ für

$$2\int_a^b \sigma(u)\, du > L$$

nicht definiert ist, die Funktion $\Gamma(L, a, b)$ dieser Einschränkung nicht unterliegt.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum folgenden überraschenden Satz:

Zusatz 1 zu Satz XX. *Bei festem L wird das für*

$$(7) \qquad \alpha_1 \leqq a < b \leqq \beta_1, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\, du < L$$

zu ermittelnde Maximum der Extremalfunktion $G(L, a, b)$, dessen Existenz durch den Satz XX festgestellt ist, an denselben Stellen angenommen, wie das Maximum der explizit gegebenen Funktion $\Gamma(L, a, b)$ für

$$(8) \qquad \alpha_1 \leqq a \leqq b \leqq \beta_1,$$

und die beiden Maxima sind gleich.

Beweis. Der in Betracht kommende Definitionsbereich der Funktion $\Gamma(L, a, b)$ ist durch die Ungleichungen (3) und (8) bestimmt. Dieser Bereich ist jedenfalls nicht leer, da die Funktionen $\chi_3(a, b, \varkappa_0)$ und $\chi_4(a, b, \varkappa_0)$ gemäß (6) für $b = a$ positiv sind und mithin wegen ihrer Stetigkeit auch bei genügend kleinem $(b - a)$ positiv ausfallen. Da ferner bei genügend kleinem $b - a$

$$(9) \qquad 2\int_a^b \sigma(u)\, du < L$$

wird, so ist dann, wie die Umformung § 4 (1) zeigt, auch $\Gamma(L, a, b)$ positiv. Daß das mithin ebenfalls positive Maximum von $\Gamma(L, a, b)$ an mindestens einer Stelle angenommen wird, ist durch die Stetigkeit der Funktion und die Abgeschlossenheit und Beschränktheit des Bereichs gewährleistet. Es bezeichne

nun $\tilde{a}$ $\tilde{b}$, eine solche Stelle. Dann ist zunächst, da das Maximum positiv ist, wegen (5)

$$\tilde{b} > \tilde{a}. \tag{10}$$

Wie wir später beweisen wollen, kann nun in keiner der beiden Relationen (3) das Gleichheitszeichen gelten. Wegen der Stetigkeit der linken Seiten dieser Relationen ist daher das Gleichheitszeichen auch für eine gewisse Umgebung des Punktes $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ ausgeschlossen. Das ist damit gleichbedeutend, daß dort die Ungleichungen § 7 (7), (8) erfüllt und mithin auch gemäß § 7 (10), (11) die Funktionen

$$\begin{gathered} L'(a,b) = L'(a,b,\varkappa_0,\mu), \qquad L''(a,b) = L''(a,b,\varkappa_0,\mu), \\ \overline{L}(a,b) = \max\left(L'(a,b),\ L''(a,b)\right) \end{gathered} \tag{11}$$

definiert und stetig sind. Dabei ist gemäß § 7 (13)

$$2\int_a^b \sigma(u)\,du \leqq \overline{L}(a,b). \tag{12}$$

In der eben erwähnten Umgebung des Punktes $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ erhält man ferner gemäß § 13 (21), (22)

$$\frac{\partial}{\partial a}\Gamma(L,a,b) = -\frac{\sigma(a)\,g(a)\,(L-L'(a,b))}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(a,\varkappa_0). \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\Gamma(L,a,b) = \frac{\sigma(b)\,g(b)\,(L-L''(a,b))}{\sigma(a)\,g(a)+\sigma(b)\,g(b)}\,\psi'(b,\varkappa_0). \tag{14}$$

Nun kann man wegen $\tilde{b} > \tilde{a}$, ohne unseren durch (3) und (8) bestimmten Bereich zu verlassen, a von $\tilde{a}$ aus wachsen und b von $\tilde{b}$ aus abnehmen lassen. Daher folgt aus den beiden letzten Gleichungen bei Berücksichtigung von § 7 (8)

$$L - L'(\tilde{a},\tilde{b}) \geqq 0, \quad L - L''(\tilde{a},\tilde{b}) \geqq 0 \tag{15}$$

und mithin wegen (11) und (12)

$$L \geqq \overline{L}(\tilde{a},\tilde{b}), \quad L > 2\int_a^b \sigma(u)\,du. \tag{16}$$

Damit sind aber alle Voraussetzungen des Satzes VIII § 7 sichergestellt, laut welchem die lineare isoperimetrische Schranke $\Gamma(L,\tilde{a},\tilde{b},\tilde{\varkappa}_0,\tilde{\mu})$ von einer Extremalen vom Typus B (3) erreicht wird. Es gilt also

$$G(L,\tilde{a},\tilde{b}) = \Gamma(L,\tilde{a},\tilde{b},\tilde{\varkappa}_0,\tilde{\mu}) = \Gamma(L,\tilde{a},\tilde{b}). \tag{17}$$

Es bezeichne andererseits a^*, b^* eine Stelle, an welcher die Extremalfunktion $G(L,a,b)$ ihr Maximum im Bereiche (7) annimmt. Laut dem Satze XX, welcher die Existenz solcher Stellen sicherstellt, wird dann dieses

Maximum ebenfalls von einer Extremalen vom Typus (B, 3) erreicht. d. h. es gilt

$$(18)\qquad G(L, a^*, b^*) = \Gamma\big(L, a, b, \varkappa_0(a^*, b^*),\ \mu(a^*, b^*)\big) = \Gamma(L, a^*, b^*).$$

Nun ist voraussetzungsgemäß

$$(19)\qquad G(L, a^*, b^*) \geqq G(L, \tilde{a}, \tilde{b}),\quad \Gamma(L, \tilde{a}, \tilde{b}) \geqq \Gamma(L, a^*, b^*),$$

und mithin stimmen alle diese vier Funktionswerte miteinander überein, w. z. b. w.

Nunmehr erübrigt also lediglich noch der Nachweis dafür, daß, wie behauptet, an einer Stelle, an welcher die Funktion $\Gamma(L, a, b)$ ihr Maximum annimmt, in keiner der beiden Relationen (3) das Gleichheitszeichen gelten kann. Das soll jetzt nachgeholt werden, indem wir beweisen, daß an einer Stelle, an welcher in einer der beiden Relationen (3) das Gleichheitszeichen gilt, die Funktion $\Gamma(L, a, b)$ ihr Maximum nicht erreichen kann.

Es bezeichne a^*, b^* eine solche Stelle. Man setze

$$(20)\qquad \varkappa_0^* = \varkappa_0(a^*, b^*),\quad \mu^* = \mu(a^*, b^*) = -\psi(a^*, \varkappa_0^*) = \psi(b^*, \varkappa_0^*)$$

und nehme zunächst noch zusätzlich an, daß für $a^* < u < b^*$

$$(21)\qquad \psi(a^*, \varkappa_0^*) < \psi(u, \varkappa_0^*) < \psi(b^*, \varkappa_0^*)$$

bleibt. Dann muß, wie aus den Definitionsgleichungen § 5 (15^6) hervorgeht, mindestens eine der beiden Gleichungen

$$(22)\qquad \psi'(a^*, \varkappa_0^*) = 0,\quad \psi'(b^*, \varkappa_0^*) = 0$$

gelten. Man bezeichne nun mit a_ε, $0 < \varepsilon < \mu^*$, den größten Wert von u, für welchen

$$\psi(u, \varkappa_0^*) = -(\mu^* - \varepsilon)$$

wird, ebenso mit b_ε den kleinsten, für welchen

$$\psi(u, \varkappa_0^*) = \mu^* - \varepsilon$$

wird. Dann hat man

$$(23)\qquad a^* < a_\varepsilon < b_\varepsilon < b^*,$$

für

$$(24)\qquad a_\varepsilon < u < b_\varepsilon \quad \big|\psi(u, \varkappa_0^*)\big| < \mu^* - \varepsilon,$$

$$(25)\qquad \psi(a_\varepsilon, \varkappa_0^*) + \psi(b_\varepsilon, \varkappa_0^*) = 0,\quad \mu^* - \varepsilon = -\psi(a_\varepsilon, \varkappa_0^*) = \psi(b_\varepsilon, \varkappa_0^*)$$

und mithin

$$(26)\qquad \varkappa_0(a_\varepsilon, b_\varepsilon) = \varkappa_0^*,\quad \mu(a_\varepsilon, b_\varepsilon) = \mu^* - \varepsilon,$$

ferner wegen der zusätzlichen Voraussetzung (21)

$$(27)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon = a^*,\quad \lim_{\varepsilon \to 0} b_\varepsilon = b^*.$$

Nun ist bei Berücksichtigung von (1), (26), (20)

$$\Gamma(L, a_s, b_s) - \Gamma(L, a^*, b^*) = \Gamma(L, a_s, b_s, \varkappa_0^*, \mu^* - \varepsilon) -$$
$$- \Gamma(L, a^*, b^*, \varkappa_0^*, \mu^*) > \Gamma(L, a_s, b_s, \varkappa_0^*, \mu^* - \varepsilon)$$
$$- \Gamma(L, a_s, b_s, \varkappa_0^*, \mu^*) = 2\int_{a_s}^{b_s} \{\sqrt{\mu^{*2} - \psi(u, \varkappa_0^*)^2} -$$
$$- \sqrt{(\mu^* - \varepsilon)^2 - \psi(u, \varkappa_0^*)^2}\}\, \sigma(u)\, du - \varepsilon L$$
$$= 2\int_{a_s}^{b_s} \frac{(\mu^{*2} - (\mu^* - \varepsilon)^2)\, \sigma(u)\, du}{\sqrt{\mu^{*2} - \psi(u, \varkappa_0^*)^2} + \sqrt{(\mu^* - \varepsilon)^2 - \psi(u, \varkappa_0^*)^2}} - \varepsilon L >$$
$$> \varepsilon \left\{ \int_{a_s}^{b_s} \frac{(2\mu^* - \varepsilon)\, \sigma(u)\, du}{\sqrt{\mu^{*2} - \psi(u, \varkappa_0^*)^2}} - L \right\}.$$

Da der Radikand im Nenner des letzten Intengranden wegen (20) und (22) an mindestens einer der beiden Stellen $u = a^*$ und $u = b^*$ in zweiter Ordnung verschwindet, so wird das Integral wegen (27) mit verschwindendem ε positiv unendlich groß. Daher ist bei genügend kleinem ε

$$\Gamma(L, a_s, b_s) > \Gamma(L, a^*, b^*), \tag{28}$$

und die Funktion $\Gamma(L, a, b)$ nimmt mithin an der Stelle a^*, b^* ihr Maximum nicht an. w. z. b. w.

Es bleibt also nur noch der Fall zu erledigen, daß die zusätzliche Voraussetzung (21) nicht erfüllt ist.

Dann bezeichne man im Intervall $a^* \leqq u \leqq b^*$ mit a' den größten Wert von u, für welchen

$$\psi(u, \varkappa_0^*) = \psi(a^*, \varkappa_0^*) = -\mu^*$$

ist, ebenso mit b den kleinsten, für welchen

$$\psi(u, \varkappa_0^*) = \psi(b, \varkappa_0^*) = \mu^*$$

ist. Man hat also

$$a^* \leqq a' < b' \leqq b^* \tag{29}$$

und für $a' < u < b'$

$$\psi(a', \varkappa_0^*) < \psi(u, \varkappa_0^*) < \psi(b', \varkappa_0^*), \tag{30}$$

ferner

$$\psi(a', \varkappa_0^*) + \psi(b', \varkappa_0^*) = 0, \quad \mu^* = -\psi(a', \varkappa_0^*) = \psi(b', \varkappa_0^*) \tag{31}$$

und mithin

$$\varkappa_0(a', b') = \varkappa_0^*, \quad \mu(a', b') = \mu^*. \tag{32}$$

Dabei besteht, da ja (21) jetzt als nicht zutreffend vorausgesetzt ist, mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$a^* < a', \quad b^* > b'. \tag{33}$$

Es bestehe etwa die letztere. Dann hat man

$$\Gamma(L, a', b') - \Gamma(L, a^*, b^*) = \Gamma(L, a', b', \varkappa_0^*, \mu^*) - \Gamma(L, a^*, b^*, \varkappa_0^*, \mu^*) \geq$$
$$\geq 2\int_{b'}^{b} \sqrt{\mu^{*2} - \psi(u, \varkappa_0^*)^2}\,\sigma(u)\,du.$$

Ist nun für $b' \leqq u \leqq b^*$ nicht identisch

$$\psi(u, \varkappa_0^*) = \mu^*, \tag{34}$$

so folgt unmittelbar, daß, wie zu beweisen war, die Funktion $\Gamma(L, a, b)$ an der Stelle a^*, b^* ihr Maximum nicht annimmt. Gilt aber (34) identisch, so folgt zunächst nur, daß die Funktion an der Stelle a', b' mindestens so groß ist wie an der Stelle a^*, b^*. Ferner verschwindet dann wegen der identischen Gleichung (34) $\psi'(b', \varkappa_0^*)$ und mithin auch $\chi_3(a', b', \varkappa_0^*)$, und da durch (30). für das Wertepaar a', b' auch die zusätzliche Voraussetzung (21) gesichert ist. so kann. wie oben bewiesen, die Funktion an der Stelle a', b' ihr Maximum nicht annehmen und mithin auch nicht an der Stelle a^*, b^*. was allein noch zu beweisen war.

In gleicher Weise verläuft natürlich der Beweis im Falle der Gültigkeit der ersten Ungleichung (33).

Zusatz 2 zu Satz XX. *Es mögen bei einem Wertepaar a, b die für die Realität des Ausdrucks, durch welchen die lineare isoperimetrische Schranke $\Gamma(L, a, b) = \Gamma(L, a, b, \varkappa_0, \mu)$ dargestellt wird, notwendiger Bedingungen* (2) *erfüllt sein: es sei ferner*

$$L > 2\int_a^b \sigma(u)\,du.$$

Wie schon durch Satz VIII § 7 *festgestellt, ist dann, wenn die Relationen* § 7 (7), (8) *und die Ungleichung*

$$L \geqq \overline{L}(a, b)$$

nicht gleichzeitig gelten, die lineare isoperimetrische Schranke $\Gamma(L, a, b)$ für die in den Streifen a, b eingeschriebenen Kurven nicht genau. Wie wir aber jetzt behaupten, ist sie immerhin noch schärfer als die genaue Schranke für alle im Streifen verlaufenden Kurven.

Beweis. Schreibt man statt α_1, β, a, b und statt a, b $a'b'$, so ist im Bereich $a \leqq a' < b' < b$ laut dem Zusatz 1 das Maximum der Extremalfunktion

$\Gamma(L, a', b')$ gleich dem Maximum der die lineare Schranke darstellenden Funktion $\Gamma(L, a', b')$ und mithin nicht kleiner als die lineare Schranke an der Stelle $a' = a$, $b' = b$, w. z. b. w.

Ebenso leicht ergibt sich der folgende Satz:

Satz XXI. *Man verlange, daß das von der einfachen geschlossenen Kurve umgrenzte abgeschlossene Gebiet einen festen Punkt u_1, v_1 enthalte. Ferner sei*

$$2\int_{\alpha}^{u_1}\sigma(u)\,du > L, \quad 2\int_{u_1}^{\beta}\sigma(u)\,du > L. \tag{35}$$

Dabei sei daran erinnert, daß α als untere Grenze des Definitionsgebietes § 1 (2) der Funktionen $\sigma(u)$, $\tau(u)$, $g(u)$ auch $-\infty$ sein kann und β als obere Grenze gleich $+\infty$. Ferner darf darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Voraussetzungen (35) getroffen werden, um die beliebige Annäherung der Kurve an die Grenzen α und β auszuschließen, was mangels jeder Voraussetzung über das Verhalten der Funktionen $\sigma(u)$, $\tau(u)$, $g(u)$ an diesen Grenzen geboten ist.

Die Aussage unseres Satzes XXI *besteht nun darin, daß es unter den obigen Voraussetzungen mindestens eine einfache geschlossene Kurve gibt, welche bei gegebenem Werte L des Kurvenintegrals* § 1 (5) *das Flächenintegral* § 1 (6) *zum Maximum macht.* Und zwar gilt über die Gestalt der Kurve das Folgende:

Bezeichnen a^* und b^* das Minimum und das Maximum von u auf der Lösungskurve, und ist $a^* < u_1 < b^*$, so ist die Lösungskurve eine Extremale vom Typus (B, 3), deren auf den Kurven $u = a^*$ und $u = b^*$ verlaufende Stücke beide sich auf einen Punkt reduzieren. Ist dagegen $a^* = u_1$, so kann die Lösungskurve auch eine Extremale vom Typus (B, 1) sein, deren auf der Kurve $u = b^*$ verlaufendes Stück sich auf einen Punkt reduziert. Ebenso kann im Falle $b^* = u_1$ die Lösungskurve auch eine Extremale vom Typus (B, 2) sein, deren auf der Kurve $u = a^*$ verlaufendes Stück sich auf einen Punkt reduziert.

Beweis. Wegen der kongruenten Verschiebbarkeit aller Figuren parallel zur v-Achse kann die Voraussetzung, daß das von der Kurve umgrenzte abgeschlossene Gebiet den Punkt u_1, v_1 enthält, ersetzt werden durch die Voraussetzungen $a \leqq u_1$, $b \geqq u_1$. Die Extremalfunktion $G(L, a, b)$ ist also in dem Gebiet

$$a \leqq u_1, \quad b \geqq u_1, \quad a < b, \quad 2\int_{a}^{b}\sigma(u)\,du < L$$

zu betrachten, wobei L als fest vorgegebene Größe figuriert. Man erweitere nun wie beim Beweise des vorhergehenden Satzes den Definitionsbereich der

Funktion $G(L, a, b)$, indem man sie beim Bestehen einer der beiden Gleichungen

$$a = u_1 = b, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\,du = L$$

durch Null definiert. Dabei bleibt die Stetigkeit der Funktion erhalten und die Beschränktheit des erweiterten Gebiets und seine Zugehörigkeit zum Bereich § 1, (2) durch (35) gesichert. Die Funktion muß daher in dem beschränkten, infolge der Erweiterung abgeschlossenen Gebiet

$$a \leqq u_1, \quad b \geqq u_1, \quad 2\int_a^b \sigma(u)\,du \leqq L$$

als Funktion von a und b ihr Maximum an mindestens einer Stelle a^*, b^* erreichen, und es ist, da dieses Maximum nicht verschwinden kann,

$$a^* < b^*, \quad 2\int_{a^*}^{b^*} \sigma(u)\,du < L.$$

Damit ist die Existenz mindestens einer Lösungskurve nachgewiesen. Die übrigen Aussagen des zu beweisenden Satzes lassen sich ganz wie beim Beweise des vorhergehenden Satzes aus der am Schlusse des vorigen Paragraphen zusammengestellten Tafel für die Ableitungen der Extremalfunktion ablesen.

§ 15.

Die bei festem a und b auftretenden Extremalentypen in ihrer Abhängigkeit von L.

Zunächst zeigt die q_1 nach unten abschätzende Ungleichung § 10 (11) des Satzes XIV, daß aus

$$(1) \qquad L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du < \frac{\lambda(a,b)^2}{\overline{m}(a,b)^2}$$

$$(2) \qquad q_1 > \overline{m}(a,b) > m(a,b,x_1)$$

folgt. Mithin sichert die Ungleichung (1) die Zugehörigkeit des Punktes L, a, b zur Klasse (A).

Gemäß Satz VII § 6 gibt es ferner in allen vier Fällen (A), (B. 1), (B, 2), (B. 3) ein u_0, $a < u_0 < b$, so daß

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} \text{für } a \leqq u < u_0 & \psi(u, x_1) < 0, \quad \psi(u_0, x_1) = 0, \\ \text{für } u_0 < u \leqq b & \psi(u, x_1) > 0 \end{array}$$

ist. Insbesondere ist also stets

$$(4) \qquad \psi(a, x_1) < 0, \quad \psi(b, x_1) > 0.$$

Gemäß Satz V gehört eine Extremale vom Typus (B, 1) nur zu solchen Werten von x_1, für welche die folgenden vier Ungleichungen gleichzeitig gelten:

(5) für $a \leqq u \leqq b$ $\quad \psi(b, x_1) + \psi(u, x_1) > 0,$

(6) für $a \leqq u < b$ $\quad \psi(b, x_1) - \psi(u, x_1) > 0,$

(7) $\qquad \psi'(b, x_1) > 0,$

(8) $\qquad V(a, b, x_1, \psi(b, x_1)) \leqq 0.$

Für die zugehörige Extremale ergibt sich dann L durch die Gleichung § 5 (21), d. h. durch die Gleichung

(9) $\qquad L = L'(a, b, x_1, \psi(b, x_1)).$

Ferner sind die Ungleichungen (4) in den Ungleichungen (5), (6), (7), (8) als Konsequenz enthalten. Denn die zweite Ungleichung (4) ergibt sich unmittelbar aus (5) für $u = b$, und die erste ist offenbar durch (8) gesichert.

Nun ist

$$(10)\quad \psi(b, x_1) + \psi(u, x_1) = \psi(b, x_0(u, b)) + \psi(u, x_0(u, b)) + \left(\frac{1}{\sigma(b)\, g(b)} + \frac{1}{\sigma(u)\, g(u)}\right)(x_1 - x_0(u, b)),$$

wobei $x_0(u, b)$ für $u = b$ durch § 7 (5) zu definieren ist und mithin gleich $-\gamma(b)$ wird. Da hier die Summe der beiden ersten Summanden auf der rechten Seite wegen der Definitionseigenschaft § 7 (4) der Funktion $x_0(a, b)$ verschwindet, so erhält man

$$(11)\quad \psi(b, x_1) + \psi(u, x_1) = \frac{\sigma(b)\, g(b) + \sigma(u)\, g(u)}{\sigma(b)\, g(b)\, \sigma(u)\, g(u)}(x_1 - x_0(u, b)).$$

Die Ungleichung (5) ist daher gleichbedeutend mit der Ungleichung

(12) $\qquad x_1 > K',$

wobei

(13) $$K' = \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} x_0(u, b)$$

gesetzt ist; und mithin stets

(14) $\qquad K' \geqq x_0(a, b)$

gilt.

Ferner hat man die Identität

$$(15)\quad \psi(b, x_1) - \psi(u, x_1) = \frac{1}{\sigma(u)\, g(u)}\left\{\gamma(b) - \gamma(u) - \frac{\gamma(b) + x_1}{\sigma(b)\, g(b)}(\sigma(b)\, g(b) - \sigma(u)\, g(u))\right\}$$
$$= \frac{\gamma(b) - \gamma(u)}{\sigma(u)\, g(u)}\left\{1 - \frac{\sigma(b)\, g(b) - \sigma(u)\, g(u)}{\gamma(b) - \gamma(u)}\,\frac{\gamma(b) + x_1}{\sigma(b)\, g(b)}\right\}.$$

Die Ungleichung (6) ist daher gleichbedeutend mit der Ungleichung

(16) $$\frac{\sigma(b)\, g(b) - \sigma(u)\, g(u)}{\gamma(b) - \gamma(u)}\,\frac{\gamma(b) + x_1}{\sigma(b)\, g(b)} < 1.$$

Definiert man nun den Ausdruck

$$\frac{\sigma(b)\,g(b)-\sigma(u)\,g(u)}{\gamma(b)-\gamma(u)}$$

an der Stelle $u=b$ nach der L'HOSPITALschen Regel durch

$$\frac{\sigma(b)\,g'(b)+\sigma'(b)\,g(b)}{\tau(b)\,g(b)},$$

so bleibt die durch den Ausdruck gegebene Funktion von u auch an dieser Stelle stetig. Bei dieser Definition ist wegen

$$(17)\quad \psi'(b,\varkappa_1)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma(u)+\varkappa_1}{\sigma(u)\,g(u)}\right)_{u=b}=\frac{\tau(b)}{\sigma(b)}\left\{1-\frac{\gamma(b)+\varkappa_1}{\sigma(b)\,g(b)}\,\frac{\sigma(b)\,g'(b)+\sigma'(b)\,g(b)}{\tau(b)\,g(b)}\right\}$$

die Ungleichung (16) an der Stelle $u=b$ mit der Ungleichung (7) gleichbedeutend. Das Ungleichungspaar (6), (7) ist daher gleichbedeutend mit der Ungleichung (16) für $a\leqq u\leqq b$. Diese ist wiederum unter der Voraussetzung der zweiten Ungleichung (4) gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$(18)\quad M'\,\frac{\gamma(b)+\varkappa_1}{\sigma(b)\,g(b)}<1,$$

wobei

$$(19)\quad M'=\operatorname*{Max}_{a\leqq u\leqq b}\frac{\sigma(b)\,g(b)-\sigma(u)\,g(u)}{\gamma(b)-\gamma(u)}$$

gesetzt ist. Setzt man daher

$$(20)\quad \begin{cases}\text{für } M'>0 & \bar{K}'=\dfrac{\sigma(b)\,g(b)}{M'}-\gamma(b),\\ \text{für } M'\leqq 0 & \bar{K}'=\infty,\end{cases}$$

so ergibt sich, daß unter der Voraussetzung der zweiten Ungleichung (4) das Ungleichungspaar (6), (7) gleichbedeutend ist mit der Ungleichung

$$(21)\quad \varkappa_1<\bar{K}'.$$

Da, wie oben hergeleitet, (5) gleichbedeutend mit (12) ist, und da, wie wiederholt werden darf, die zweite Ungleichung (4) in (5) für $u=b$ enthalten ist, so ist die Gesamtheit der drei Ungleichungen (5), (6), (7) gleichbedeutend mit dem Ungleichungspaar

$$(22)\quad \varkappa_1>K',\quad \varkappa_1<\bar{K}',$$

wobei gemäß (14) und der abgekürzten Schreibweise $\varkappa_0$ für $\varkappa_0(a,b)$

$$(23)\quad K'\geqq\varkappa_0(a,b)=\varkappa_0$$

gilt. Ist also

$$(22')\quad K'\geqq\bar{K}',$$

so ist der Fall (B, 1) von vornherein ausgeschlossen.

Gemäß Satz V § 5 gehört eine Extremale vom Typus (B, 2) nur zu solchen Werten von $\varkappa_1$, für welche die vier folgenden Ungleichungen gleichzeitig gelten:

(24) für $a \leqq u \leqq b$ $\quad \psi(a, \varkappa_1) + \psi(u, \varkappa_1) < 0,$

(25) für $a < u \leqq b$ $\quad \psi(a, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) < 0,$

(26) $$\psi'(a, \varkappa_1) > 0,$$

(27) $$V(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)) \geqq 0.$$

Für die zugehörige Extremale ergibt sich dann L durch die Gleichung § 5 (26), d. h. durch die Gleichung

(28) $$L = L''(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)).$$

Dabei ergibt sich die erste Ungleichung (4) unmittelbar aus (24) für $u = a$, und die zweite ist offenbar durch (27) gesichert.

Da die Umformung (10) auch gilt, wenn b durch a ersetzt wird und dementsprechend $\varkappa_0(u, b)$ durch $\varkappa_0(a, u)$, so ist die Ungleichung (24) gleichbedeutend mit der Ungleichung

(29) $$\varkappa_1 < K'',$$

wobei

(30) $$K'' = \operatorname*{Min}_{a \leqq u \leqq b} \varkappa_0(a, u)$$

gesetzt ist, und mithin stets

(31) $$K'' \leqq \varkappa_0(a, b)$$

gilt. Dabei ist noch auf der rechten Seite von (30) $\varkappa_0(a, u)$ für $u = a$ durch § 7 (5) zu definieren und daher gleich $-\gamma(a)$ zu setzen.

Ersetzt man in der Identität (15) b durch a, so erhält man

(32) $$\psi(a, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) = -\frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} \left\{1 + \frac{\sigma(a)\, g(a) - \sigma(u)\, g(u)}{\gamma(u) - \gamma(a)} \frac{\gamma(a) + \varkappa_1}{\sigma(a)\, g(a)}\right\}.$$

Die Ungleichung (25) ist mithin gleichbedeutend mit der Ungleichung

(33) $$-\frac{\sigma(a)\, g(a) - \sigma(u)\, g(u)}{\gamma(u) - \gamma(a)} \frac{\gamma(a) + \varkappa_1}{\sigma(a)\, g(a)} < 1 \quad \text{für} \quad a < u \leqq b.$$

Definiert man nun den Ausdruck

$$\frac{\sigma(a)\, g(a) - \sigma(u)\, g(u)}{\gamma(u) - \gamma(a)}$$

an der Stelle $u = a$ nach der L'Hospitalschen Regel durch

$$-\frac{\sigma(a)\, g'(a) + \sigma'(a)\, g(a)}{\tau(a)\, g(a)},$$

so bleibt die durch den Ausdruck gegebene Funktion von u auch an dieser Stelle stetig. Bei dieser Definition ist, wie aus der Identität (17) bei Ersetzung

von b durch a hervorgeht, die Ungleichung (33) an der Stelle $u = a$ mit der Ungleichung (26) gleichbedeutend. Das Ungleichungspaar (25), (26) ist daher gleichbedeutend mit der Ungleichung (33) für $a \leqq u \leqq b$. Diese ist wiederum unter Voraussetzung der ersten Ungleichung (4) gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$(34) \qquad -M''\frac{\gamma(a)+\varkappa_1}{\sigma(a)\,g(a)} < 1,$$

wobei

$$(35) \qquad M'' = \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} \frac{\sigma(a)\,g(a) - \sigma(u)\,g(u)}{\gamma(u) - \gamma(a)}$$

gesetzt ist. Setzt man daher

$$(36) \qquad \begin{cases} \text{für } M'' > 0 & \bar{K}'' = -\dfrac{\sigma(a)\,g(a)}{M''} - \gamma(a), \\ \text{für } M'' \leqq 0 & \bar{K}'' = -\infty, \end{cases}$$

so ergibt sich, daß unter der Voraussetzung der ersten Ungleichung (4) das Ungleichungspaar (25), (26) gleichbedeutend ist mit der Ungleichung

$$(37) \qquad \varkappa_1 > \bar{K}''.$$

Da, wie oben gezeigt, (24) gleichbedeutend mit (29) ist, und da, wie wiederholt werden darf, die erste Ungleichung (4) in (24) für $u = a$ enthalten ist, so ist die Gesamtheit der drei Ungleichungen (24), (25), (26) gleichbedeutend mit dem Ungleichungspaar

$$(38) \qquad \varkappa_1 < K'', \quad \varkappa_1 > \bar{K}'',$$

wobei gemäß (31) und der Abkürzung $\varkappa_0$ für $\varkappa_0(a, b)$

$$(39) \qquad K'' \leqq \varkappa_0(a, b) = \varkappa_0$$

gilt. Ist also

$$(38') \qquad K'' \leqq \bar{K}'',$$

so ist der Fall (B, 2) von vornherein ausgeschlossen.

Gemäß Satz VIII § 7 treten Extremalen vom Typus (B, 3) dann und nur dann auf, wenn die Ungleichungen § 7 (7), (8) bestehen. Wegen

$$(40) \qquad \mu = \mu(a, b) = \psi(b, \varkappa_0) = -\psi(a, \varkappa_0) > 0, \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(a, b)$$

ist das damit gleichbedeutend, daß die folgenden vier Ungleichungen gleichzeitig bestehen:

$$(41) \qquad \text{für } a < u \leqq b \qquad \psi(a, \varkappa_0) - \psi(u, \varkappa_0) < 0,$$

$$(42) \qquad \psi'(a, \varkappa_0) > 0,$$

$$(43) \qquad \text{für } a \leqq u < b \qquad \psi(b, \varkappa_0) - \psi(u, \varkappa_0) > 0,$$

$$(44) \qquad \psi'(b, \varkappa_0) > 0.$$

Die zugehörigen Extremalen erhält man dann für $L \geqq \bar{L}(a, b)$.

Genau so, wie die Äquivalenz der Ungleichungspaare (6), (7) mit der Ungleichung (21) hergeleitet wurde, beweist man mit Berücksichtigung der durch die Identitäten (40) gesicherten Ungleichungen (4), daß das Ungleichungspaar (43), (44) gleichbedeutend ist mit der Ungleichung

$$\varkappa_0 < \overline{K}'. \tag{45}$$

Genau so, wie die Äquivalenz der Ungleichungspaare (25), (26) mit der Ungleichung (37) hergeleitet wurde, beweist man endlich, daß das Ungleichungspaar (41), (42) gleichbedeutend ist mit der Ungleichung

$$\varkappa_0 > \overline{K}''. \tag{46}$$

Ferner folgt, wie sogleich gezeigt werden wird, noch aus (46)

$$K' = \varkappa_0 \tag{47}$$

und aus (45)

$$K'' = \varkappa_0, \tag{48}$$

wobei K' und K'' durch (13) und (30) definiert sind.

Aus (46) folgt nämlich, wie eben festgestellt, (41) und mithin wegen (40)

$$\psi(b, \varkappa_0) + \psi(u, \varkappa_0) > 0 \quad \text{für} \quad a < u \leqq b.$$

Die letzte Ungleichung ist, wie die Identität (11) zeigt, gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\varkappa_0 - \varkappa_0(u, b) > 0 \quad \text{für} \quad a < u \leqq b,$$

und hieraus folgt auf Grund der durch (13) gegebenen Definition von K', da definitionsgemäß $\varkappa_0 = \varkappa_0(a, b)$ ist, die behauptete Gleichung (47).

Ebenso folgt aus (45), wie oben festgestellt, (43) und mithin wegen (40)

$$\psi(a, \varkappa_0) + \psi(u, \varkappa_0) < 0 \quad \text{für} \quad a \leqq u < b.$$

Die letzte Ungleichung ist, wie die Identität (11) zeigt, wenn man in ihr b durch a und dementsprechend $\varkappa_0(u, b)$ durch $\varkappa_0(a, u)$ ersetzt, gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\varkappa_0 - \varkappa_0(a, u) < 0 \quad \text{für} \quad a \leqq u < b$$

und hieraus folgt auf Grund der durch (30) gegebenen Definition von K'' die behauptete Gleichung (48).

Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Gesamtheit der Ungleichungen (41), (42), (43), (44) gleichbedeutend ist mit dem Ungleichungspaar (45), (46), und daß beide Zusammenstellungen von Ungleichungen die Gleichungen (47), (48) als Konsequenzen sicherstellen.

Jetzt betrachten wir die Ungleichungen (8) und (27). Man hat unter den Voraussetzungen (22) bei Berücksichtigung dessen, daß dadurch die Ungleichungen (5), (6), (7) und die zweite Ungleichung (4) gesichert sind,

$$(49)\quad \frac{\partial}{\partial x_1} V(a, b, x_1, \psi(b, x_1)) = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^b \frac{\psi(u, x_1)\, du}{g(u) \sqrt{\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2}}$$

$$= \int_a^b \frac{\dfrac{\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2}{\sigma(u)\, g(u)} - \psi(u, x_1) \left(\dfrac{\psi(b, x_1)}{\sigma(b)\, g(b)} - \dfrac{\psi(u, x_1)}{\sigma(u)\, g(u)} \right)}{g(u)\, (\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \int_a^b \frac{\psi(b, x_1)\, (\gamma(b) - \gamma(u))\, du}{\sigma(b)\, g(b)\, \sigma(u)\, g(u)^2\, (\psi(b, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dabei wird die Berechtigung zur Differenziation unter dem Integralzeichen genau so bewiesen wie bei der Herleitung der Gleichung § 12 (18). Wie die Darstellung (49) zeigt, ist daher unter den Voraussetzungen (22) wegen $\psi(b, x_1) > 0$

$$(50)\quad \frac{\partial}{\partial x_1} V(a, b, x_1, \psi(b, x_1)) > 0.$$

Ebenso erhält man unter den Voraussetzungen (38) bei Berücksichtigung dessen, daß dadurch die Ungleichungen (24), (25), (26) und die erste Ungleichung (4) gesichert sind,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} V(a, b, x_1, -\psi(a, x_1)) = \int_a^b \frac{\psi(a, x_1)\, (\gamma(a) - \gamma(u))\, du}{\sigma(a)\, g(a)\, \sigma(u)\, g(u)^2\, (\psi(a, x_1)^2 - \psi(u, x_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher ist unter den Voraussetzungen (38) wegen $\psi(a, x_1) < 0$

$$(51)\quad \frac{\partial}{\partial x_1} V(a, b, x_1, -\psi(a, x_1)) > 0.$$

Dem Hauptergebnis dieses Paragraphen, welches durch den Satz XXIII gebildet wird, schicken wir noch den folgenden Hilfssatz voraus, dessen Beweis am Schluß des Paragraphen nachgeholt wird.

Hilfssatz XXII. Es gelte mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$(52)\quad K' < \overline{K}', \quad K'' > \overline{K}''.$$

Dann kommen bei genügend großem L keine Extremalen vom Typus (A) vor.

Satz XXIII. Wir unterscheiden die folgenden acht Fälle, welche eine vollständige Disjunktion bilden:

$$\begin{aligned}
&\text{I 1} && x_0 < \bar{K}', \quad x_0 > \bar{K}'', \quad V(a, b, x_0, \mu) < 0;\\
&\text{I 2} && x_0 < \bar{K}', \quad x_0 > \bar{K}'', \quad V(a, b, x_0, \mu) > 0;\\
&\text{I 3} && x_0 < \bar{K}', \quad x_0 > \bar{K}'', \quad V(a, b, x_0, \mu) = 0;\\
&\text{II 1} && x_0 < \bar{K}', \quad x_0 \leqq \bar{K}'', \quad K' < \bar{K}';\\
&\text{II 2} && x_0 < \bar{K}', \quad x_0 \leqq \bar{K}'', \quad K' \geqq \bar{K}';\\
&\text{III 1} && x_0 \geqq \bar{K}', \quad x_0 > \bar{K}'', \quad K'' > \bar{K}'';\\
&\text{III 2} && x_0 \geqq \bar{K}', \quad x_0 > \bar{K}'', \quad K'' \leqq \bar{K}'';\\
&\text{IV} && x_0 \geqq \bar{K}', \quad x_0 \leqq \bar{K}''.
\end{aligned}$$

Um Mißverständnissen vorzubeugen, schreiben wir im folgenden statt der Abkürzung $L'(a, b)$ wieder $L'(a, b, x_0, \mu)$ und statt der Abkürzung $L''(a, b)$ wieder $L''(a, b, x_0, \mu)$. Dann gilt:

Im Falle I 1 ist

$$L'(a, b, x_0, \mu) > L''(a, b, x_0, \mu), \tag{53}$$

es gibt ein und nur ein x_1^*, $x_0 < x_1^* < \bar{K}'$, so daß

$$V(a, b, x_1^*, \psi(b, x_1^*)) = 0 \tag{54}$$

wird, es gilt dann

$$2\int_a^b \sigma(u)\, du < L'(a, b, x_1^*, \psi(b, x_1^*)) < L'(a, b, x_0, \mu), \tag{55}$$

und es besitzen die Extremalen

(56) für $2\int_a^b \sigma(u)\, du < L < L'(a, b, x_1^*, \psi(b, x_1^*))$ den Typus (A),

(57) für $L'(a, b, x_1^*, \psi(b, x_1^*)) \leqq L < L'(a, b, x_0, \mu)$ den Typus (B, 1),

(58) für $L'(a, b, x_0, \mu) \leqq L$ den Typus (B, 3).

Im Falle I 2 ist

$$L''(a, b, x_0, \mu) > L'(a, b, x_0, \mu), \tag{59}$$

es gibt ein und nur ein x_1^*, $x_0 > x_1^* > \bar{K}''$, so daß

$$V(a, b, x_1^*, -\psi(a, x_1^*)) = 0 \tag{60}$$

wird, es gilt dann

$$2\int_a^b \sigma(u)\, du < L''(a, b, x_1^*, -\psi(a, x_1^*)) < L''(a, b, x_0, \mu), \tag{61}$$

und es besitzen die Extremalen

(62) für $2\int_a^b \sigma(u)\,du < L < L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*))$ den Typus (A),

(63) für $L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) \leqq L < L''(a, b, \varkappa_0, \mu)$ den Typus (B, 2),

(64) für $L''(a, b, \varkappa_0, \mu) \leqq L$ den Typus (B, 3).

Im Falle I 3 ist

(65) $$L'(a, b, \varkappa_0, \mu) = L''(a, b, \varkappa_0, \mu) > 2\int_a^b \sigma(u)\,du,$$

und es besitzen die Extremalen

(66) für $2\int_a^b \sigma(u)\,du < L < L'(a\ b, \varkappa_0, \mu)$ den Typus (A),

(67) für $L'(a, b, \varkappa_0, \mu) \leqq L$ den Typus (B, 3).

Im Falle II 1 gibt es ein und nur ein $\varkappa_1^*$, $K' < \varkappa_1^* < \bar{K}'$, so daß

(68) $$V(a, b, \varkappa_1^*, \psi(b, \varkappa_1^*)) = 0$$

wird, es gilt dann

(69) $$2\int_a^b \sigma(u)\,du < L'(a, b, \varkappa_1^*, \psi(b, \varkappa_1^*)),$$

und es besitzen die Extremalen

(70) für $2\int_a^b \sigma(u)\,du < L < L'(a, b, \varkappa_1^*, \psi(b, \varkappa_1^*))$ den Typus (A),

(71) für $L'(a, b, \varkappa_1^*, \psi(b, \varkappa_1^*)) \leqq L$ den Typus (B, 1).

Im Falle III 1 gibt es ein und nur ein $\varkappa_1^*$, $K'' > \varkappa_1^* > \bar{K}''$, so daß

(72) $$V(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) = 0$$

wird, es gilt dann

(73) $$2\int_a^b \sigma(u)\,du < L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)),$$

und es besitzen die Extremalen

(74) für $2\int_a^b \sigma(u)\,du < L < L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*))$ den Typus (A),

(75) für $L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) \leqq L$ den Typus (B, 2).

In den Fällen II 2, III 2, IV haben alle zum Wertepaar a, b gehörigen Extremalen den Typus (A), oder mit anderen Worten haben die Extremalen für alle Werte von L, für welche

$$2\int_a^b \sigma(u)\,du < L$$

ist, den Typus (A).

Beweis. In den Fällen II 1, II 2, III 1, III 2, IV sind (45), (46) nicht beide erfüllt und daher Extremalen vom Typus (B, 3) ausgeschlossen. In den Fällen II 1, II 2, IV folgt aus der Voraussetzung $\varkappa_0 \leqq \bar{K}''$ und der Ungleichung (39), d. h. der Ungleichung $K'' \leqq \varkappa_0$, die Ungleichung $K'' \leqq \bar{K}''$ im Widerspruch zu (38). Daher sind in diesen Fällen auch die Extremalen vom Typus (B, 2) ausgeschlossen. Ebenso folgt in den Fällen III 1, III 2, IV aus der Voraussetzung $\varkappa_0 \geqq \bar{K}'$ und der Ungleichung (23), d. h. der Ungleichung $K' \geqq \varkappa_0$, die Ungleichung $K' \geqq \bar{K}'$ im Widerspruch zu (22). Daher sind in diesen Fällen auch die Extremalen vom Typus (B 1) ausgeschlossen. Endlich ist noch im Falle II 2 wegen der (22) widersprechenden Voraussetzung $K' \geqq \bar{K}'$ der Typus (B, 1) ausgeschlossen und im Falle III 2 wegen der (38) widersprechenden Voraussetzung $K'' \leqq \bar{K}''$ der Typus (B, 2).

Die bisherigen Ergebnisse der Beweisführung können wir folgendermaßen zusammenfassen: In den Fällen II 2, III 2, IV tritt ausschließlich der Typus (A) auf, womit, soweit sie diese Fälle betreffen, die Behauptungen unseres Satzes bewiesen sind. Im Falle II 1 kommt außer dem Typus (A) nur noch der Typus (B, 1) in Frage, im Falle III 1 nur noch der Typus (B, 2). Im Falle II 1 ist nun die erste Voraussetzung unseres Hilfssatzes XXII erfüllt und im Falle III 1 die zweite. Da jede dieser beiden Voraussetzungen für sich allein die Behauptung des Hilfssatzes sicherstellt, so ist in beiden Fällen bei genügend großem L der Typus (A) ausgeschlossen. Es tritt mithin bei genügend großem L im Falle II 1 der Typus (B, 1) und im Falle III 1 der Typus (B, 2) auf. In allen Fällen überhaupt ist dagegen, wie am Eingang dieses Paragraphen festgestellt, für

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du < \frac{\lambda(a,b)^2}{\bar{m}(a,b)^2} \tag{76}$$

der Typus (A) sichergestellt. In beiden Fällen II 1 und III 1 muß daher im (L, a, b)-Raume die Klasse (A) bei den betrachteten Werten von a und b mindestens einen Randpunkt L^*, a, b besitzen, für welchen

$$L^* > 2\int_a^b \sigma(u)\,du \tag{77}$$

ist. Da nun, wie am Eingang des § 12 festgestellt, die Klasse (A) offen ist, so gehört der Randpunkt im Falle II 1 der Klasse (B, 1) an und im Falle III 1 der Klasse (B, 2). Bezeichnet daher $\varkappa_1^*$ den zum Randpunkt gehörenden Wert von $\varkappa_1$, so gilt im Falle II 1 wegen § 12 (1) und § 5 (21)

$$V(a, b, \varkappa_1^*, \psi(b, \varkappa_1^*)) = 0, \quad L'(a, b, \varkappa_1^*, \psi(b, \varkappa_1^*)) = L^*, \tag{78}$$

und im Falle III 1 wegen § 12 (3) und § 5 (26)

$$V(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) = 0, \quad L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) = L^*. \tag{79}$$

Dabei gilt gemäß den Ungleichungen (22), (38) des laufenden Paragraphen im Falle II 1 $K' < \varkappa_1^* < \bar{K}'$ und im Falle III 1 $K'' > \varkappa_1^* > \bar{K}''$. Gemäß (50), (51) sind aber die Ableitungen nach $\varkappa_1$ von $V(a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1))$ für $K' < \varkappa_1 < \bar{K}'$ und von $V(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))$ für $K'' > \varkappa_1 > \bar{K}''$ positiv. Daher sind $\varkappa_1^*$ und L^* im Falle II 1 durch die Gleichungen (78) eindeutig bestimmt und im Falle III 1 durch die Gleichungen (79). Die Klasse (A) hat daher bei festgehaltenen a, b in beiden Fällen nur einen einzigen Randpunkt L^*, a, b, und zwar dergestalt, daß für $L < L^*$ der Punkt L, a, b der Klasse (A) angehört, während er für $L \geqq L^*$ im Falle II 1 der Klasse (B, 1) und im Falle III 1 der Klasse (B, 2) angehört.

Damit sind auch, soweit sie die Fälle II 1 und III 1 betreffen, alle Behauptungen unseres Satzes bewiesen.

In den Fällen I 1, I 2, I 3 sind die dem Typus (B, 3) entsprechenden Ungleichungen (45), (45) erfüllt. Da aus ihnen auch (47) und (48) folgen, so erhalten die dem Typus (B, 1) entsprechenden Ungleichungen (22) die Gestalt

$$\varkappa_0 < \varkappa_1 < \bar{K}'$$

und die dem Typus (B, 2) entsprechenden Ungleichungen (38) die Gestalt

$$\varkappa_0 > \varkappa_1 > \bar{K}''.$$

Da nun wegen (40) $V(a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1))$ und $V(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1))$ für $\varkappa_1 = \varkappa_0$ in $V(a, b, \varkappa_0, \mu)$ übergehen, so folgt aus (50), (51)

$$\text{für } \varkappa_0 < \varkappa_1 < \bar{K}' \quad V(a, b, \varkappa_1, \psi(b, \varkappa_1)) > V(a, b, \varkappa_0, \mu),$$
$$\text{für } \varkappa_0 > \varkappa_1 > \bar{K}'' \quad V(a, b, \varkappa_1, -\psi(a, \varkappa_1)) < V(a, b, \varkappa_0, \mu).$$

In den Fällen I 1 und I 3 widerspricht die zweite dieser Ungleichungen der Ungleichung (27) und schließt daher den Typus (B, 2) aus, in den Fällen I 2 und I 3 widerspricht die erste dieser Ungleichungen der Ungleichung (8) und schließt daher den Typus (B, 1) aus. Im Falle I 3 kommen also nur die Typen (B, 3) und (A) in Betracht, ferner gilt in diesem Falle wegen der Definitionsgleichungen § 5 (20), (25) $L'(a, b, \varkappa_0, \mu) = L''(a, b, \varkappa_0, \mu)$, es tritt endlich gemäß Satz VIII § 7 der Typus (B, 3) für und nur für $L \geqq L'(a, b, \varkappa_0, \mu)$ auf. Da nun der Typus (A) durch (76) gesichert ist, so ist

$$L'(a, b, \varkappa_0, \mu) > 2 \int_a^b \sigma(u)\, du,$$

und es tritt, wenn L im Innern des durch die beiden Seiten dieser Ungleichung begrenzten Intervalls liegt, der Typus (A) auf. Damit sind für den Fall I 3 alle Behauptungen unseres Satzes bewiesen.

Gemäß den Definitionsgleichungen § 5 (20), (25) ist

$$\text{im Falle I 1} \quad L'(a, b, \varkappa_0, \mu) > L''(a, b, \varkappa_0, \mu),$$
$$\text{im Falle I 2} \quad L''(a, b, \varkappa_0, \mu) > L'(a, b, \varkappa_0, \mu),$$

es tritt daher gemäß Satz VIII der Typus (B, 3) im Falle I 1 für und nur für $L \geqq L'(a, b, \varkappa_0, \mu)$ ein, im Falle I 2 für und nur für $L \geqq L''(a, b, \varkappa_0, \mu)$. In beiden Fällen muß daher im (L, a, b)-Raum die Klasse (A) bei den betrachteten Werten von a und b mindestens einen Randpunkt L^*, a, b besitzen. für welchen die Relation (77) gilt. Dieser kann, da sie offen ist, nicht der Klasse (A) angehören, und da in beiden Fällen I 1 und I 2 $V(a, b, \varkappa_0, \mu)$ voraussetzungsgemäß nicht verschwindet, wegen § 12 (6) auch nicht der Klasse (B, 3). Daher gehört der Randpunkt im Falle I 1 zur Klasse (B, 1). im Falle I 2 zur Klasse (B, 2). Mithin gelten im ersteren Falle die Gleichungen (78), im letzteren die Gleichungen (79). Daraus schließt man wie oben, daß L^* eindeutig bestimmt ist. In beiden Fällen hat daher die Klasse (A) im Gebiete (77) nur den einzigen Randpunkt L^*, a, b, woraus sich auch für die Fälle I 1 und I 2 alle Behauptungen unseres Satzes ergeben.

Beweis des Hilfssatzes XXII. Der Punkt L, a, b gehöre der Klasse (A) an. Dann hat man gemäß § 5 (5)

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du = 2\int_a^b \frac{q_1 - \sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}\,\sigma(u)\,du$$

$$= 2\int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)^2\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}\,(q_1 + \sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2})} < \frac{2}{q_1}\int_a^b \frac{m(a, b, \varkappa_1)\,|\psi(u, \varkappa_1)|\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}$$

und mithin wegen $q_1 > m(a, b, \varkappa_1)$

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du < 2\,T_1 \int_a^b \frac{|\psi(u, \varkappa_1)|\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}, \tag{80}$$

wobei

$$T_1 = \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} \sigma(u)\,g(u) \tag{80'}$$

gesetzt ist. Nun ist gemäß § 5 (5')

$$0 = \int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = \int_{u_0}^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} - \int_a^{u_0} \frac{|\psi(u, \varkappa_1)|\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}},$$

wobei u_0 durch (3) definiert ist. Mithin ist

$$\int_a^b \frac{|\psi(u, \varkappa_1)|\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = 2\int_{u_0}^b \frac{\psi(u, \varkappa_1)\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}} = 2\int_a^{u_0} \frac{|\psi(u, \varkappa_1)|\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, \varkappa_1)^2}}. \tag{81}$$

Bei Berücksichtigung von (3) erhält man

$$\text{für } u_0 \leqq u \leqq b \quad q_1^2 - \psi(u, x_1)^2 = (q_1 + \psi(u, x_1))(q_1 - \psi(u, x_1)) \geqq$$
$$\geqq q_1(q_1 - \psi(u, x_1)) > m(a, b, x_1)(m(a, b, x_1) - \psi(u, x_1)),$$
$$\text{für } a \leqq u \leqq u_0 \quad q_1^2 - \psi(u, x_1)^2 = (q_1 + \psi(u, x_1))(q_1 - \psi(u, x_1)) \geqq$$
$$\geqq q_1(q_1 + \psi(u, x_1)) > m(a, b, x_1)(m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1)).$$

Setzt man

$$T_2 = \operatorname*{Min}_{a \leqq u \leqq b} g(u),$$

so hat man jetzt

$$2\int_{u_0}^{b} \frac{\psi(u, x_1)\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}} < \frac{2\,m(a, b, x_1)}{T_2} \int_{u_0}^{b} \frac{du}{\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}} <$$
$$< \frac{2\sqrt{m(a, b, x_1)}}{T_2} \int_{u_0}^{b} \frac{du}{\sqrt{m(a, b, x_1) - \psi(u, x_1)}}.$$

Ebenso erhält man

$$2\int_{a}^{u_0} \frac{|\psi(u, x_1)|\,du}{g(u)\sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}} < \frac{2\sqrt{m(a, b, x_1)}}{T_2} \int_{a}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1)}}.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen in Verbindung mit (80) und (81) folgen bei Berücksichtigung der § 10 (4), (5) festgestellten Ungleichung $m(a, b, x_1) < \overline{m}(a, b)$ die beiden Abschätzungen

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du < T_3 \int_{u_0}^{b} \frac{du}{\sqrt{m(a, b, x_1) - \psi(u, x_1)}}, \tag{82}$$

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du < T_3 \int_{a}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1)}} \tag{83}$$

wobei

$$T_3 = \frac{4\,T_1\sqrt{\overline{m}(a, b)}}{T_2}$$

gesetzt ist und mithin, wovon allein Gebrauch gemacht werden wird, eine von x_1 und q_1 unabhängige, also lediglich von a und b abhängende feste, positive Konstante bedeutet.

Es gelte nun die erste Ungleichung (52). Auf Grund derselben wähle man ein beliebiges aber *festes* K^*, so daß $K' < K^* < \overline{K}'$ ist. Ist jetzt

$$x_1 \geqq K^*, \tag{84}$$

so hat man gemäß (11) und (13)

$$m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1) \geqq \psi(b, x_1) + \psi(u, x_1) \geqq T_4(x_1 - K') \geqq T_4(K^* - K')$$

wobei

$$T_4 = \operatorname*{Min}_{a \leqq u \leqq b} \frac{\sigma(b)\, g(b) + \sigma(u)\, g(u)}{\sigma(b)\, g(b)\, \sigma(u)\, g(u)}$$

gesetzt ist. Führt man diese Abschätzung auf der rechten Seite von (83) ein, so erhält man als Konsequenz von (84)

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du < T_5, \tag{85}$$

wobei T_5 eine von $\varkappa_1$ und q_1 unabhängige feste, positive Konstante bedeutet.

Andererseits hat man wegen (15), (19), (4)

$$m(a, b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \psi(b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \frac{\gamma(b) - \gamma(u)}{\sigma(u)\, g(u)} \left(1 - M' \frac{\gamma(b) + \varkappa_1}{\sigma(b)\, g(b)}\right).$$

Ist jetzt $\bar{K}' = \infty$, oder, was gemäß (20) damit bleichbedeutend ist, $M' \leqq 0$, so hat man

$$m(a, b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \frac{\gamma(b) - \gamma(u)}{\sigma(u)\, g(u)}. \tag{86}$$

Ist aber $\bar{K}'$ endlich, oder, was damit gleichbedeutend ist, $M' > 0$, so gilt gemäß (20)

$$m(a, b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \frac{\gamma(b) - \gamma(u)}{\sigma(u)\, g(u)} \frac{\bar{K}' - \varkappa_1}{\bar{K}' + \gamma(b)}, \tag{87}$$

wobei wegen (20)

$$\bar{K}' + \gamma(b) = \frac{\sigma(b)\, g(b)}{M'} > 0$$

ist.

Ist daher

$$\varkappa_1 \leqq K^*, \tag{88}$$

so folgt aus (87)

$$m(a, b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \frac{\gamma(b) - \gamma(u)}{\sigma(u)\, g(u)} \frac{\bar{K}' - K^*}{\bar{K}' + \gamma(b)}.$$

Man hat daher unter der Annahme (88)

für $\bar{K}'$ endlich $\quad m(a, b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \dfrac{\gamma(b) - \gamma(u)}{T_1} \dfrac{\bar{K}' - K^*}{\bar{K}' + \gamma(b)}$,

für $\bar{K}' = \infty$ $\quad m(a, b, \varkappa_1) - \psi(u, \varkappa_1) \geqq \dfrac{\gamma(b) - \gamma(u)}{T_1}$,

wobei T_1 durch (80′) definiert ist.

Man führe nun diese Abschätzungen auf der rechten Seite von (82) ein und berücksichtige, daß das Integral

$$\int_{u_0}^{b} \frac{du}{\sqrt{\gamma(b) - \gamma(u)}} < \int_{a}^{b} \frac{du}{\sqrt{\gamma(b) - \gamma(u)}}$$

bleibt, wobei das letztere Integral wegen $\gamma'(b) = \tau(b)\, g(b) > 0$ eine feste endliche positive Konstante ist. Dann erhält man als Konsequenz von (88)

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du < T_6, \tag{89}$$

wobei T_6 eine von x_1 und q_1 unabhängige feste, positive Konstante bedeutet.

Da nun mindestens eine der beiden Ungleichungen (84), (88) gelten muß, so setzen die Ungleichungen (85), (89) in Evidenz, daß im Falle (A) L unterhalb einer festen Schranke liegen muß, womit unser Satz unter der Voraussetzung der ersten Ungleichung (52) bewiesen ist.

Es gelte nun die zweite Ungleichung (52). Auf Grund derselben wähle man ein beliebiges aber *festes* K^*, $K'' > K^* > \bar{K}''$. Es sei jetzt

$$x_1 \leqq K^*. \tag{90}$$

Dann hat man, da (11) gültig bleibt, wenn b durch a und dementsprechend $x_0(u, b)$ durch $x_0(a, u)$ ersetzt wird, bei Einführung von (30)

$$\begin{aligned} m(a, b, x_1) - \psi(u, x_1) &\geqq -\left(\psi(a, x_1) + \psi(u, x_1)\right) \\ &\geqq T_4'(K'' - x_1) \geqq T_4'(K'' - K^*), \end{aligned}$$

wobei T_4' aus der T_4 definierenden Gleichung bei Ersetzung von b durch a hervorgeht. Führt man diese Abschätzung auf der rechten Seite von (82) ein, so erhält man als Konsequenz von (90)

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\, du < T_7, \tag{91}$$

wobei T_7 eine von x_1 und q_1 unabhängige feste, positive Konstante bedeutet.

Andererseits hat man wegen (32), (35), da wegen (4) $\gamma(a) + x_1$ negativ ist,

$$\begin{aligned} m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1) &\geqq -\left(\psi(a, x_1) - \psi(u, x_1)\right) \\ &\geqq \frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} \left(1 + M'' \frac{\gamma(a) + x_1}{\sigma(a)\, g(a)}\right). \end{aligned}$$

Ist jetzt $\bar{K}'' = -\infty$, oder, was gemäß (36) damit gleichbedeutend ist, $M'' \leqq 0$, so hat man

$$m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1) \geqq \frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} \geqq \frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{T_1}. \tag{92}$$

Ist aber $\bar{K}''$ endlich, oder, was damit gleichbedeutend ist, $M'' > 0$, so gilt

$$m(a, b, x_1) + \psi(u, x_1) \geqq \frac{\gamma(u) - \gamma(a)}{\sigma(u)\, g(u)} \cdot \frac{x_1 - K''}{-(\bar{K}'' + \gamma(a))},$$

wobei wegen (36)

$$-(\bar{K}'' + \gamma(a)) = \frac{\sigma(a)\, g(a)}{M''} > 0$$

ist. Ist daher

$$x_1 \geqq K^*, \tag{93}$$

so folgt aus den letzten Ungleichungen

$$\text{für } \bar{K}'' \text{ endlich } \quad m(a,b,x_1) + \psi(u_1 x_1) \geqq \frac{\gamma(u)-\gamma(a)}{T_1} \frac{K^* - \bar{K}''}{-(\bar{K}'' + \gamma(a))}. \tag{94}$$

Durch die Einführung von (92) und (94) in die Abschätzung (83) ergibt sich wie oben als Konsequenz von (93)

$$L - 2\int_a^b \sigma(u)\,du < T_8, \tag{95}$$

wobei T_8 eine von x_1 und q_1 unabhängige feste, positive Konstante bedeutet.

Da nun mindestens eine der beiden Ungleichungen (90), (93) gelten muß, so setzen (91), (95) in Evidenz, daß auch unter der Voraussetzung der zweiten Ungleichung (52) im Falle (A) L unterhalb einer festen Schranke bleibt, was allein noch zu beweisen war.

§ 16.

Das Kriterium für den monotonen Charakter der Extremalfunktion als Funktion von a und b bei konstantem $\int_a^b \sigma(u)\,du$.

Bei der Substitution

$$u = \varphi(\tilde{u}),\ \varphi'(\tilde{u}) > 0,\ a = \varphi(\tilde{a}),\ b = \varphi(\tilde{b}),\ ds = \varphi'(\tilde{u})\,d\tilde{s}, \tag{1}$$

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{u}^2 + \tilde{g}(\tilde{u})^2\,dv^2,\ \tilde{g}(\tilde{u}) = \frac{g(u)}{\varphi'(\tilde{u})},\ \tilde{\sigma}(\tilde{u}) = \varphi'(\tilde{u})\,\sigma(u),$$

$$\tau(\tilde{u}) = \varphi'(\tilde{u})^2\,\tau(u)$$

behalten die den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildenden Integrale §1 (5), (6) in den neuen mit dem Zeichen ~ überstrichenen Variabeln und Funktionen dieselbe Gestalt. Die Ausdrücke

$$\sigma(u)\,g(u),\ \frac{\tau(u)}{\sigma(u)^2},\ \sigma(u)\,du,\ \frac{1}{\sigma(u)}\frac{\partial}{\partial u},\ \tau(u)\,g(u)\,du,\ \gamma(u),\ \psi(u,x),\ \mu(a,b), \tag{2}$$

$$\int_a^b \sigma(u)\,du,\ G(L,a,b)$$

sind offenbar dieser Transformation gegenüber invariant. Daher ist auch der Ausdruck

$$\frac{1}{\sigma(a)}\Phi_a(a,b) + \frac{1}{\sigma(b)}\Phi_b(a,b) = \frac{1}{\sigma(a)}\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial a} + \frac{1}{\sigma(b)}\cdot\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial b}$$

invariant. Sein Vorzeichen gibt an, ob die Funktion $\Phi(a, b)$ wächst oder fällt, wenn a und b so wachsen, daß

$$\int_a^b \sigma(u)\, du$$

konstant bleibt. Dieses vorausgeschickt — gelten die folgenden Sätze:

Satz XXIV. *Gilt für alle* a, b, $\alpha < a < b < \beta$

$$\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a,b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a,b) \leqq 0, \tag{3}$$

so gilt auch für alle a, b, L, *wobei natürlich*

$$L > 2\int_a^b \sigma(u)\, du$$

sein muß,

$$\frac{1}{\sigma(a)}G_a(L,a,b) + \frac{1}{\sigma(b)}G_b(L,a,b) \leqq 0. \tag{4}$$

Gilt dabei für ein Wertepaar a, b *in* (3) *das Zeichen* $<$, *so gilt es auch in* (4).

Zusatz 1. Da gemäß der am Schlusse des § 13 zusammengestellten Tafel für die Ableitungen der Extremalfunktion in der Klasse (B, 1) G_a positiv und G_b nicht negativ ausfällt und mithin (4) nicht gelten kann, *so folgt aus* (4), *daß Extremalen vom Typus* (B, 1) *überhaupt nicht vorkommen können.*

Zusatz 2. Der Satz und der Zusatz 1 bleiben, wie aus dem Beweisgang sich von selbst versteht, unverändert bestehen, wenn der Bereich, auf welchen sie sich beziehen, auf eine beliebige endliche oder unendliche, abgeschlossene oder nicht abgeschlossene Teilstrecke des Definitionsbereichs α, β beschränkt wird.

Satz XXIV′. *Der obige Satz nebst seinen Zusätzen bleibt unverändert bestehen, wenn in den Ungleichungen* (3) *und* (4) *das Zeichen* $<$ *durch das Zeichen* $>$ *ersetzt wird und im Zusatz* 1 (B, 1) *durch* (B, 2).

Beweis des Satzes XXIV. Wir schicken die folgenden Hilfssätze voraus:

Hilfssatz I. Unter der Voraussetzung (3) folgt aus

$$\psi(a, \varkappa) < 0, \quad \psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) > 0 \tag{5}$$

neben den wegen $\gamma'(u) > 0$ trivialen Konsequenzen

$$\psi(b, \varkappa) > 0 \quad \text{und} \quad a < b \tag{6}$$

die Ungleichung

$$\psi'(a, \varkappa) > 0. \tag{7}$$

Beweis. Man setze zur Abkürzung

$$\sigma(u)g(u) = h(u).$$

Dann gelten, wie sogleich gezeigt werden wird, die Identitäten

$$(8)\quad (h(a)+h(b))^2\,\mu_b(a,b) = h(b)\,(h(a)+h(b))\,\psi'(b,\varkappa) + \\ + h(a)h'(b)\,(\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)).$$

$$(8')\quad (h(a)+h(b))^2\,\mu_b(a,b) = h(b)^2\psi'(b,\varkappa) + h(a)\,\gamma'(b) + h(a)\,h'(b)\,\psi(a,\varkappa).$$

$$(9)\quad (h(a)+h(b))^2\,\mu_a(a,b) = -\,h(a)\,(h(a)+h(b))\,\psi'(a,\varkappa) - \\ - h(b)h'(a)\,(\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)).$$

$$(9')\quad (h(a)+h(b))^2\,\mu_a(a,b) = -\,h(a)\,(h(a)+h(b))\,\psi'(a,\varkappa) + \\ + h(b)\,\frac{\gamma'(a)-h(a)\,\psi'(a,\varkappa)}{-\psi(a,\varkappa)}\,(\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)),$$

wobei die letzte Gleichung natürlich $\psi(a,\varkappa) \neq 0$ voraussetzt. Man hat nämlich

$$(10)\quad \gamma(b)+\varkappa = h(b)\,\psi(b,\varkappa),\quad \gamma(a)+\varkappa = h(a)\,\psi(a,\varkappa),$$

$$\mu(a,b) = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{h(a)+h(b)} = \frac{h(b)\,\psi(b,\varkappa)-h(a)\,\psi(a,\varkappa)}{h(a)+h(b)},$$

$$(h(a)+h(b))^2\,\mu_b(a,b) = (h(a)+h(b))\,(h'(b)\,\psi(b,\varkappa)+h(b)\,\psi'(b,\varkappa)) - \\ - h'(b)\,(h(b)\,\psi(b,\varkappa)-h(a)\,\psi(a,\varkappa)),$$

und hieraus erhält man unmittelbar die Identität (8). Aus dieser ergibt sich die Identität (9) durch Vertauschung von a mit b und Wechsel des Vorzeichens. Ferner folgt aus (10)

$$\gamma'(b) = h(b)\,\psi'(b,\varkappa) + h'(b)\,\psi(b,\varkappa),$$
$$\gamma'(a) = h(a)\,\psi'(a,\varkappa) + h'(a)\,\psi(a,\varkappa),$$
$$h'(a) = \frac{\gamma'(a)-h(a)\,\psi'(a,\varkappa)}{\psi(a,\varkappa)}.$$

Durch Einführung dieser Formel für $h'(a)$ geht aus der Identität (9) die Identität (9') hervor, während durch Einführung der Formel für $\gamma'(b)$ die Identität (8') auf die Identität (8) zurückgeführt wird. Damit sind die Identitäten hergeleitet.

Es sei nun b_1 eine Stelle, an welcher die Funktion $\psi(u,\varkappa)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ ihr Maximum annimmt. Ist dann $b_1 < b$, so gilt, da wegen der Voraussetzung $\psi(a,\varkappa) < 0$ $b_1 > a$ sein muß, $\psi'(b_1,\varkappa) = 0$, während für $b_1 = b$ nur $\psi'(b_1,\varkappa) \geqq 0$ gesichert ist. Jedenfalls ist daher

$$(11)\quad \psi'(b_1,\varkappa) \geqq 0.$$

Ferner folgt aus der zweiten Voraussetzung (5)

$$(12)\quad \psi(a,\varkappa)+\psi(b_1,\varkappa) > 0.$$

Daher gilt, wie sogleich gezeigt werden wird,

$$\mu_b(a, b_1) > 0. \tag{13}$$

Diese Ungleichung folgt nämlich im Falle $h'(b_1) > 0$ wegen (11) und (12) aus der Identität (8) für das Wertepaar a, b_1, und im Falle $h'(b_1) \leqq 0$ wegen (11) und der Voraussetzung $\psi(a, \varkappa) < 0$ aus der Identität (8′).

Träfe nun die zu beweisende Aussage des Hilfssatzes nicht zu, d. h. wäre

$$\psi'(a, \varkappa) \leqq 0,$$

so würde wegen (12) und der Voraussetzung $\psi(a, \varkappa) < 0$ aus der Identität (9′) für das Wertepaar a, b_1 die Ungleichung

$$\mu_a(a, b_1) > 0$$

folgen und aus dieser in Verbindung mit (13) die Ungleichung

$$\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a, b_1) + \frac{1}{\sigma(b_1)}\mu_b(a, b_1) > 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (3). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz II. Unter der Voraussetzung (3) bleiben die Aussagen des Hilfssatzes I, d. h. also neben den trivialen Konsequenzen (6) die Ungleichung

$$\psi'(a, \varkappa) > 0 \tag{14}$$

noch gewährleistet durch die Voraussetzungen

$$\psi(a, \varkappa) < 0, \quad \psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) = 0, \quad \frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a, b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a, b) < 0, \tag{15}$$

wobei die durch die letzte Ungleichung ausgedrückte Ausschließung des Gleichheitszeichens in der Voraussetzung (3) nur für das betreffende Wertepaar a, b gefordert wird.

Beweis. Im Falle

$$\psi'(b, \varkappa) < 0 \tag{16}$$

kann man ein b', $a < b' < b$, so wählen, daß

$$\psi(b', \varkappa) > \psi(b, \varkappa) \tag{17}$$

ist, und mithin wegen der zweiten Voraussetzung (15)

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b', \varkappa) > 0 \tag{18}$$

gilt. Damit sind aber die Voraussetzungen des Hilfssatzes I für das Wertepaar a, b' gegeben, und dieser sichert die zu beweisende Ungleichung (14).

Im Falle

$$\psi'(b, \varkappa) \geqq 0 \tag{19}$$

dagegen folgt zunächst aus der Identität (8) wegen der zweiten Voraussetzung (15)

$$\mu_b(a, b) \geqq 0. \tag{20}$$

Träfe nun die zu beweisende Ungleichung (14) nicht zu, so würde aus der Identität (9) wegen der zweiten Voraussetzung (15) auch

$$\mu_a(a, b) \geqq 0 \tag{21}$$

folgen. Diese Ungleichung in Verbindung mit der vorhergehenden würde aber die Ungleichung

$$\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a, b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a, b) \geqq 0$$

nach sich ziehen — im Widerspruch zur dritten Voraussetzung (15). Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

Unter der Voraussetzung

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) = 0 \tag{22}$$

ergibt die Addition der Identitäten (8) und (9) nach Division der ersten durch $\sigma(b)$ und der zweiten durch $\sigma(a)$ bei Berücksichtigung der Definitionsgleichung $h(a) = \sigma(u)\, g(u)$

$$\begin{aligned} g(b)\,\psi'(b, \varkappa) - g(a)\,\psi'(a, \varkappa) \\ = (\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b))\left(\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a, b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a, b)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Da nun wegen § 7 (3), (4), (5) die Gleichung (22) mit der Gleichung

$$\varkappa = \varkappa_0(a, b)$$

gleichbedeutend ist, so läßt sich der Sachverhalt, daß (23) aus (22) folgt, auch in Gestalt der Identität

$$\begin{aligned} g(b)\,\psi'(b, \varkappa_0) - g(a)\,\psi'(a, \varkappa_0) \\ = (\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b))\left(\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a, b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a, b)\right) \end{aligned} \tag{24}$$

ausdrücken, wobei $\varkappa_0 = \varkappa_0(a, b)$ zu setzen ist.

Von dieser Identität, welche sich übrigens auch aus den Gleichungen § 8 (5), (6) ablesen läßt, wird in der Folge Gebrauch gemacht werden.

Bestehen die Relationen

$$\psi(a, \varkappa) < 0, \quad \psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) \geqq 0,$$

so gibt es wegen der trivialen Konsequenzen (6) und wegen $\gamma'(u) > 0$ ein u_0, so daß

$$\begin{aligned} &\text{für } a \leqq u < u_0 \quad \psi(u, \varkappa) < 0, \quad \text{für } u_0 < u \leqq b \quad \psi(u, \varkappa) > 0, \\ &\psi(u_0, \varkappa) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

ist. Dieses vorausgeschickt formulieren wir den

Hilfssatz III. Unter der Voraussetzung (3) folgt aus

$$\psi(a, \varkappa) < 0, \quad \psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) > 0 \tag{26}$$

$$a < b \quad \text{und für } a \leqq u \leqq u_0 \quad \psi'(u, \varkappa) > 0. \tag{27}$$

Die Ungleichungen (27) folgen unter der Voraussetzung (3) auch aus

$$(28)\quad \psi(a,\varkappa)<0,\quad \psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)=0,\quad \frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a,b)+\frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a,b)<0,$$

wobei die durch die letzte Ungleichung ausgedrückte Ausschließung des Gleichheitszeichens in der Voraussetzung (3) nur für das betreffende Wertepaar a, b gefordert wird.

Ebenso folgen die Ungleichungen (27) unter der Voraussetzung (3) auch aus

$$(29)\qquad \psi(a,\varkappa)<0,\quad \psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)=0,\quad \psi'(a,\varkappa)>0.$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß unter jedem der drei Voraussetzungssysteme (26), (28), (29)

$$(30)\qquad \psi'(a,\varkappa)>0$$

ist. Diese Ungleichung ist nämlich in dem Voraussetzungssystem (29) explizite aufgeführt, unter den Voraussetzungen (26) folgt sie aus dem Hilfssatz I und unter den Voraussetzungen (28) aus dem Hilfssatz II.

Ferner ist wegen $\gamma(u_0)+\varkappa=0$

$$(30')\qquad \psi'(u_0,\varkappa)=\frac{\tau(u_0)}{\sigma(u_0)}>0.$$

Träfe nun die zu beweisende Ungleichung (27) nicht zu, so müßte $\psi'(u,\varkappa)$ wegen (30) im Intervall $a\leqq u\leqq u_0$ Nullstellen besitzen. Es sei u_1 die kleinste unter ihnen. Denn fällt wegen (30) und (30') u_1 weder mit a noch mit u_0 zusammen. Man hätte also bei Berücksichtigung von (25)

$$(31)\qquad a<u_1<u_0,\quad \psi(u_1,\varkappa)<0,$$

ferner voraussetzungsgemäß

$$(32)\qquad \psi'(u_1,\varkappa)=0$$

und für $a\leqq u<u_1$

$$\psi'(u,\varkappa)>0.$$

Mithin wäre

$$\psi(u_1,\varkappa)>\psi(a,\varkappa),$$

und hieraus würde auf Grund der in jedem der drei Voraussetzungssysteme (26), (28), (29) gesicherten Relation

$$\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)\geqq 0$$

die Ungleichung

$$\psi(u_1,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)>0$$

folgen, welche wegen (31) und (32) dem Hilfssatz I widerspricht. Damit ist der Hilfssatz III bewiesen.

Hilfssatz IV. *Unter der Voraussetzung* (3) *folgt für* $a < b$, $q \geqq m(a, b, \varkappa)$ *sowohl aus*

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) > 0 \tag{33}$$

als auch aus

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) = 0, \quad \frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a, b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a, b) < 0 \tag{34}$$

die Ungleichung

$$V(a, b, \varkappa, q) > 0, \tag{34'}$$

während durch

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) = 0, \quad \psi'(a, \varkappa) > 0 \tag{35}$$

noch

$$V(a, b, \varkappa, q) \geqq 0 \tag{36}$$

gesichert bleibt.

Beweis. Im Falle $\psi(a, \varkappa) \geqq 0$ ist wegen des monotonen Charakters der Funktion $\gamma(u)$ für $u > a$ $\psi(u, \varkappa) > 0$ und mithin die Ungleichung (34') unmittelbar durch die Definitionsgleichung § 5 (3) gesichert. Wir können daher annehmen, daß

$$\psi(a, \varkappa) < 0 \tag{37}$$

ist. Durch diese Ergänzung geht das Voraussetzungssystem (33) in (26) über, während (34) mit (28), (35) mit (29) übereinstimmt. Durch den Hilfssatz III ist also unter jedem der drei Voraussetzungssysteme (33), (34), (35) die Ungleichung

$$\psi'(u, \varkappa) > 0 \text{ für } a \leqq u \leqq u_0 \tag{38}$$

gewährleistet.

Es sei nun im Intervall $u_0 \leqq u \leqq b$ b' der kleinste Wert von u, für welchen

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(u, \varkappa) = 0$$

ist. Dann hat man also

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b', \varkappa) = 0, \quad \psi(a, \varkappa) + \psi(x, \varkappa) < 0 \text{ für } u_0 \leqq x < b'.$$

Wegen

$$\psi(u_0, \varkappa) + \psi(x, \varkappa) = \psi(x, \varkappa) \geqq 0$$

folgt aus (38), daß es zu jedem x ein und nur ein y, $a < y \leqq u_0$ gibt, so daß die Gleichung

$$\psi(y, \varkappa) + \psi(x, \varkappa) = 0 \tag{39}$$

gilt. Da für $x = b'$ $y = a$ wird, so sehen wir, daß im Bereiche $a \leqq y \leqq u_0$, $u_0 \leqq x \leqq b'$ durch die Gleichung (39) y als eindeutige Funktion von x bestimmt wird. Die Umkehrung braucht natürlich nicht eindeutig zu sein. Man kann also setzen

$$y = f(x), \quad \psi(f(x), \varkappa) = -\psi(x, \varkappa), \quad f'(x) = -\frac{\psi'(x, \varkappa)}{\psi'(y, \varkappa)}, \tag{40}$$

wobei im letzten Ausdruck der Nenner wegen (38) positiv bleibt.

Nun ist gemäß der Definitionsgleichung § 5 (3)

$$V(a,b',\varkappa,q)=\int_a^{u_0}\frac{\psi(u,\varkappa)\,du}{g(u)\sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}}+\int_{u_0}^{b'}\frac{\psi(u,\varkappa)\,du}{g(u)\sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}},$$

$$\int_a^{u_0}\frac{\psi(u,\varkappa)\,du}{g(u)\sqrt{q^2-\psi(u,\varkappa)^2}}=\int_{b'}^{u_0}\frac{\psi(f(x),\varkappa)\,f'(x)\,dx}{g(f(x))\sqrt{q^2-\psi(f(x),\varkappa)^2}}=\int_{u_0}^{b'}\frac{\psi(x,\varkappa)\,f'(x)\,dx}{g(f(x))\sqrt{q^2-\psi(x,\varkappa)^2}}.$$

Mithin erhält man

$$V(a,b'\varkappa,q)=\int_{u_0}^{b'}\frac{\psi(x,\varkappa)\left\{\frac{1}{g(x)}+\frac{f'(x)}{g(f(x))}\right\}dx}{\sqrt{q^2-\psi(x,\varkappa)^2}}$$

und durch Einführung von (40)

$$(41)\qquad V(a,b',\varkappa,q)=\int_{u_0}^{b'}\frac{-\psi(x,\varkappa)\{g(x)\,\psi'(x,\varkappa)-g(y)\,\psi'(y,\varkappa)\}\,dx}{g(x)\,g(y)\,\psi'(y,\varkappa)\sqrt{q^2-\psi(x,\varkappa)^2}}.$$

Nun ist für $x>u_0$

$$\psi(x,\varkappa)>0,\quad y<x\quad\text{und wegen (39)}\quad \varkappa=\varkappa_0(y,x).$$

Setzt man daher in der Identität (24) $a=y$, $b=x$, so zeigt die Voraussetzung (3), daß der Integrand auf der rechten Seite nirgends negativ ist. Wie ferner die Definitionsgleichung § 5 (3) unmittelbar erkennen läßt, ist wegen $u_0<b'$ für $b'<b$

$$V(a,b,\varkappa,q)>V(a,b',\varkappa,q).$$

Mithin gilt unter allen Umständen

$$V(a,b,\varkappa,q)\geqq 0.$$

Dabei ist unter der Voraussetzung (33) wegen $b'<b$ das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Unter den Voraussetzungen (34) oder (35) könnte das Gleichheitszeichen nur für $b'=b$ gelten. Dann aber wäre auf der rechten Seite von (41) der Integrand an der Stelle $x=b'=b$ wegen der Identität (24) unter der zweiten Voraussetzung (34) positiv und mithin auch das Integral. Also ist auch unter den Voraussetzungen (34) das Gleichheitszeichen ausgeschlossen. Damit ist der Hilfssatz IV vollständig bewiesen.

Hilfssatz IV'. *Man ersetze in der Voraussetzung* (3) *das Zeichen* $<$ *durch das Zeichen* $>$. *Dann folgt für* $a<b$ $q\geqq m(a,b,\varkappa)$ *sowohl aus*

$$\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)<0$$

als auch aus

$$\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)=0,\quad \frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a,b)+\frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a,b)>0$$

$$V(a,b,\varkappa,q)<0,$$

während durch

$$\psi(a,\varkappa)+\psi(b,\varkappa)=0,\quad \psi'(b,\varkappa)>0$$

noch

$$V(a,b,\varkappa,q)\leqq 0$$

gesichert bleibt.

Beweis. Bei der Substitution

$\tilde{u}=-u$, $\tilde{\sigma}(\tilde{u})=\sigma(u)$, $\tilde{\tau}(\tilde{u})=\tau(u)$, $\tilde{g}(\tilde{u})=g(u)$, $\tilde{a}=-b$, $b=-a$ und mithin $\tilde{a}<\tilde{b}$, $\tilde{\gamma}(-u)=-\gamma(u)$ und mithin $\tilde{\gamma}(\tilde{u})=-\gamma(u)$, aber $\tilde{\gamma}(\tilde{a})=-\gamma(b)$, $\tilde{\gamma}(\tilde{b})=-\gamma(a)$, $\frac{d}{d\tilde{u}}\tilde{\gamma}(\tilde{u})=\tilde{\tau}(\tilde{u})\tilde{g}(\tilde{u})$, $\tilde{\varkappa}=-\varkappa$, $\tilde{\psi}(\tilde{u},\tilde{\varkappa})=-\psi(u,\varkappa)$ und mithin $\tilde{\psi}(\tilde{u},\tilde{\varkappa})=\frac{\tilde{\gamma}(\tilde{u})+\tilde{\varkappa}}{\tilde{\sigma}(\tilde{u})\tilde{g}(u)}$, $\tilde{m}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{\varkappa})=m(a,b,\varkappa)$ und mithin $\tilde{m}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{\varkappa})=\operatorname{Max}_{\tilde{a}\leqq\tilde{u}\leqq\tilde{b}}|\tilde{\psi}(\tilde{u},\tilde{\varkappa})|$, $\tilde{q}=q$, $\tilde{V}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{\varkappa},\tilde{q})=-V(a,b,\varkappa,q)$ und mithin

$$\tilde{V}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{\varkappa},\tilde{q})=\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\frac{\tilde{\psi}(\tilde{u},\tilde{\varkappa})\,d\tilde{u}}{\tilde{g}(\tilde{u})\sqrt{\tilde{q}^2-\tilde{\psi}(\tilde{u},\tilde{\varkappa})^2}},$$

$\tilde{\mu}(\tilde{a},\tilde{b})=\mu(a,b)$ und mithin

$$\tilde{\mu}(\tilde{a},\tilde{b})=\frac{\tilde{\gamma}(\tilde{b})-\tilde{\gamma}(\tilde{a})}{\tilde{\sigma}(a)\tilde{g}(\tilde{a})+\tilde{\sigma}(\tilde{b})\tilde{g}(b)}$$

$$\tilde{\mu}_{\tilde{a}}(\tilde{a},\tilde{b})=-\mu_b(a,b),\quad \tilde{\mu}_{\tilde{b}}(\tilde{a},\tilde{b})=-\mu_a(a,b),$$

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}(a)}\tilde{\mu}_{\tilde{a}}+\frac{1}{\tilde{\sigma}(b)}\tilde{\mu}_{\tilde{b}}=-\left(\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a+\frac{1}{\sigma(b)}\mu_b\right)$$

bleiben alle in dieser Arbeit gemachten Voraussetzungen in den neuen Bezeichnungen bestehen. Daher gilt der Hilfssatz IV auch in den neuen Bezeichnungen, und das ist mit dem zu beweisenden Hilfssatz IV′ in den alten Bezeichnungen gleichbedeutend.

Auf Grund des Hilfssatzes IV ist es nunmehr leicht, den Satz XXIV zu beweisen.

Gemäß § 5 (12) (31) gilt beim Typus (B, 1)

$$\psi(a,\varkappa_1)+\psi(b,\varkappa_1)>0,\quad V(a,b,\varkappa_1,q_1)\leqq 0.$$

Da das gleichzeitige Bestehen dieser beiden Ungleichungen unter der Voraussetzung (3) dem Hilfssatz IV widerspricht, so können Extremalen vom Typus (B, 1) in der Tat nicht vorkommen.

Beim Typus (B, 2) ist gemäß der am Schlusse des § 13 zusammengestellten Tafel für die Ableitungen der Extremalfunktion G_a nicht positiv und G_b negativ, und es besteht daher die zu beweisende Ungleichung (4) sogar unter Ausschluß des Gleichheitszeichens.

Beim Typus (A) erhält man aus der Tafel

$$(42) \qquad \frac{1}{\sigma(a)} G_a + \frac{1}{\sigma(b)} G_b = 2\sqrt{q_1^2 - \psi(a, x_1)^2} - 2\sqrt{q_1^2 - \psi(b, x_1)^2}.$$

In der Klasse (A) verschwindet gemäß § 5 (5′) $V(a, b, x_1, q_1)$. Daher ist gemäß dem Hilfssatz IV

$$(43) \qquad \psi(a, x_1) + \psi(b, x_1) \leqq 0,$$

und mithin, da nach Satz VII $\psi(a, x_1)$ negativ und $\psi(b, x_1)$ positiv ist,

$$-\psi(a, x_1) \geqq \psi(b, x_1) > 0.$$

Die Einführung dieses Ergebnisses in (42) zeigt, daß die zu beweisende Ungleichung (4) auch beim Typus (A) gilt. Gilt dabei in (3) für das betreffende Wertepaar a, b das Zeichen $<$, so ist gemäß dem Hilfssatze IV das Gleichheitszeichen in (43) mit dem Verschwinden von $V(a, b, x_1, q_1)$ unvereinbar und daher ausgeschlossen. Mithin ist dann auch das Gleichheitszeichen in (42) und also auch in (4) ausgeschlossen. Damit sind die Behauptungen des zu beweisenden Satzes XXIV auch beim Typus (A) als zutreffend festgestellt.

Beim Typus (B, 3) erhält man bei Berücksichtigung der durch § 12 (38) gegebenen Umformung der in der Tafel am Schluß des § 13 stehenden Formel für G_a

$$\frac{1}{\sigma(a)} G_a + \frac{1}{\sigma(b)} G_b = (L - L''(a, b)) \frac{g(b)\, \psi'(b, x_0) - g(a)\, \psi'(a, x_0)}{\sigma(a)\, g(a) + \sigma(b)\, g(b)} -$$
$$- 2\, g(a)\, V(a, b, x_0, \mu)\, \psi'(a, x_0).$$

Die Einführung der Identität (24) ergibt

$$(44) \qquad \frac{1}{\sigma(a)} G_a + \frac{1}{\sigma(b)} G_b = (L - L''(a, b)) \left(\frac{1}{\sigma(a)}\, \mu_a + \frac{1}{\sigma(b)} \mu_b \right) -$$
$$- 2\, g(a)\, V(a, b, x_0, \mu)\, \psi'(a, x_0).$$

Gemäß § 7 (8), (11), (12) gilt im Falle (B, 3)

$$L - L''(a, b) \geqq 0, \quad \psi'(a, x_0) > 0, \quad \psi(a, x_0) + \psi(b, x_0) = 0.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt gemäß dem Hilfssatz IV

$$V(a, b, x_0, \mu) \geqq 0,$$

wobei das Zeichen $>$ gesichert ist, wenn für das betreffende Wertepaar a, b in der Voraussetzung (3) das Zeichen $<$ gilt. Die Gleichung (44) zeigt daher, daß auch beim Typus (B, 3) die Ungleichung (4) gilt, und die Behauptungen des zu beweisenden Satzes zutreffen.

Damit ist der Satz XXIV nebst seinem Zusatz 1 vollständig bewiesen.

Ebenso beweist man den Satz XXIV′ auf Grund des Hilfssatzes IV′.

Der Satz XXIV läßt sich in einem gewissen Umfang umkehren durch den

Zusatz 3 des Satzes XXIV. *Bei jedem Wertepaar a, b, bei welchem die lineare isoperimetrische Ungleichung als genaue Schranke in Kraft tritt, folgt aus der Gültigkeit von* (4) *für alle L auch* (3). Denn in diesem Falle gilt für $L \geqq \overline{L}(a, b)$ die Gleichung (44), aus deren Gültigkeit für beliebig große L sich die Behauptung unmittelbar ablesen läßt.

Da gemäß Satz X § 8 die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei allen Wertepaaren a, b die lineare isoperimetrische Ungleichung als genaue Schranke in Kraft tritt, in der Gültigkeit der Ungleichungen

$$\mu_a(a, b) < 0, \quad \mu_b(a, b) > 0 \text{ für alle } a,\ b,\ \alpha < a < b < \beta,$$

besteht, so gilt der

Zusatz 4 des Satzes XXIV. *Unter den Voraussetzungen*

$$\mu_a(a, b) < 0, \quad \mu_b(a, b) > 0 \text{ für alle } a,\ b,\ \alpha < a < b < \beta,$$

folgt aus der Gültigkeit von (4) *für alle a, b, L, $L > 2\int_a^b \sigma(u)\,du$, auch die Gültigkeit von* (3).

Die entsprechenden Umkehrungssätze gelten beim Satz XXIV′.

Eine unmittelbare Konsequenz der Sätze XXIV und XXIV′ ist der

Satz XXV. *Unter der Voraussetzung*

$$\frac{1}{\sigma(a)}\,\mu_a + \frac{1}{\sigma(b)}\,\mu_b < 0 \text{ für alle } a, b,\ a < b$$

kann die isoperimetrische Aufgabe in einem nach unten offenen Gebiet keine Lösung besitzen.

Ebenso kann die isoperimetrische Aufgabe unter der Voraussetzung

$$\frac{1}{\sigma(a)}\,\mu_a + \frac{1}{\sigma(b)}\,\mu_b > 0 \text{ für alle } a, b,\ a < b,$$

in einem nach oben offenen Gebiet keine Lösung besitzen. Unter jeder dieser beiden Voraussetzungen kann daher die isoperimetrische Aufgabe in einem offenen Gebiet keine Lösung besitzen.

Dagegen gelten die Sätze:

Satz XXVI. *Es gelte*

$$\frac{1}{\sigma(a)}\,\mu_a + \frac{1}{\sigma(b)}\,\mu_b < 0 \tag{45}$$

in einem nach unten abgeschlossenen Gebiet, also für $\alpha_1 \leqq a < b < \beta$, wobei die obere Grenze β, wie wiederholt bemerkt, auch unendlich sein kann. Es sei ferner

$$L < 2\int_{\alpha_1}^{\beta} \sigma(u)\,du. \tag{46}$$

Dann hat die isoperimetrische Aufgabe in diesem Gebiet mindestens eine Lösung. Jede Lösungskurve ist eine Extremale vom Typus (B, 3), *für welche* $a = \alpha_1$ *ist, und welche mit der Kurve* $u = \alpha_1$ *ein endliches Stück, mit der Kurve* $u = b$ *dagegen nur einen Punkt gemein hat.*

Satz XXVI'. Es gelte

$$\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b > 0$$

in einem nach oben abgeschlossenen Gebiet, also für $\alpha < a < b \leqq \beta_1$, wobei die untere Grenze α, wie wiederholt bemerkt, auch $-\infty$ sein kann. Es sei ferner

$$L < 2\int_a^{\beta_1} \sigma(u)\, du.$$

Dann hat die isoperimetrische Aufgabe in diesem Gebiet mindestens eine Lösung. Jede Lösungskurve ist eine Extremale vom Typus (B, 3), für welche $b = \beta_1$ ist, und welche mit der Kurve $u = \beta_1$ ein endliches Stück, mit der Kurve $u = a$ dagegen nur einen Punkt gemein hat.

Beweis des Satzes XXVI. Kraft des Satzes XXIV folgt aus (45) die Ungleichung (4), bei ausgeschlossenem Gleichheitszeichen. Es ist daher für alle a', b', L, welche dem Bereich

$$\alpha_1 < a' < b' < \beta, \quad L > 2\int_{a'}^{b'} \sigma(u)\, du \tag{47}$$

angehören,

$$G(L, a', b') < G(L, \alpha_1, b),$$

wobei b durch die Gleichung

$$\int_{\alpha_1}^{b} \sigma(u)\, du = \int_{a'}^{b'} \sigma(u)\, du$$

bestimmt ist, welche wegen (46), (47) stets eine und nur eine Lösung hat. Man kann sich daher darauf beschränken, das Maximum von $G(L, \alpha_1, b)$ als Funktion von b im Bereich

$$\alpha_1 < b, \quad 2\int_{\alpha_1}^{b} \sigma(u)\, du < L$$

zu suchen, der wegen (46) im Bereich $\alpha_1 < b < \beta$ enthalten ist. Man erweitere nun, wie beim Beweise der Sätze XX und XXI den Definitionsbereich der Funktion $G(L, \alpha_1, b)$, indem man sie beim Bestehen einer der beiden Gleichungen

$$b = \alpha_1, \quad 2\int_{\alpha_1}^{b} \sigma(u)\, du = L$$

durch Null definiert. Dabei bleibt die Stetigkeit der Funktion gemäß den Sätzen XIV, XV, § 10 (10), (12), (27) erhalten. Da der erweiterte Bereich nunmehr wegen (46) beschränkt und abgeschlossen ist, so nimmt die Funktion an mindestens einer Stelle $b = b^*$ ihr Maximum an, und da dieses nicht verschwinden kann, so ist

$$b^* > \alpha_1, \quad 2\int_{\alpha_1}^{b^*} \sigma(u)\,du < L.$$

Nun sind gemäß dem Zusatz 1 des Satzes XXIV Extremalen vom Typus (B, 1) durch die Voraussetzung (45) ausgeschlossen. Bei Extremalen vom Typus (A) und (B, 2) kann gemäß der am Schlusse des § 13 zusammengestellten Tafel für die Ableitungen der Extremalfunktion G_b nicht verschwinden, ebenso bei Extremalen vom Typus (B, 3), welche mit der Kurve $u = b$ mehr als einen Punkt gemein haben. Also ist die Lösungskurve eine Extremale vom Typus (B, 3), welche mit der Kurve $u = b^*$ nur einen Punkt gemein hat. Hätte nun die Extremale mit der Kurve $u = \alpha_1$ auch nur einen Punkt gemein, so würde sich aus der Tafel

$$G_a(L, \alpha_1, b^*) = G_b(L, \alpha_1, b^*) = 0 \text{ und mithin } L'(\alpha_1, b^*) = L''(\alpha_1, b^*)$$

ergeben. Dann müßte aber gemäß den Definitionsgleichungen § 5 (20), (25), § 7 (10)

$$V(\alpha_1, b^*, \varkappa_0, \mu) = 0, \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(\alpha_1, b^*), \quad \mu = \mu(\alpha_1, b^*)$$

sein. Da nun wegen § 7 (4)

$$\psi(\alpha_1, \varkappa_0) + \psi(b^*, \varkappa_0) = 0$$

ist und wegen (45)

$$\frac{1}{\sigma(\alpha_1)}\,\mu_a(\alpha_1, b^*) + \frac{1}{\sigma(b^*)}\,\mu_b(\alpha_1, b^*) < 0$$

gilt, so widerspricht das Verschwinden von $V(\alpha_1, b^*, \varkappa_0, \mu)$ dem Hilfssatz IV des laufenden Paragraphen. Also hat die Extremale mit der Kurve $u = \alpha_1$ in der Tat ein endliches Stück gemein. Damit sind alle Behauptungen des Satzes XXVI bewiesen.

Ebenso beweist man den Satz XXVI′.

Die Zusammenstellung der Sätze XXIV und XXIV′ ergibt unmittelbar den

Satz XXVII. Gilt identisch in a und b, $\alpha < a < b < \beta$

$$\frac{1}{\sigma(a)}\,\mu_a + \frac{1}{\sigma(b)}\,\mu_b = 0, \tag{48}$$

so ist auch für alle a, b, L, wobei natürlich

$$L > 2\int_a^b \sigma(u)\,du$$

sein muß,

$$\frac{1}{\sigma(a)} G_a(L, a, b) + \frac{1}{\sigma(b)} G_b(L, a, b) = 0.$$

Wir können das auch so aussprechen: Ist $\mu(a, b)$ eine Funktion des Integrals

$$\int_a^b \sigma(u)\, du,$$

so gilt das bei festem L auch von $G(L, a, b)$.

Endlich gibt es dem Zusatz 1 des Satzes XXIV entsprechend unter der Voraussetzung (48) weder Extremalen vom Typus (B, 1) noch vom Typus (B, 2).

Man reduziere nun, was offenbar immer möglich ist, durch eine Transformation von der Gestalt (1) $\sigma(u)$ auf 1. Dann lautet die Voraussetzung (48) identisch in a und b

$$\mu_a + \mu_b = 0. \tag{48'}$$

Da nun gemäß § 7 (5) wegen $\sigma(u) = 1$

$$\mu(a, b) = \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{g(a) + g(b)}$$

wird, so hat man

$$\mu_a + \mu_b = \frac{\tau(b)\, g(b) - \tau(a)\, g(a)}{g(a) + g(b)} - \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{(g(a) + g(b))^2} (g'(a) + g'(b)),$$

$$0 = \frac{\tau(b)\, g(b) - \tau(a)\, g(a)}{\gamma(b) - \gamma(a)} - \frac{g'(a) + g'(b)}{g(a) + g(b)}.$$

Da der Grenzwert der rechten Seite für $b \to a$ gleich $\frac{\tau'(a)}{\tau(a)}$ ist, so muß $\tau'(a)$ identisch verschwinden, d. h. $\tau(u)$ muß eine positive Konstante sein. Da endlich ein positiver konstanter Faktor von dem Integral § 1 (6), welches Gegenstand unserer Untersuchung ist, ohne weiteres abgespalten werden kann, so können wir $\tau(u)$ ebenfalls als auf 1 reduziert betrachten. Dann aber liegt das sogenannte klassische isoperimetrische Problem vor. Wie der Satz XXIX des nächsten Paragraphen lehrt, gilt nun beim klassischen isoperimetrischen Problem die Gleichung (48), welche in diesem Fall die Gestalt (48') annimmt, dann und nur dann, wenn die Gausssche Krümmung konstant ist. *Wir sehen also, daß $\mu(a, b)$ und gemäß Satz* XXVII *mithin auch $G(L, a, b)$ bei festem L dann und nur dann Funktionen von*

$$\int_a^b \sigma(u)\, du$$

sind, wenn das isoperimetrische Problem durch eine Transformation von der Gestalt (1) *sich auf die klassische isoperimetrische Aufgabe bei konstanter Gaussscher Krümmung reduzieren läßt.*

§ 17.

Die klassische isoperimetrische Aufgabe und die Gaußsche Krümmung.

Es sei

$$\sigma(u) = 1, \quad \tau(u) = 1. \tag{1}$$

Es sei ferner $g(u)$ dreimal stetig differenzierbar. Man bezeichne die Gausssche Krümmung unseres Linienelementes mit $K(u)$ und ihre Ableitung mit $K'(u)$. Man hat also

$$K(u) = -\frac{g''(u)}{g(u)}, \qquad K'(u) = \frac{g'(u)\,g''(u) - g(u)\,g'''(u)}{g(u)^2}, \tag{2}$$

wobei die Stetigkeit von $K'(u)$ durch die getroffenen Voraussetzungen gesichert ist. Man setze ferner

$$r = \frac{b-a}{2}, \quad t = \frac{b+a}{2}, \quad \mu(a,b) = \mu\{r,t\}, \quad G(L,a,b) = G\{L,r,t\}, \tag{3}$$

so daß also

$$\mu_a(a,b) + \mu_b(a,b) = \mu_t\{r,t\}, \quad G_a(L,a,b) + G_b(L,a,b) = G_t\{L,r,t\} \tag{4}$$

wird. Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz XXVIII. *Von den nachstehenden vier Aussagen folgen aus jeder die drei anderen*:

Aussage 1. *Es gilt im Definitionsbereich* $\alpha < a < b < \beta$

$$\mu_t\{r,t\} \leqq 0.$$

Aussage 2. *Es gilt im selben Bereich für alle* $L > 2(b-a)$

$$G_t\{L,r,t\} \leqq 0.$$

Aussage 3. *Es gibt keine im Bereich* $\alpha < u < \beta$ *verlaufende Extremale vom Typus* (B, 1).

Aussage 4. *Es gilt im selben Bereich*

$$K'(u) \leqq 0.$$

Satz XXVIII'. *Der obige Satz bleibt unverändert bestehen, wenn in den Aussagen* 1, 2, 4 *das Zeichen* $<$ *durch das Zeichen* $>$ *ersetzt wird und in der Aussage* 3 (B, 1) *durch* (B, 2).

Satz XXIX. *Von den nachstehenden vier Aussagen folgen aus jeder die drei anderen.*

Aussage 1. *Es gilt im Definitionsbereich* $\alpha < a < b < \beta$

$$\mu_t\{r, t\} = 0 \text{ und mithin } \mu(a, b) = \mu\{r\}.$$

Aussage 2. *Es gilt im selben Bereich*

$$G_t\{L, r, t\} = 0 \text{ und mithin } G(L, a, b) = G\{L, r\}.$$

Aussage 3. *Es gibt im Bereich* $\alpha < u < \beta$ *weder Extremalen vom Typus* (B, 1) *noch vom Typus* (B, 2).

Aussage 4. *Die* Gausssche *Krümmung ist im selben Bereich konstant.*

Zusatz 1 zu den Sätzen XXVIII, XXVIII' und XXIX. Die obigen Sätze bleiben unverändert bestehen, wenn der Bereich, auf welchen sie sich beziehen, auf eine beliebige endliche oder unendliche, abgeschlossene oder nichtabgeschlossene Teilstrecke des Definitionsbereichs beschränkt wird. Insbesondere sind also die Aussagen 1 und 2 hinsichtlich der Ableitungen von G und μ nach t und die Aussage 3 für ein gegebenes Wertepaar a, b schon dann gesichert, wenn die Aussage 4 im Intervall $a \leqq u \leqq b$ gilt.

Zusatz 2. Treffen die Aussagen des Satzes XXVIII zu, so gilt in der Aussage 1 das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn in dem betreffenden Intervall $a \leqq u \leqq b$ die Gausssche Krümmung konstant ist. Dasselbe gilt auch für das Gleichheitszeichen in der Aussage 2. Dieselbe notwendige und hinreichende Bedingung besteht natürlich für das Gleichheitszeichen in den Aussagen 1 und 2 des Satzes XXVIII'.

Beweis des Satzes XXVIII. Daß aus der Aussage 1 die Aussage 2 folgt, ist im Satze XXIV des vorigen Paragraphen enthalten. Daß aus der Aussage 2 die Aussage 3 folgt, ist trivial und im Zusatz 1 zum Satze XXIV festgestellt.

Wir wenden uns jetzt zum Zusammenhang zwischen den Aussagen 1 und 4. Man hat wegen der Gleichungen (1) und (4)

$$\mu(a, b) = \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{g(a) + g(b)}, \quad \gamma'(u) = g(u), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mu_t\{r, t\} &= \mu_a(a, b) + \mu_b(a, b) \\ &= \frac{g(b) - g(a)}{g(a) + g(b)} - \mu(a, b)\frac{g'(a) + g'(b)}{g(a) + g(b)} = \frac{F(a, b)}{(g(a) + g(b))^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $F(x, y)$ definiert ist durch die Gleichung

$$F(x, y) = g(y)^2 - g(x)^2 - (\gamma(y) - \gamma(x))(g'(x) + g'(y)). \tag{7}$$

Nun gilt, wie sogleich nachgewiesen werden soll, die Identität

$$F(\xi, \eta) = \int_\xi^\eta dy \int_\xi^\eta g(x)\, g(y)\, (K(y) - K(x))\, dx. \tag{8}$$

Man hat nämlich

$$F(x, x) = 0, \quad F_y(x, y) = g(y)\,(g'(y) - g'(x)) - g''(y)\,(\gamma(y) - \gamma(x)),$$
$$F_y(y, y) = 0;$$
$$F_{x,y}(x, y) = -g(y)g''(x) + g''(y)g(x) = -g(x)g(y)\,(K(y) - K(x)),$$
$$\int_\xi^y g(x)\,g(y)\,(K(y) - K(x))dx = -\int_\xi^y F_{x,y}(x, y)dx = F_y(\xi, y) - F_y(y, y)$$
$$= F_y(\xi, y),$$
$$\int_\xi^\eta dy \int_\xi^y g(x)g(y)\,(K(y) - K(x))\,dx = \int_\xi^\eta F_y(\xi, y)dy = F(\xi, \eta) - F(\xi, \xi)$$
$$= F(\xi, \eta).$$

Die Einführung der Identität (8) in (6) zeigt, daß aus der Aussage 4 die Aussage 1 folgt. Jetzt wollen wir zeigen, daß umgekehrt auch aus 1 4 folgt. Gilt nämlich 4 nicht, so muß es eine Stelle u^* geben, in welcher $K'(u^*) > 0$ ist. Auf Grund der Stetigkeit von $K'(u)$ können dann a und b so nahe an u^* gewählt werden, daß im Intervall $a \leqq u \leqq b$ $K'(u)$ positiv bleibt. Dann bleibt für $a \leqq x < y \leqq b$ auch $K(y) - K(x)$ positiv, was wegen der Identität (8) und (6) der Aussage 1 widerspricht.

Es erübrigt jetzt lediglich noch der Beweis dafür, daß aus 3 4 folgt. Diesem Beweise schicken wir noch den folgenden Satz voraus:

Satz XXX. Es sei $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Man setze

$$(9) \qquad \overline{M} = \operatorname*{Max}_{\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1} g(u), \qquad \underline{M} = \operatorname*{Min}_{\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1} g(u), \qquad M' = \operatorname*{Max}_{\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1} |g'(u)|,$$
$$\delta = \frac{2\,\underline{M}^2}{\overline{M}\,M'}.$$

Dann besitzen in jedem Streifen a, b, $\alpha_1 \leqq a < b \leqq \beta_1$, dessen Breite $b - a$ kleiner als δ ist, die eingeschriebenen Extremalen bei genügend großem L den Typus (B, 3), oder mit anderen Worten, es tritt dann für jeden solchen Streifen die lineare isoperimetrische Ungleichung als genaue Schranke in Kraft.

Beweis des Satzes XXX. Man bezeichne den gegebenen Streifen mit a', b'. Dann gilt also $\alpha_1 \leqq a' < b' \leqq \beta_1$, $b' - a' < \delta$. Ferner hat man

$$(10) \qquad -\mu_a = \frac{g(a)\,(g(a) + g(b)) + (\gamma(b) - \gamma(a))\,g'(a)}{(g(a) + g(b))^2},$$
$$\mu_b = \frac{g(b)\,(g(a) + g(b)) - (\gamma(b) - \gamma(a))\,g'(b)}{(g(a) + g(b))^2}.$$

Aus (9) und (10) folgt für $a' \leqq a \leqq b \leqq b'$

$$0 < \gamma(b) - \gamma(a) \leqq \overline{M}(b - a) \leqq \overline{M}(b' - a') < \overline{M}\,\delta$$
$$g(a)\,(g(a) + g(b)) \geqq 2\,\underline{M}^2$$
$$g(b)\,(g(a) + g(b)) \geqq 2\,\underline{M}^2$$

und mithin

$$\mu_a < 0, \quad \mu_b > 0,$$

und diese Ungleichungen sichern gemäß Satz X § 8 und seinem Zusatz für den Streifen a', b' die zu beweisende Behauptung.

Jetzt kommen wir zum Beweise dafür, daß aus der Aussage 3 des Satzes XXVIII die Aussage 4 folgt; wir führen ihn, indem wir nachweisen, daß, wenn 4 nicht gilt, auch 3 nicht zutreffen kann.

Gilt nämlich 4 nicht, so gibt es ein u^*, so daß $K'(u^*) > 0$ ist. Auf Grund der Stetigkeit von $K'(u)$ können dann α_1 und β_1, $\alpha_1 < \beta_1$, so nahe an u^* gewählt werden, daß im Intervall $\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1$, $K'(u)$ positiv bleibt. Gemäß dem eben bewiesenen Satze weisen nun für $\alpha_1 \leqq a < b \leqq \beta_1$, $b - a < \delta$, die Extremalen bei genügend großem L den Typus (B, 3) auf, und man hat gemäß § 7 (4), (5), (6) für diese Extremalen

$$\begin{gathered} \varkappa = \varkappa_0 = \varkappa_0(a, b), \quad q = \mu = \mu(a, b) = -\psi(a, \varkappa_0) = \psi(b, \varkappa_0), \\ \psi(a, \varkappa_0) + \psi(b, \varkappa_0) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Ferner gilt gemäß der Identität (8) und der Gleichung (6) auf Grund von $K'(u) > 0$ für $\alpha_1 \leqq a < b \leqq \beta_1$

$$\mu_a(a, b) + \mu_b(a, b) > 0. \tag{12}$$

Wegen $\sigma(u) = 1$ sichert diese Ungleichung in Verbindung mit (11) kraft des Hilfssatzes IV′ des vorigen Paragraphen die Ungleichung

$$V(a, b, \varkappa_0, \mu) < 0. \tag{13}$$

Da für die Wertepaare a, b das Auftreten des Tpyus (B, 3) eben festgestellt ist, so liegt nach der Klassifikation des Satzes XXIII des § 15 einer der drei Fälle I, 1; I, 2; I, 3 vor — und zwar wegen des Vorzeichens von $V(a, b_0, \varkappa_0, \mu)$ der Fall I, 1. In diesem Falle treten aber auch Extremalen vom Typus (B, 1) auf — im Widerspruch zur Aussage 3, w. z. b. w. Damit ist der Beweis des Satzes XXVIII vollständig durchgeführt.

Ebenso beweist man den Satz XXVIII′, während der Satz XXIX sich aus der Zusammenstellung der Sätze XXVIII und XXVIII′ unmittelbar ergibt.

Der Zusatz 1 zu diesen Sätzen ist durch den Beweisgang evident.

Was den Zusatz 2 anlangt, so ist die Behauptung, daß die Konstanz der Gaussschen Krümmung im betreffenden Intervall $a \leqq u \leqq b$ das Gleichheitszeichen in den Aussagen 1 und 2 nach sich zieht, schon im Zusatz 1 enthalten und ausdrücklich hervorgehoben. Daß sowohl unter den Voraussetzungen des Satzes XXVIII als auch unter denen des Satzes XXVIII′ die Konstanz der Gaussschen Krümmung in dem betreffenden Intervall auch eine notwendige Bedingung für das Gleichheitszeichen in der Aussage 1 bildet, folgt

unmittelbar aus der Identität (8) und der Gleichung (6). Da endlich die Voraussetzungen des Satzes XXVIII die in der Ungleichung (3) bestehende Voraussetzung des Satzes XXIV des vorigen Paragraphen sicherstellen und ebenso die Voraussetzungen des Satzes XXVIII′ die entsprechende Voraussetzung des Satzes XXIV′, so ergeben die Sätze XXIV und XXIV′, daß sowohl unter den Voraussetzungen des Satzes XXVIII als auch unter den Voraussetzungen des Satzes XXVIII′ bei jedem Wertepaare a, b das Gleichheitszeichen in der Aussage 2 an das Gleichheitszeichen in der Aussage 1 und mithin auch an die Konstanz der Gaussschen Krümmung im betreffenden Intervall als notwendige Bedingung geknüpft ist. Damit sind alle Behauptungen des Zusatzes 2 bewiesen.

Nimmt $K(u)$ mit wachsendem u eigentlich monoton ab, d. h. nimmt $K(u)$ monoton ab und ist nirgends konstant, so gilt nach den obigen Feststellungen die Aussage 1 des Satzes XXVIII unter Ausschluß des Gleichheitszeichens. Dadurch ist die Voraussetzung (45) der Sätze XXV und XXVI des vorigen Paragraphen sichergestellt und mithin auch die Gültigkeit aller ihrer Behauptungen. Das Entsprechende gilt natürlich, wenn $K(u)$ mit wachsendem u eigentlich monoton wächst. *Insbesondere kann daher bei eigentlich monotoner Gaussscher Krümmung die klassische isoperimetrische Aufgabe in einem offenen Gebiet keine Lösung besitzen.*

§ 18.

Die klassische isoperimetrische Aufgabe und die geodätische Krümmung.

Wie im vorigen Paragraphen behandeln wir auch in diesem den Fall

$$\sigma(u) = \tau(u) = 1.$$

Es seien die laufenden Koordinaten $u = u(t)$, $v = v(t)$ eines Kurvenbogens von stetiger Tangentenrichtung zweimal stetig differenzierbar. Man bezeichne die Ableitungen mit $\dot{u}, \ddot{u}, \dot{v}, \ddot{v}$. Der Parameter t sei endlich so gewählt, daß in keinem Punkte $\dot{u}$ und $\dot{v}$ gleichzeitig verschwinden. Dann wird die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ auf dem Kurvenbogen durch die bekannte Formel von Beltrami[7]) gegeben. Bei unserem Linienelement erhält diese die Gestalt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{g(u)} \frac{g(u)^2 (\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u}) + 2 g(u) g'(u) \dot{u}^2 \dot{v} + g(u)^2 g'(u) \dot{v}^3}{(\dot{u}^2 + g(u)^2 \dot{v}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Man bezeichne als die positive Seite des Kurvenbogens diejenige, nach welcher die Normalenrichtung N weist, die zu dem durch das Wachsen von t gegebenen Durchlaufungssinn des Kurvenbogens so liegt, wie die Richtung des wach-

[7]) Beltrami (Werke I, S. 178). Siehe auch Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 1, 3. Aufl., S. 175. Berlin, Springer, 1930.

senden u zur Richtung des wachsenden v. Dann bedeutet das positive Vorzeichen von ϱ, daß in der Umgebung des betreffenden Kurvenpunktes die berührende geodätische Linie auf der positiven Seite des Kurvenbogens verläuft, und das negative Vorzeichen, daß sie auf der negativen Seite liegt.

Setzt man in der Umgebung einer Stelle, in welcher $\dot{u}$ nicht verschwindet, je nach dem Durchlaufungssinn $t = \pm u$ und in der Umgebung einer Nullstelle von $\dot{u}$ $t = \pm v$, so ergibt der Unitätssatz für die Lösungen einer Differentialgleichung zunächst, daß bei vorgeschriebener konstanter geodätischer Krümmung durch einen Punkt in jeder Richtung eine und nur eine Kurve geht.

Nun ist

$$(2)\quad \frac{g(u)^2(\dot{u}\ddot{v}-\dot{v}\ddot{u})+2g(u)g'(u)\dot{u}^2\dot{v}+g(u)^3g'(u)\dot{v}^3}{(\dot{u}^2+g(u)^2\dot{v}^2)^{\frac{3}{2}}}\dot{u} = \frac{d}{dt}\frac{g(u)^2\dot{v}}{(\dot{u}^2+g(u)^2\dot{v}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Daher erhält die Gleichung (1) nach Multiplikation mit $g(u)\dot{u}$ die Gestalt

$$(3)\quad \frac{d}{dt}\left(g(u)^2\frac{dv}{ds}\right) = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\gamma(u),$$

wobei wegen der Voraussetzung $\tau(u) = 1$ $\gamma'(u) = g(u)$ ist.

Ist also die geodätische Krümmung konstant, d. h. gilt

$$(4)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{q},$$

wobei q eine positive Konstante bedeutet, so folgen bei Berücksichtigung der § 1 (8) angegebenen Identität

$$\cos(N,u) = g(u)\frac{dv}{ds}$$

aus (3) die Gleichungen

$$g(u)\cos(N,u) = \frac{\gamma(u)+\varkappa}{q},$$

$$(5)\quad q\cos(N,u) = \frac{\gamma(u)+\varkappa}{g(u)} = \psi(u,\varkappa),$$

wobei $\varkappa$ eine willkürliche Konstante bedeutet. Umgekehrt folgt, wenn $\dot{u} \neq 0$ ist, aus (5) auch (4). Verschwindet dagegen $\dot{u}$ identisch, fällt also der Kurvenbogen mit einer der Kurven $u = \text{const}$ zusammen, so erhält man aus (5)

$$(6)\quad \pm q = \psi(u,\varkappa),$$

während die Beltramische Formel (1) für die geodätische Krümmung

$$(7)\quad \frac{1}{\varrho} = \operatorname{sign}(\dot{v})\frac{g'(u)}{g(u)}$$

ergibt. Die geodätische Krümmung ist also in diesem Fall ebenfalls konstant, aber im allgemeinen von $\frac{1}{q}$ verschieden.

Es sei nun C eine nicht der Kurvenschar $u = \text{const}$ angehörige Kurve mit der konstanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{q}$. Dann können $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ in

keinem Punkte gleichzeitig verschwinden. In einem solchen Punkte müßte nämlich wegen (1) die geodätische Krümmung von C mit der geodätischen Krümmung der durch diesen Punkt gehenden gleichsinnig durchlaufenen Kurve $u = \text{const}$ übereinstimmen, und da, wie oben festgestellt, durch einen Punkt in einer Richtung nur eine einzige Kurve vorgeschriebener konstanter Krümmung geht, so müßte C mit dieser Kurve $u = \text{const}$ zusammenfallen — im Widerspruch zur Voraussetzung. Da, wie eben gezeigt, $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so wechselt $\dot{u}$ in jeder Nullstelle das Vorzeichen. Da voraussetzungsgemäß $\dot{u}$ und $\dot{v}$ ebenfalls nicht gleichzeitig verschwinden können, so wechselt auch $\frac{dv}{du}$ in jeder Nullstelle von $\dot{u}$ das Vorzeichen. Nun folgt aus (5) und der Identität § 6 (3)

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{\psi(u, \varkappa)}{g(u)\sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}}, \tag{8}$$

und es muß daher in dieser Gleichung vor und nach der Nullstelle von $\dot{u}$ das entgegengesetzte Vorzeichen gelten. Daraus folgt unmittelbar, daß die Kurve durch eine in der (u, v)-Ebene vollzogene Spiegelung an der durch die Nullstelle von $\dot{u}$ gehenden Geraden $v = \text{const}$ in sich selbst übergeht. Es besitze nun die Kurve mindestens zwei Nullstellen von $\dot{u}$, und es seien t_1 und t_2, $t_1 < t_2$, die Parameterwerte in zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen. Dann ist für $t_1 < u < t_2$ $\dot{u}$ entweder durchweg positiv oder durchweg negativ. Jedenfalls ist also $u(t_1) \neq u(t_2)$. Da die Kurve durch die beiden Spiegelungen an den Geraden $v = v(t_1)$ und $v = v(t_2)$ in sich selbst übergeht, so hat sie, wenn

$$v(t_2) \neq v(t_1) \tag{9}$$

ist, die Periode $2\,(v(t_2) - v(t_1))$, d. h. sie geht bei Vermehrung von v um diesen Betrag in sich selbst über. Die Kurve besteht dann aus einem in u eigentlich monotonen Bogen, der vom Punkte $u(t_1), v(t_1)$ zum Punkte $u(t_2), v(t_2)$ führt, aus seinem Spiegelbild an der Geraden $v = v(t_2)$, das vom Punkte $u(t_2), v(t_2)$ zum Punkte $u(t_1), v(t_1) + 2\,(v(t_2) - v(t_1))$ führt, und aus der Verschiebung des aus diesen beiden Bögen zusammengesetzten Kurvenbogens parallel zur v-Achse um ganze Vielfache der Periode. Die Kurve kann im Innern des von den beiden Kurven $u = u(t_1)$, $u = u(t_2)$ begrenzten Streifens Selbstschnittpunkte aufweisen. Da die Kurve periodisch ist, so kann sie keinesfalls geschlossen sein. Da andererseits auf einer geschlossenen Kurve $\dot{u}$ mindestens zweimal verschwinden muß, so kann unsere Kurve C nur dann geschlossen sein, wenn

$$v(t_2) = v(t_1) \tag{10}$$

ist. Dann aber ist sie offenbar auch geschlossen. Jetzt wollen wir zeigen, daß die Kurve dann auch einfach geschlossen ist. Dazu bedarf es nur des Nachweises, daß der in u eigentlich monotone und mithin sich nicht selbst

schneidende Bogen $t_1 \leqq t \leqq t_2$, der zusammen mit seinem Spiegelbild an der Geraden $v = v(t_1) = v(t_2)$ die Kurve bildet, ganz auf einer Seite der Geraden liegt. Hätte er nun an der Stelle t_3, $t_1 < t_3 < t_2$ einen Schnittpunkt mit dieser, so müßte nach dem Rolleschen Satz $\dot{v}$ an einer Stelle t_4, $t_1 < t_4 < t_3$ und an einer Stelle t_5, $t_3 < t_5 < t_2$ verschwinden. An diesen beiden Stellen hätte u verschiedene Werte, und es müßte daher wegen (8) $\psi(u, \varkappa)$ für zwei verschiedene Werte von u verschwinden, was wegen des eigentlich monotonen Charakters von $\gamma(u)$ unmöglich ist. Damit ist bewiesen, daß die Kurve unter der Voraussetzung (10) in der Tat einfach geschlossen ist.

Es bezeichne nun a den kleineren der beiden, wie oben festgestellt, verschiedenen Werte $u(t_1)$ und $u(t_2)$ und b den größeren. Dann ergibt (8)

$$|v(t_2) - v(t_1)| = \left| \int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa)\, du}{g(u)\sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}} \right|. \tag{11}$$

Die Kurve ist also dann und nur dann geschlossen, wenn das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet. Dann muß $\psi(u, \varkappa)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ das Vorzeichen wechseln. Wegen des eigentlich monotonen Charakters der Funktion $\gamma(u)$ g.bt es also dann ein u_0, $a < u_0 < b$, so daß

$$\begin{aligned} &\text{für } a \leqq u < u_0 \quad \psi(u, \varkappa) < 0, \\ &\text{für } u_0 < u \leqq b \quad \psi(u, \varkappa) > 0, \quad \psi(u_0, \varkappa) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

gilt. Da ferner an den Stellen t_1 und t_2 $\dot{u}$ verschwindet, und u die Werte a und b annimmt, während für $t_1 < t < t_2$ $\dot{u} \neq 0$ bleibt, so folgt aus (8)

$$\psi(a, \varkappa)^2 = \psi(b, \varkappa)^2 = q^2, \quad \psi(u, \varkappa)^2 < q^2 \text{ für } t_1 < t < t_2. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt jetzt

$$\psi(b, \varkappa) = -\psi(a, \varkappa) = q, \tag{14}$$

$$\psi(a, \varkappa) + \psi(b, \varkappa) = 0. \tag{15}$$

Entsprechend § 7 (4), (5), (6) hat man also

$$\varkappa = \varkappa_0(a, b), \quad q = \mu(a, b),$$

wobei $\sigma(u) = \tau(u) = 1$ zu setzen ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurve C geschlossen ist, wird also gegeben durch die Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa_0(a, b), \quad q = \mu(a, b), \quad V(a, b, \varkappa_0(a, b), \mu(a, b)) = 0. \tag{16}$$

Nun ergibt die Übereinstimmung der Gleichung (5) mit der Gleichung § 1 (17) den

Satz XXXI[8]. *Beim klassischen isoperimetrischen Problem sind die Bögen* $0 < s < s_1$ *und* $s_2 < s < s_3$ *einer Extremale im Sinne der Sätze* I *und* I′ *des* § 2 *Bögen konstanter geodätischer Krümmung, die sich an einer Geraden* $v = \text{const}$ *spiegeln*, und zwar ist die Krümmung positiv und gleich $\frac{1}{q_1}$ bei dem im § 1 dergestalt festgesetzten Durchlaufungssinn, daß die Richtung der äußeren Normale zur Durchlaufungsrichtung so liegt wie die Richtung des wachsenden u zu der des wachsenden v. Da, wie oben festgestellt, auf einer Kurve konstanter, von Null verschiedener geodätischer Krümmung, welche nicht der Kurvenschar $u = \text{const}$ angehört, $\dot{u}$ in jeder Nullstelle das Vorzeichen wechselt, während bei den Extremalenbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ ein Vorzeichenwechsel von $\dot{u}$ gemäß § 1 (23) ausgeschlossen ist, so kann $\dot{u}$ im Innern der Extremalenbögen nicht verschwinden. *Sind umgekehrt die Bögen* $0 < s < s_1$ *und* $s_2 < s < s_3$ *Spiegelbilder an einer Geraden* $v = \text{const}$ *mit konstanter, bei dem festgesetzten Durchlaufungssinn positiver geodätischer Krümmung, und ist auf dem Bogen* $0 < s < s_1$ $u > 0$ *und auf dem Bogen* $s_2 < s < s_3$ $\dot{u} < 0$, *so sind auch alle in den Sätzen* I *und* I′ *an den Begriff einer Extremalen hinsichtlich dieser beiden Bögen geknüpften Forderungen erfüllt.*

Wie im § 6 gezeigt, weist beim Typus (A) die Extremale zwei Ecken auf und bei den Typen (B, 1) und (B, 2) eine. Die Extremalen des Typus (B, 3) besitzen keine Ecken. Hat jedoch eine solche Extremale mit einer der Kurven $u = a$ oder $u = b$ ein endliches Stück gemein, so kann die geodätische Krümmung auf diesem Stück mit der geodätischen Krümmung auf den Bögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ nicht übereinstimmen. Denn, wie eingangs dieses Paragraphen auf Grund des Unitätssatzes für die Lösungen einer Differentialgleichung festgestellt, fallen zwei sich berührende Kurven konstanter geodätischer Krümmung, deren Krümmung bei gleichsinniger Durchlaufung des Berührungspunktes übereinstimmt, in ihrem ganzen Verlaufe zusammen. Daher gilt der

Satz XXXII[9]. *Eine Extremale des klassischen isoperimetrischen Problems ist dann und nur dann eine geschlossene Kurve konstanter geodätischer Krüm-*

---

[8]) Vgl. Anm. 3, S. 496.

[9]) Schon MINDING (l. c. Anmerkung 5, S. 513) hat auf Flächen mit der Maßbestimmung einer Rotationsfläche Kurven in Betracht gezogen, welche nach unserer Terminologie dem Typus (B, 3) angehören. Er ergänzt nämlich eine sich nicht schließende Kurve konstanter geodätischer Krümmung durch ein sie berührendes Stück einer einem Parallelkreis entsprechenden Kurve, also in unserer Bezeichnungsweise einer Kurve $u = \text{const}$, zu einer einfachen geschlossenen Kurve. Dabei entsteht nach unserer Terminologie diejenige spezielle Gestalt des Typus (B, 3). welche mit nur einer Kurve $u = \text{const}$ ein endliches Stück gemein hat. Da nun seine Fassung des isoperimetrischen Problems einen Sprung der geodätischen Krümmung nicht zuläßt, so fordert MINDING,

mung, wenn sie dem Typus (B, 3) *angehört und mit jeder der beiden Kurven* $u = a$ *und* $u = b$ *nur einen Punkt gemein hat, oder, was gemäß dem letzten Absatz des* § 13 *gleichbedeutend ist, wenn sie dem Typus* (B, 3) *angehört und wenn*

$$V(a, b, \varkappa_0, \mu) = 0 \quad \text{und} \quad L = \overline{L}(a, b) \tag{17}$$

ist. Umgekehrt ergeben bei Berücksichtigung dessen, daß, wie oben gezeigt, jede geschlossene Kurve konstanter, von Null verschiedener geodätischer Krümmung auch einfach geschlossen ist, die ferneren hinsichtlich der Kurven konstanter geodätischer Krümmung gemachten Feststellungen, *daß jede geschlossene Kurve konstanter, von Null verschiedener geodätischer Krümmung eine Extremale vom Typus* (B, 3) *des klassischen isoperimetrischen Problems ist, bei welcher gemäß* (16) $V(a, b, \varkappa_0, \mu)$ *verschwindet und* $L = \overline{L}(a, b)$ *ist.*

Um das einzusehen, bedarf es lediglich noch des Nachweises, daß auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung der Durchlaufungssinn, bei welchem die Krümmung positiv ausfällt, mit demjenigen Durchlaufungssinn übereinstimmt, bei welchem die äußere Normale zur Durchlaufungsrichtung so liegt wie die Richtung des wachsenden u zu der des wachsenden v. Das ist in der Tat der Fall. Bei letzterem Durchlaufungssinn ist nämlich nach der am Eingang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungsweise das Äußere der geschlossenen Kurve als deren positive Seite zu betrachten. In der Umgebung eines Kurvenpunktes, in welchem v das Maximum oder Minimum erreicht, liegt nun die in diesem Punkt berührende geodätische Linie $v = \text{const}$ auf der äußeren, also positiven Seite der Kurve. Die geodätische Krümmung ist daher in einem solchen Punkte positiv und, da sie konstant ist, durchweg positiv.

Nun gilt der folgende Satz:

Satz XXXIII [10]. *Dafür, daß es im Bereich* $\alpha < u < \beta$ *keine geschlossenen Kurven mit konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung gibt, ist notwendig und hinreichend, daß* $K(u)$ *eigentlich monoton, d. h. monoton und*

---

daß die geodätische Krümmung der Kurve mit derjenigen des Ergänzungsbogens übereinstimmt.

Damals war der Unitätssatz der Lösungen einer Differentialgleichung noch nicht Gemeingut aller Mathematiker, und dadurch erklärt es sich, daß der hervorragende Forscher nicht bemerkt hat, daß die gestellte Forderung unmöglich ist. Denn es gibt, wie gegenwärtig natürlich bekannt und eingangs dieses Paragraphen begründet, bei gegebener konstanter geodätischer Krümmung in jeder Richtung nur eine einzige Kurve, und die gesuchte Kurve müßte daher mit derjenigen Kurve $u = \text{const}$ zusammenfallen, welche die Verlängerung des Ergänzungsbogens bildet.

[10]) Vgl. Anm. 9.

nirgends konstant ist [11]). Dabei ist wie im vorigen Paragraphen die dreimalige stetige Differenzierbarkeit von $g(u)$ vorausgesetzt.

Zusatz zu Satz XXXIV. Der Satz bleibt gültig, wenn das Wort „geschlossen" durch „einfach geschlossen" ersetzt wird; denn die Geschlossenheit einer Kurve konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung zieht, wie oben festgestellt, ihre einfache Geschlossenheit nach sich.

Beweis. Es sei etwa $K'(u) \leqq 0$ und $K(u)$ nirgends konstant. Dann ist gemäß Satz XXVIII und seinen Zusätzen für $\alpha < a < b < \beta$

$$\mu_a(a, b) + \mu_b(a, b) < 0.$$

Hieraus folgt aber, daß die Gleichungen (15), (16), welche, wie oben festgestellt, bei einer geschlossenen Kurve mit konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung gelten müssen, zum Hilfssatz IV § 16 im Widerspruch stehen. Ebenso beweist man unter Heranziehung des Satzes XXVIII′ § 17 und des Hilfssatzes IV′ § 16, daß die Voraussetzung $K'(u) \geqq 0$ und $K(u)$ nirgends konstant die Existenz geschlossener Kurven mit konstanter von Null verschiedener Krümmung ausschließt.

Jetzt wollen wir beweisen, daß das angegebene Kriterium für die Nichtexistenz geschlossener Kurven mit konstanter von Null verschiedener Krümmung auch notwendig ist. Es sei also $K(u)$ nicht monoton. Dann gibt es im Bereiche $\alpha < u < \beta$ eine Stelle ξ_1 und eine Stelle ξ_2, so daß

$$K'(\xi_1) < 0, \qquad K'(\xi_2) > 0$$

ausfällt. Man wähle nun α_1 und β_1 so, daß

$$\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta, \quad \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1, \quad \alpha_1 < \xi_2 < \beta_1$$

ist. Man wähle ferner ein $h > 0$, so daß die Ungleichungen

$$(18) \quad \xi_1 + h < \beta_1, \ \xi_2 + h < \beta_1, \quad K'(u) < 0 \text{ für } \xi_1 \leqq u \leqq \xi_1 + h,$$

$$K'(u) > 0 \text{ für } \xi_2 \leqq u \leqq \xi_2 + h,$$

und außerdem noch

$$h < \delta$$

gilt, wobei δ durch die Gleichung (9) des vorigen Paragraphen definiert ist. Gemäß dem Satze XXX besitzen dann für

$$(19) \qquad \alpha_1 < \xi < \xi + h < \beta_1$$

---

[11]) Sind, wie z. B. bei einer Rotationsfläche, die Punkte u, v und u, $v + 2\pi$ zu identifizieren (s. § 22), so bezieht sich der Satz natürlich nicht auf diejenigen geschlossenen Kurven, welche erst vermöge der Identifizierung sich schließen, also bei einer Rotationsfläche nicht auf diejenigen, welche die Rotationsachse umschlingen.

die in den Streifen ξ, $\xi + h$ eingeschriebenen Extremalen bei genügend großem L den Typus (B, 3). Setzt man also

$$\varkappa_0(\xi) = \varkappa_0(\xi, \xi + h), \qquad \mu(\xi) = \mu(\xi, \xi + h), \tag{20}$$
$$V(\xi) = V(\xi, \xi + h, \varkappa_0(\xi), \mu(\xi)),$$

so sind $\varkappa_0(\xi)$, $\mu(\xi)$, $V(\xi)$ im Bereiche (19) stetige Funktionen von ξ, und man hat

$$\psi(\xi, \varkappa_0(\xi)) + \psi(\xi + h, \varkappa_0(\xi)) = 0, \tag{21}$$

Nun folgt gemäß den Sätzen XXVIII, XXVIII′ und ihren Zusätzen aus (18)

$$\text{für } \xi_1 \leqq a < b \leqq \xi_1 + h \quad \mu_a(a, b) + \mu_b(a, b) < 0,$$
$$\text{für } \xi_2 \leqq a < b \leqq \xi_2 + h \quad \mu_a(a, b) + \mu_b(a, b) > 0.$$

Daher ist gemäß den Hilfssätzen IV und IV′ § 16 wegen (21)

$$V(\xi_1) > 0, \quad V(\xi_2) < 0.$$

Also gibt es zwischen ξ_1 und ξ_2 mindestens einen Wert ξ_3, so daß

$$V(\xi_3) = 0$$

wird. Dann aber gibt es gemäß dem Schlußsatz des § 13 eine in den Streifen ξ_3, $\xi_3 + h$ eingeschriebene Extremale vom Typus (B, 3), welche mit jeder der beiden Kurven $u = \xi_3$ und $u = \xi_3 + h$ nur einen Punkt gemein hat, und eine solche ist gemäß dem Satz XXXII eine geschlossene Kurve mit konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung. Damit ist bewiesen, daß der monotone Charakter von $K(u)$ für die Nichtexistenz solcher Kurven in der Tat eine notwendige Voraussetzung bildet.

Ist endlich $K(u)$ zwar wohl monoton, aber nicht eigentlich monoton, so gibt es ein Intervall, in welchem $K(u)$ konstant ist. Innerhalb eines solchen bildet aber der Kreis als geometrischer Ort aller von einem Punkt gleich weit entfernter Punkte eine geschlossene Kurve mit konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung. Damit ist gezeigt, daß auch der eigentlich monotone Charakter von $K(u)$ eine notwendige Bedingung für die Nichtexistenz geschlossener Kurven mit konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung bildet, was allein noch zu beweisen war.

Zusatz zu Satz XXXIII. Wie aus dem Beweisgang sich von selbst versteht, bleibt der Satz XXXIII unverändert gültig, wenn der Bereich, auf welchen er sich bezieht, auf eine beliebige endliche oder unendliche, abgeschlossene oder nichtabgeschlossene Teilstrecke des Definitionsbereiches α, β beschränkt wird.

Daß bei unserem Linienelement eine geodätische Linie niemals geschlossen sein kann, ist trivial.

Zunächst zeigt nämlich (1), daß eine Kurve $u = \text{const}$ dann und nur dann eine geodätische Linie ist, wenn $g'(u)$ verschwindet. Es bezeichne nun C eine geodätische Linie, bei welcher u nicht konstant ist. Dann folgt aus (3) wegen der Identität

$$\cos(N, u) = g(u)\frac{dv}{ds}$$

(22)
$$g(u)\cos(N, u) = \varkappa, \qquad \cos(N, u) = \frac{\varkappa}{g(u)},$$

wobei $\varkappa$ eine willkürliche Konstante bedeutet. Hieraus ergibt sich entsprechend (8)

(23)
$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{\varkappa}{g(u)\sqrt{g(u)^2 - \varkappa^2}}.$$

Wie oben schließt man aus (1), daß $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ nicht gleichzeitig verschwinden können, und daß daher u in jeder Nullstelle das Vorzeichen wechselt. Hieraus folgt, da $\dot{u}$ und $\dot{v}$ voraussetzungsgemäß nicht gleichzeitig verschwinden, daß $\frac{dv}{du}$ beim Durchgang durch eine Nullstelle von $\dot{u}$ das Vorzeichen wechselt. Daraus ergibt sich ganz wie oben, daß wenn $\dot{u}$ an der Stelle t_1 verschwindet, die Kurve durch Spiegelung an der Geraden $v = v(t_1)$ in sich selbst übergeht. Wäre nun die Kurve geschlossen, so müßte $\dot{u}$ an mindestens zwei Stellen verschwinden. Bezeichnen nun t_1 und t_2 die Parameterwerte in zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen, so schließt man wie oben durch Spiegelung an den Geraden $u = v(t_1)$ und $u = v(t_2)$, daß die Kurve in v die Periode $2(v(t_2) - v(t_1))$ besitzt, wenn $v(t_2) \neq v(t_1)$ ist. Das ist aber in der Tat immer der Fall. Da nämlich für $t_1 < t < t_2$ $\dot{u}$ das Vorzeichen nicht wechselt, so ist $u(t_1) \neq u(t_2)$, man erhält aus (23)

$$|v(t_2) - v(t_1)| = \left| \int_a^b \frac{\varkappa\, du}{g(u)\sqrt{g(u)^2 - \varkappa^2}} \right|,$$

wobei a den kleineren und b den größeren der beiden Werte $u(t_1)$, $u(t_2)$ bezeichnet, und das Integral kann offenbar nicht verschwinden. Da eine periodische Kurve nicht geschlossen sein kann, so ist die Behauptung bewiesen.

Endlich ergibt sich aus den Ausführungen noch die nachstehende ebenso triviale Bemerkung:

Besitzt eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung nur eine Nullstelle von $\dot{u}$ etwa an der Stelle t_1 oder gar keine Nullstelle, so besteht sie im ersteren Falle aus zwei an der Geraden $v = v(t_1)$ sich spiegelnden in u eigentlich monotonen Ästen, während in letzterem Falle die ganze Kurve in u eigentlich monoton ist.

§ 19.

Die klassische isoperimetrische Aufgabe auf Mannigfaltigkeiten konstanter Gaußscher Krümmung.

Es sei die Gausssche Krümmung K konstant. Es sei ferner

$$\sigma(u) = \tau(u) = 1. \tag{1}$$

Man setze

$$r = \frac{b-a}{2}, \quad t = \frac{b+a}{2}. \tag{2}$$

Dann ist laut dem Satze XXIX § 17 $\mu(a, b)$ eine Funktion von r, und $G(L, a, b)$ eine Funktion von L und r. Man hat also

$$\mu(a, b) = \mu\{r\}, \quad G(L, a, b) = G\{L, r\}, \tag{3}$$

$$\mu_b(a, b) = \frac{\mu'\{r\}}{2}, \quad \mu_a(a, b) = -\frac{\mu'\{r\}}{2}, \quad \mu'\{r\} = \mu_b - \mu_a. \tag{4}$$

Da nun

$$\mu(a, b) = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{g(a)+g(b)} \tag{5}$$

ist, so hat man

$$\mu_b - \mu_a = 1 - \mu\frac{g'(b)-g'(a)}{g(a)+g(b)} = 1 - \mu^2\frac{g'(b)-g'(a)}{\gamma(b)-\gamma(a)}, \tag{6}$$

$$g'(b) - g'(a) = \int_a^b g''(u)\,du = -K\int_a^b g(u)\,du = -K(\gamma(b) - \gamma(a)). \tag{7}$$

Aus (4), (6), (7) folgt

$$\mu'\{r\} = 1 + K\mu^2, \tag{8}$$

und, da wegen (5) μ mit r verschwindet,

$$r = \int_0^u \frac{d\tau}{1+K\tau^2}. \tag{9}$$

Dabei ist der Integrand auch bei negativem K stets positiv, denn μ kann den Wert $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ nicht erreichen, weil dann r unendlich wird. Es ist also stets

$$\mu'\{r\} > 0, \text{ und bei negativem } K \quad \mu\{r\} < \frac{1}{\sqrt{-K}}. \tag{10}$$

Daraus folgt wegen (4)

$$\mu_a(a, b) < 0, \quad \mu_b(a, b) > 0. \tag{11}$$

Gemäß Satz X § 8 ist daher, wenn

$$x_0 = x_0(a, b)$$

gesetzt wird,

(12) $$\text{für } a \leqq u \leqq b \qquad \psi'(u, x_0) > 0,$$

und die Extremalen besitzen für

(13) $$L \geqq \bar{L}(a, b)$$

den Typus (B, 3). *Dabei ist* $\bar{L}(a, b)$ *durch die Gleichungen* § 5 (20), (25), § 7 (10), (11) *definiert.*

Da gemäß der Aussage 3 des Satzes XXIX § 17 Extremalen vom Typus (B, 1) und vom Typus (B, 2) nicht vorkommen, *so haben die Extremalen für*

$$L < \bar{L}(a, b)$$

den Typus (A). Beim Typus (A) hat man laut der am Schlusse des § 13 zusammengestellten Tafel für die Ableitungen der Extremalfunktion

$$G_t\{L, r, t\} = G_a(L, a, b) + G_b(L, a, b) = 2\sqrt{q_1^2 - \psi(a, x_1)^2} - 2\sqrt{q_1^2 - \psi(b, x_1)^2},$$

und da gemäß der Aussage 2 des Satzes XXIX die linke Seite verschwindet, so folgt zunächst

$$\psi(a, x_1)^2 = \psi(b, x_1)^2.$$

Da ferner gemäß Satz VII § 6 bei jeder Extremalen

$$\psi(a, x_1) < 0, \quad \psi(b, x_1) > 0$$

ist, so ist

(14) $$\psi(a, x_1) + \psi(b, x_1) = 0.$$

Also ist auch beim Typus (A) *gemäß* § 7 (4), (5), (6)

(15) $$x_1 = x_0 = x_0(a, b).$$

Da die Gleichungen

(16) $$\mu_a(a, b) + \mu_b(a, b) = 0, \quad \psi(a, x_0) + \psi(b, x_0) = 0$$

gelten, so sind wegen (12) die Voraussetzungen des Hilfssatzes IV § 16 in der Gestalt § 16 (35) und des Hilfssatzes IV' § 16 in der entsprechenden Gestalt gleichzeitig gegeben, *und es ist daher für jedes* $q \geqq \mu(a, b) = \mu\{r\}$

(17) $$V(a, b, x_0, q) = 0.$$

Insbesondere ist also auch

(18) $$V(a, b, x_0, \mu) = 0,$$

$$\mu = \mu(a, b) = \mu\{r\}$$

Man hat daher

$$\bar{L}(a, b) = L'(a, b) = L''(a, b) = 2\,S(a, b, \varkappa_0, \mu\{r\}). \tag{19}$$

Nun ist für $q \geqq m(a, b, \varkappa)$

$$\frac{\partial}{\partial \varkappa}\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}\,du = -V(a, b, \varkappa, q), \quad \frac{\partial}{\partial q}\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa)^2}\,du = S(a, b, \varkappa, q). \tag{20}$$

Man bezeichne mit $\frac{\partial}{\partial r}$ die Differentiation nach r bei festem t. Dann ist bei Berücksichtigung von (20)

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}\,du = \sqrt{q^2 - \psi(b, \varkappa_0)^2}\,\frac{\partial b}{\partial r} - \sqrt{q^2 - \psi(a, \varkappa_0)^2}\,\frac{\partial a}{\partial r} - V(a, b, \varkappa_0, q)\,\frac{\partial \varkappa_0}{\partial r}.$$

Da nun wegen (16) gemäß § 7 (4), (5), (6)

$$\psi(b, \varkappa_0) = -\psi(a, \varkappa_0) = \mu(a, b) = \mu\{r\} \tag{21}$$

ist, da ferner $\frac{\partial b}{\partial r} = 1$, $\frac{\partial a}{\partial r} = -1$ und $V(a, b, \varkappa_0, q)$ gemäß (17) verschwindet, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}\,du = 2\sqrt{q^2 - \mu\{r\}^2}\,. \tag{22}$$

Da das Integral auf der linken Seite für $r = 0$ verschwindet, so ergibt sich

$$\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}\,du = 2\int_0^r \sqrt{q^2 - \mu\{\tau\}^2}\,d\tau. \tag{23}$$

Wegen (20) folgt hieraus noch

$$S(a, b, \varkappa_0, q) = 2\int_0^r \frac{q\,d\tau}{\sqrt{q^2 - \mu\{\tau\}^2}}. \tag{24}$$

Insbesondere hat man daher

$$\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2} = 2\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2 - \mu\{\tau\}^2}\,d\tau, \tag{25}$$

$$S(a, b, \varkappa_0, \mu\{r\}) = 2\int_0^r \frac{\mu\{r\}\,d\tau}{\sqrt{\mu\{r\}^2 - \mu\{\tau\}^2}}. \tag{26}$$

Diese Gleichungen ergeben wegen (9), daß die Ausdrücke auf der linken Seite von (23) und (24) bei festem K und q und die Ausdrücke auf der linken Seite von (25) und (26) bei festem K nur von r abhängen und nicht von t und vor allem nicht von der speziellen Gestalt der Funktion $g(u)$. Das ist eine über-

raschende Vereinfachung, wenn man sich vergegenwärtigt, daß $g(u)$ ja nur an die Differentialgleichung

$$\frac{-g''(u)}{g(u)} = K$$

gebunden ist, während $\psi(u, x_0)$ durch die Gleichungen

$$\psi(u, x_0) = \frac{\gamma(u) + x_0}{g(u)}, \quad \gamma'(u) = g(u), \quad x_0 = x_0(a, b) = \frac{g(a)\gamma(b) + g(b)\gamma(a)}{g(a) + g(b)}$$

gegeben ist. Geometrisch läßt sich diese Vereinfachung allerdings voraussehen, wie das aus den späteren Ausführungen hervorgehen wird.

Wir wollen nun zunächst die bestimmten Integrale ermitteln. Differenziert man (25) nach r, berücksichtigt, daß der Integrand auf der rechten Seite an der oberen Grenze verschwindet, und führt (26) ein, so erhält man

$$(27) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \psi(u, x_0)^2}\, du = 2\frac{d}{dr}\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2 - \mu\{\tau\}^2}\, d\tau$$
$$= S(a, b, x_0, \mu\{r\})\, \mu'\{r\}.$$

Nun ist bei Berücksichtigung von (8)

$$\frac{Kq^2+1}{\sqrt{q^2-\mu\{\tau\}^2}} - K\sqrt{q^2 - \mu\{\tau\}^2} = \frac{1 + K\mu\{\tau\}^2}{\sqrt{q^2-\mu\{\tau\}^2}} = \frac{\mu'\{\tau\}}{\sqrt{q^2-\mu\{\tau\}^2}} = \frac{d}{d\tau}\arcsin\frac{\mu\{\tau\}}{q}.$$

Durch Integration nach τ von 0 bis r folgt bei Berücksichtigung von (24)

$$(28) \qquad \frac{Kq^2+1}{q} S(a, b, x_0, q) - 2K\int_0^r \sqrt{q^2 - \mu\{\tau\}^2}\, d\tau = 2\arcsin\frac{\mu\{r\}}{q}\ ^{12}).$$

Für $q = \mu\{r\}$ hat man daher

$$(29) \qquad \left(K\mu\{r\} + \frac{1}{\mu\{r\}}\right) S(a, b, x_0, \mu\{r\}) - 2K\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2 - \mu\{\tau\}^2}\, d\tau = \pi.$$

Differenziert man diese Gleichung nach r, so ergibt sich bei Berücksichtigung der zweiten Gleichung (27)

$$\left(K - \frac{1}{\mu\{r\}^2}\right)\mu'\{r\}\, S(a, b, x_0, \mu\{r\}) + \frac{K\mu\{r\}^2+1}{\mu\{r\}}\frac{\partial}{\partial r} S(a, b, x_0, \mu\{r\}) -$$
$$- K\mu'\{r\}\, S(a, b, x_0, \mu\{r\}) = 0.$$

Bei Berücksichtigung von (8) erhält man, da $\mu'\{r\}$ wegen (10) nicht verschwindet,

$$(30) \qquad \frac{\frac{\partial}{\partial r} S(a, b, x_0, \mu\{r\})}{S(a, b, x_0, \mu\{r\})} = \frac{1}{\mu\{r\}}.$$

---

12) Diese Gleichung ergibt sich auch unmittelbar durch Anwendung des GAUSS-BONNETschen Satzes auf die Extremalen.

Andererseits hat man wegen der zweiten Gleichung (27)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\{r\}\,S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\}) - 2\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2-\mu\{\tau\}^2}\,d\tau\right\} = \mu\{r\}\,\frac{\partial}{\partial r}\,S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\})$$

und mithin wegen (30)

$$(31)\quad \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\{r\}\,S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\}) - 2\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2-\mu\{\tau\}^2}\,d\tau\right\} = S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\}).$$

Nun ist

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right) = \frac{\mu'\{r\}}{(1+K\mu\{r\}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher wegen (8)

$$(32)\quad \frac{d}{dr}\left(\frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right) = \frac{1}{\mu\{r\}}\left(\frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right).$$

Aus (30) und (32) folgt

$$(33)\quad S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\}) = C\,\frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}},$$

wobei C eine Konstante bedeutet, die noch von K abhängen kann. Ebenso hat man

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right) = \frac{K\mu\{r\}\,\mu'\{r\}}{(1+K\mu\{r\}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und mithin wegen (8)

$$(34)\quad \frac{d}{dr}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right) = K\,\frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}.$$

Subtrahiert man die mit C multiplizierte Gleichung (34) von der mit K multiplizierten Gleichung (31), so verschwindet wegen (33) die rechte Seite und die Integration ergibt

$$(35)\quad K\,\mu\{r\}\,S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\}) - 2K\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2-\mu\{\tau\}^2}\,d\tau = C\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right)$$

und bei Einführung von (33)

$$(36)\quad 2K\int_0^r \sqrt{\mu\{r\}^2-\mu\{\tau\}^2}\,d\tau = \frac{KC\,\mu\{r\}^2}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}} - C\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}\right)$$
$$= C\left(\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}-1\right).$$

Bei Einführung von (33) und (36) in (29) erhält man

$$C = \pi.$$

Die Einführung dieser Konstantenbestimmung in (33) ergibt

$$(37)\quad 2\,S(a,b,\varkappa_0,\mu\{r\}) = 2\pi\,\frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}.$$

Ebenso erhält man aus (36) bei Berücksichtigung von (25) für $K \neq 0$

$$(38)\quad 2\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \psi(u, x_0)^2}\, du = 2\pi \frac{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}-1}{K} = \frac{2\pi\mu\{r\}^2}{1+\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}.$$

Da $\mu\{r\}$ wegen (9) eine stetige Funktion von K und r ist, und da dasselbe wegen (25) auch von der linken Seite von (38) gilt, so folgt, wenn man in (38) K gegen Null konvergieren läßt, berücksichtigt, daß dann $\mu\{r\}$ gegen r konvergiert, und den letzten Ausdruck auf der rechten Seite von (38) heranzieht

$$(39)\quad \text{für } K = 0 \qquad \mu\{r\} = r, \quad 2S(a, b, x_0, \mu\{r\}) = 2\pi r,$$
$$2\int_a^b \sqrt{\mu\{r^2\} - \psi(u, x_0)^2}\, du = \pi r^2.$$

Für $K > 0$ erhält man aus (9), (37), (38), (25)

$$(40)\quad \mu\{r\} = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{tg}(\sqrt{K}\, r), \quad 2S(a, b, x_0, \mu\{r\}) = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\, r),$$
$$2\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \psi(u, x_0)^2}\, du = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{1}{\cos(\sqrt{K}\, r)} - 1\right).$$

Ebenso erhält man für $K < 0$

$$(41)\quad \mu\{r\} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{tgh}(\sqrt{-K}\, r), \quad 2S(a, b, x_0, \mu\{r\}) = \frac{2\pi}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\, r),$$
$$2\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \psi(u, x_0)^2}\, du = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{1}{\cosh(\sqrt{-K}\, r)} - 1\right).$$

Nun gibt es für $K \geqq 0$ zu jeder vorgeschriebenen von Null verschiedenen geodätischen Krümmung durch jeden Punkt in jeder Richtung einen Kreis, während für $K < 0$ durch jeden Punkt in jeder Richtung bei jeder vorgeschriebenen geodätischen Krümmung, wenn der absolute Betrag derselben größer als $\sqrt{-K}$ ist, ein Kreis, wenn er gleich $\sqrt{-K}$ ist, eine Orizykle, und wenn er kleiner als $\sqrt{-K}$ ist, eine Abstandskurve geht. Gemäß dem eingangs des vorigen Paragraphen angeführten Unitätssatze sind daher für $K \geqq 0$ die Kreise und für $K < 0$ die Kreise, Orizyklen und Abstandskurven die einzigen Kurven konstanter von Null verschiedener geodätischer Krümmung.

Wie nun die Gleichungen (18), (19) zeigen, ist die zu

$$(42)\qquad L = \bar{L}(a, b) = 2S(a, b, x_0, \mu\{r\})$$

gehörende Extremale kraft des Satzes XXXII des vorigen Paragraphen eine geschlossene Kurve konstanter geodätischer Krümmung und daher nach den eben gemachten Feststellungen ein Kreis vom Radius r. Da gemäß dem

Satze XXXI die geodätische Krümmung der Extremalenbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ gleich $\frac{1}{q_1}$ ist, und q_1 beim Typus (B, 3) gleich $\mu(a, b)$ ist, so ergibt sich, daß der reziproke Wert unserer Funktion $\mu\{r\}$ die geodätische Krümmung des Kreises mit dem Radius r angibt – und zwar bei dem im § 1 festgesetzten Umlaufsinn.

Bezeichnet man den Umfang und Inhalt des Kreises mit dem Radius r auf unserer Mannigfaltigkeit mit

$$L_K\{r\} \quad \text{und} \quad J_K\{r\}$$

und die Ableitungen dieser Funktionen nach r mit

$$L'_K\{r\} \quad \text{und} \quad J'_K\{r\},$$

so hat man zunächst wegen (42), (37), (30)

$$L_K\{r\} = 2(Sa, b, x_0, \mu\{r\}) = 2\pi \frac{\mu\{r\}}{\sqrt{1 + K\mu\{r\}^2}}, \tag{43}$$

$$\mu\{r\} = \frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}}. \tag{44}$$

Da ferner, wie oben gezeigt, der in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ eingeschriebene Kreis vom Radius r eine Extremale vom Typus (B, 3) ist, so gilt für ihn in der linearen isoperimetrischen Ungleichung § 7 (14) das Gleichheitszeichen. Man hat also

$$J_K\{r\} = \mu\{r\} L_K\{r\} - 2\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \varphi(u, x_0)^2}\, du, \tag{45}$$

und wegen der ersten Gleichung (43), (35), (25) und der zweiten Relation (10)

$$J_K\{r\} = \frac{2\pi}{K}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + K\mu\{r\}^2}}\right) < \mu\{r\} L_K\{r\} < \frac{1}{\sqrt{-K}} L_K\{r\}, \tag{46}$$

wobei die letzte Ungleichung natürlich ein negatives K voraussetzt. Die Einführung von (44) in (45) ergibt ferner

$$2\int_a^b \sqrt{\mu\{r\}^2 - \varphi(u, x_0)^2}\, du = \frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}} L_K\{r\} - J_K\{r\}. \tag{47}$$

Nun kann das Linienelement dann und nur dann in die Gestalt

$$ds^2 = du^2 + g(u)^2 dv^2$$

gebracht werden, wenn die Kurven $u = \text{const}$ eine Schar äquidistanter Kurven konstanter geodätischer Krümmung bilden, und die Kurven $v = \text{const}$ die Schar der zu ihnen orthogonalen geodätischen Linien. Da ferner wegen der Konstanz von K eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung durch eine Bewegung in sich selbst verschoben werden kann, so gilt das auch von ihren

Äquidistanten, deren geodätische Krümmung mithin auch konstant ist. Also gehören je zwei äquidistante Kurven konstanter geodätischer Krümmung einer Schar solcher Kurven an. Der Satz VIII § 7 nimmt daher jetzt bei Einführung (37), (38), (25), (43), (47) die folgende Gestalt an:

Satz XXXIV. *Für die einfachen geschlossenen Kurven, welche in einen von zwei äquidistanten Kurven konstanter geodätischer Krümmung begrenzten Streifen eingeschrieben sind, gilt die lineare isoperimetrische Ungleichung in den folgenden beiden miteinander übereinstimmenden Darstellungen:*

$$J \leqq \frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}} L - \left(\frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}} L_K\{r\} - J_K\{r\}\right), \tag{48}$$

$$J \leqq \mu\{r\} L - \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{1+K\mu\{r\}^2} - 1\right) = \mu\{r\} L - 2\pi \frac{\mu\{r\}^2}{1+\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}, \tag{49}$$

wobei $\mu\{r\}$ durch (9) gegeben ist, und für $K = 0$ auf der rechten Seite von (49), der zweite Ausdruck zu verwenden ist.

Für

$$L \geqq L_K\{r\} = \frac{2\pi\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}} \tag{50}$$

wird die Gleichheit von einer und bis auf die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse nur von einer Kurve erreicht. Diese ist eine Extremale vom Typus (B, 3), *deren beide im Innern des Streifens verlaufenden Bögen Halbkreise vom Radius r mit der konvexen Seite nach außen sind.*

Ist dagegen

$$2(b-a) < L < L_K\{r\} = \frac{2\pi\mu\{r\}}{\sqrt{1+K\mu\{r\}^2}}, \tag{51}$$

so kann die obige isoperimetrische Schranke durch eine kleinere ersetzt werden, welche dem Typus (A) entspricht. Man hat dann nämlich wegen (23)

$$J \leqq q_1 L - 4\int_0^r \sqrt{q_1^2 - \mu\{\tau\}^2}\, d\tau, \tag{52}$$

wobei q_1 gemäß (24) und § 5 (5) bestimmt ist durch die Gleichung

$$L = 2S(a, b, \varkappa_0, q_1) = 4\int_0^r \frac{q_1\, d\tau}{\sqrt{q_1^2 - \mu\{\tau\}^2}} = 4\int_0^r \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\mu\{\tau\}^2}{q_1^2}}}. \tag{53}$$

Diese Gleichung hat, da der Integrand mit wachsendem q_1 abnimmt, eine und nur eine Lösung. Wie man sich leicht überzeugt, und wie übrigens auch aus der ersten Ungleichung (11) des Satzes XIV § 10 unmittelbar abzulesen ist, folgt aus

$$L \to 2(b-a)$$
$$q_1 \to \infty.$$

Die durch (52) *gegebene Schranke wird ebenfalls von einer und bis auf die triviale Verschiebung parallel zur v-Achse nur einer Kurve erreicht. Diese Kurve ist eine Extremale vom Typus* (A), *welche für* $K \geqq 0$ *aus zwei an der gemeinsamen Sehne von der Länge* $2r$ *gespiegelten Kreisbögen besteht, deren jeder die Länge* $\frac{L}{2}$ *besitzt. Im Falle* $K < 0$ *gehören die beiden an der gemeinsamen Sehne von der Länge* $2r$ *gespiegelten Bögen für* $q_1 < \sqrt{-K}$ *Kreisen an, für* $q_1 = \sqrt{-K}$ *Orizyklen und für* $q_1 > \sqrt{-K}$ *Abstandskurven.*

Durch Einführung der ersten Gleichung (53) auf der rechten Seite von (52) und Heranziehung der mit $\frac{2}{K}$ multiplizierten Gleichung (28) kann die Ungleichung (52) für $K \neq 0$ auch in die folgende Gestalt gebracht werden:

$$J \leqq \frac{4}{K} \arcsin \frac{\mu\{r\}}{q_1} - \frac{1}{K q_1} L. \tag{53'}$$

Wir hätten uns einige der oben durchgeführten einfachen Rechnungen ersparen können, wenn wir für $L_K\{r\}$ und $J_K\{r\}$ die bekannten expliziten Formeln hätten einführen wollen. Bei dem eingeschlagenen Verfahren ergeben sich auch diese unmittelbar aus (39), (40), (41), (43), (46).

Ich habe in früheren Arbeiten[13]) den obigen Satz XXXIV nur für spezielle Streifen bewiesen, nämlich in der Euklidischen Ebene — für Parallelstreifen, auf der Sphäre — für eine zu einem Äquator symmetrische Zone, in der hyperbolischen Ebene — für einen von zwei zur Leitgeraden symmetrischen Abstandskurven begrenzten Streifen. Wir sehen jetzt, daß der Satz auch gilt — in der Euklidischen Ebene — für einen von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Streifen, auf der Sphäre — für eine beliebige Zone, in der hyperbolischen Ebene — für einen Streifen, der gebildet wird von zwei beliebigen Abstandskurven einer Geraden, von zwei äquidistanten Orizyklen, von zwei konzentrischen Kreisen.

Sind die Kurven $u =$ const konzentrische Kreise, was auf der Sphäre natürlich immer der Fall ist, so können u und v als Polarkoordinaten betrachtet werden, und es sind dann die Punkte u, v und $u, v + 2\pi$ zu identifizieren. Das ändert zwar nichts an der unbeschränkten Gültigkeit der aufgestellten isoperimetrischen Ungleichungen, wohl aber bedarf die Behauptung, daß für $L \geqq L_K\{r\}$ die Gleichheit von einer Kurve erreicht wird, einer gewissen Einschränkung, indem auf der die Gleichheit erreichenden Extremalen bei einer gewissen Größe von L Punktepaare zu liegen kommen, welche bei der Identifizierung zusammenfallen und dadurch einen Selbstschnittpunkt bilden. Das

[13]) Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689–694; **46** (1940), S. 204–218, 743–747 und 751–768.

tritt offenbar erst dann ein, wenn die beiden symmetrischen in den Kreisring eingeschriebenen Halbkreise sich von außen berühren. Man bezeichne mit

$$L_K^*\{r\}$$

die Länge dieser ausgearteten kritischen Extremalen. Wir müssen dann die Ungleichung (50) noch durch die Ungleichung

$$L < L_K^*\{r\} \tag{54}$$

ergänzen. Die leicht auszurechnenden Formeln für $L_K^*\{r\}$ werden im § 22 in einem allgemeineren Zusammenhang angegeben werden. Endlich dürfen in diesem Falle natürlich nur solche einfache, geschlossene Kurven in Betracht gezogen werden, welche geschlossen bleiben, wenn die Identifizierung aufgehoben wird. Mit anderen Worten: es sind in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie diejenigen einfachen, geschlossenen Kurven von der Betrachtung auszuschließen, welche den Mittelpunkt der konzentrischen Kreise im Innern enthalten, und in der sphärischen Geometrie diejenigen, welche die beiden Mittelpunkte voneinander trennen. Für Kurven, die solcherart in einen konzentrischen Kreisring eingeschrieben sind, bedarf die isoperimetrische Aufgabe einer abgeänderten Behandlung, welche ebenfalls im § 22 zur Sprache kommen wird.

Für die Ableitung der majorisierenden Seite der linearen isoperimetrischen Ungleichung (48) nach r erhält man bei Berücksichtigung der aus (31), (45), (25) und der ersten Gleichung (43) folgenden trivialen Gleichung

$$J'_K\{r\} = L_K\{r\}$$

und der unter (44) festgestellten Gleichung

$$\frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}} = \mu\{r\}$$

die Darstellung

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}}L - \left(\frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}}L_K\{r\} - J_K\{r\}\right)\right]$$
$$= \frac{d}{dr}\left(\frac{L_K\{r\}}{L'_K\{r\}}\right)(L - L_K\{r\}) = \mu'\{r\}(L - L_K\{r\}).$$

Da nun gemäß (10) $\mu'\{r\}$ positiv ist, so ist die Ableitung für $r < r'$ positiv und für $r > r'$ negativ, wobei r' den durch die Gleichung

$$L_K\{r'\} = L$$

definierten Radius des Kreises gleichen Umfanges bedeutet. Die majorisierende Seite nimmt also ihr Maximum an der Stelle $r = r'$ an, und dieses Maximum wird, wie die Darstellung (48) zeigt, gleich $J_K\{r'\}$. Aus der linearen isoperimetrischen Ungleichung folgt also a fortiori der die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung bildende Satz

Satz XXXV. *Es gilt für den Inhalt J eines von einer einfachen, geschlossenen Kurve umgrenzten Gebietes*

$$J \leqq J_K\{r'\},$$

wobei r' den Radius des Kreises gleichen Umfangs bedeutet, und die Gleichheit nur von diesem erreicht wird.

Gleichzeitig erkennen wir, *daß die lineare isoperimetrische Ungleichung* (48), (49) *auch unter der Voraussetzung $L < L_K\{r\}$, unter welcher sie ja nicht die genaue Schranke liefert, immerhin noch eine Verschärfung der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung darstellt.*

§ 20.

Abschätzung des isoperimetrischen Extremums auf Grund einer unteren Schranke der Gaußschen Krümmung.

Wir beschäftigen uns hier wie in den drei letzten Paragraphen mit dem klassischen isoperimetrischen Problem, d. h. wir machen die Voraussetzung

$$\sigma(u) = \tau(u) = 1.$$

Dann gilt der

Satz XXXVI. *Es sei $\alpha < a < b < \beta$ und für*

$$a \leqq u \leqq b \qquad K(u) \geqq K^*, \tag{1}$$

wobei K^* eine Konstante bedeutet. Dann ist

$$G(L, a, b) \geqq G_{K^*}\{L, r\}, \tag{2}$$

wobei $r = \frac{b-a}{2}$ ist und $G_{K^*}\{L, r\}$ die Extremalfunktion für einen Streifen von der Breite $2r$ auf einer Mannigfaltigkeit mit der konstanten Gaussschen Krümmung K^* bedeutet und mithin für $L \geqq L_{K^*}\{r\}$ durch die majorisierende Seite der linearen isoperimetrischen Ungleichungen (48), (49) *des vorigen Paragraphen gegeben ist und für $L < L_{K^*}\{r\}$ durch die majorisierende Seite der isoperimetrischen Ungleichungen* (53), (53′). *Das Gleichheitszeichen gilt nur im trivialen Falle, daß im ganzen Intervall $K(u)$ konstant gleich K^* bleibt.*

Beweis. Man hat

$$G(L, a, b) = \Gamma(L, a, b, x_1, q_1) = q_1 L - 2\int_a^b \sqrt{q_1^2 - \psi(u, x_1)^2}\, du. \tag{3}$$

Gemäß Satz VII § 6 gibt es ein u_0, $a < u_0 < b$, so daß

$$\begin{aligned} &\text{für } a \leqq u < u_0 \quad \psi(u, x_1) < 0, \\ &\text{für } u_0 < u \leqq b \quad \psi(u, x_1) > 0, \quad \psi(u_0, x_1) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ist. Man bestimme nun $g^*(u)$ als diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$g^{*\prime\prime}(u) + K^* g^*(u) = 0, \tag{5}$$

für welche

$$g^*(u_0) = g(u_0), \quad g^{*\prime}(u_0) = g'(u_0) \tag{6}$$

wird. Dann ist $g^*(u)$ für alle Werte von u regulär. Ferner ist wegen (5) und der Gleichung

$$g''(u) + K(u)\, g(u) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d}{du}\{g(u)\, g^{*\prime}(u) - g^*(u)\, g'(u)\} = g(u)\, g^*(u)\,(K(u) - K^*). \tag{8}$$

Da wegen (6)

$$g(u_0)\, g^{*\prime}(u_0) - g^*(u_0)\, g'(u_0) = 0 \tag{9}$$

ist, so erhält man

$$\text{für } a \leqq u \leqq b \quad g(u) g^{*\prime}(u) - g^*(u) g'(u) = \int_{u_0}^{u} g(t) g^*(t)\,(K(t) - K^*)\, dt. \tag{10}$$

Wir haben also wegen (1)

$$\begin{aligned} &\text{für } u > u_0 \quad g(u) g^{*\prime}(u) - g^*(u) g'(u) \geqq 0, \\ &\text{für } u < u_0 \quad g(u) g^{*\prime}(u) - g^*(u) g'(u) \leqq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei gilt an einer Stelle u das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn zwischen u_0 und dieser Stelle die Gausssche Krümmung konstant gleich K^* bleibt.

Besäße nun $g^*(u)$ im Intervall $u_0 \leqq u \leqq b$ Nullstellen, so bezeichne u_1 die kleinste unter ihnen. Dann wäre wegen (6)

$$\text{für } u_0 \leqq u < u_1 \quad g^*(u) > 0, \quad g^*(u_1) = 0 \tag{12}$$

und mithin

$$g^{*\prime}(u_1) \leqq 0. \tag{13}$$

Nun ist die Ungleichung

$$g^{*\prime}(u_1) < 0$$

wegen (11) ausgeschlossen. Wäre aber $g^{*\prime}(u_1) = 0$, so müßte wegen $g^*(u_1) = 0$ die Funktion $g^*(u)$ als Lösung der linearen Differentialgleichung (5) identisch verschwinden im Widerspruch zu (6). Also kann $g^*(u)$ im Intervall $u_0 \leqq u \leqq b$ nicht verschwinden. Ebenso beweist man, daß $g^*(u)$ auch im Intervall $a \leqq u \leqq u_0$ nicht verschwinden kann. Also gilt wegen (6)

$$\text{für } a \leqq u \leqq b \quad g^*(u) > 0. \tag{14}$$

Nun setze man

$$\gamma^*(u) = \int_{u_0}^{u} g^*(t)\, dt, \qquad \psi^*(u, x) = \frac{\gamma^*(u) + x}{g^*(u)}. \tag{15}$$

Dann hat man

$$(16)\quad \psi'(u,x_1) = 1 - \psi(u,x_1)\frac{g'(u)}{g(u)}, \qquad \psi^{*\prime}(u,0) = 1 - \psi^*(u,0)\frac{g^{*\prime}(u)}{g^*(u)};$$

$$(17)\quad \begin{aligned}&(\psi'(u,x_1) - \psi^{*\prime}(u,0)) + (\psi(u,x_1) - \psi^*(u,0))\frac{g'(u)}{g(u)}\\ &\qquad = \psi^*(u,0)\left(\frac{g^{*\prime}(u)}{g^*(u)} - \frac{g'(u)}{g(u)}\right),\end{aligned}$$

$$\frac{d}{du}\{g(u)(\psi(u,x_1) - \psi^*(u,0))\} = \frac{\psi^*(u,0)}{g^*(u)}(g(u)g^{*\prime}(u) - g^*(u)g'(u)).$$

Nun hat wegen (15) $\psi^*(u,0)$ das Vorzeichen von $u - u_0$, und es ist daher wegen (11)

$$\text{für } a \leqq u \leqq b \qquad \frac{\psi^*(u,0)}{g^*(u)}(g(u)g^{*\prime}(u) - g^*(u)g'(u)) \geqq 0.$$

Bei Berücksichtigung des Verschwindens von $\psi(u,x_1)$ und $\psi^*(u,0)$ an der Stelle u_0 hat man daher

$$\begin{aligned}&\text{für } a \leqq u \leqq u_0 \quad g(u)(\psi(u,x_1) - \psi^*(u,0)) \leqq 0,\\ &\text{für } u_0 \leqq u \leqq b \quad g(u)(\psi(u,x_1) - \psi^*(u,0)) \geqq 0\end{aligned}$$

und mithin

$$(18)\quad \text{für } a \leqq u \leqq b \qquad \psi(u,x_1)^2 \geqq \psi^*(u,0)^2.$$

Dabei gilt an einer von u_0 verschiedenen Stelle u das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Gausssche Krümmung zwischen u_0 und dieser Stelle konstant gleich K^* ist.

Da

$$\text{für } a \leqq u \leqq b \qquad q_1 \geqq |\psi(u,x_1)|$$

ist, so gilt im selben Intervall auch

$$(19)\quad q_1 \geqq |\psi^*(u,0)|,$$

und man erhält

$$(20)\quad \int_a^b \sqrt{q_1^2 - \psi(u,x_1)^2}\,du \leqq \int_a^b \sqrt{q_1^2 - \psi^*(u,0)^2}\,du.$$

Wegen (3) hat man also

$$(21)\quad G(L,a,b) \geqq \Gamma^*(L,a,b,0,q_1),$$

wobei

$$\Gamma^*(L,a,b,x,q) = qL - 2\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi^*(u,x)^2}\,du$$

zu setzen ist, und das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn für $a \leqq u \leqq b$ $K(u)$ konstant gleich K^* bleibt. Bezeichnet nun $G^*(L,a,b)$ die zum Linienelement

$$ds^2 = du^2 + g^*(u)^2\,dv^2$$

gehörende Extremalfunktion, so ist gemäß Satz III § 3 und § 10 (3) $G^*(L, a, b)$ gleich dem Minimum von

$$\Gamma(L, a, b, \varkappa, q)$$

als Funktion von $\varkappa$ und q im Bereich

$$q \geqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} |\psi^*(u, \varkappa)|.$$

Daher folgt aus (21)

$$G(L, a, b) \geqq G^*(L, a, b)$$

und, da gemäß den Sätzen des vorigen Paragraphen

$$G^*(L, a, b) = G_{K^*}\{L, r\}$$

ist, so ergibt sich auch die Ungleichung (2), in welcher das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn im ganzen Intervall $a \leqq u \leqq b$ $K(u)$ konstant gleich K^* bleibt, w. z. b. w.

Aus dem eben bewiesenen Satze XXXVI folgt im Speziellen, *daß die zu konstantem K gehörige Extremalfunktion* $G_K\{L, r\}$ *mit abnehmendem K eigentlich monoton abnimmt.* Da sie gemäß dem Satze XXXV des vorigen Paragraphen den Inhalt des umfanggleichen Kreises nicht übersteigt, und dieser gemäß der letzten Ungleichung (46) des vorigen Paragraphen für $K \to -\infty$ gegen Null konvergiert, so hat man noch

$$\operatorname*{Lim}_{K \to -\infty} G_K\{L, r\} = 0.$$

Endlich gilt noch der

Satz XXXVII. *Es sei für* $\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1$ $K(u) \geqq K^*$, *wobei* K^* *eine Konstante bedeutet. Dann ist das kraft Satz* XX § 14 *stets existierende Maximum des Flächeninhalts, der von einer einfachen, geschlossenen, im Bereiche* $\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1$ *verlaufenden Kurve mit dem Umfang L umschlossen wird, wenn* $K(u)$ *in dem Bereich nicht identisch gleich* K^* *ist, größer als der Inhalt des umfanggleichen Kreises auf der Mannigfaltigkeit mit der konstanten Krümmung* K^*. *Dabei ist vorausgesetzt, daß* $\beta_1 - \alpha_1$ *nicht kleiner als der Durchmesser dieses Kreises ist.*

Beweis. Man wähle a und b, $\alpha_1 \leqq a < b \leqq \beta_1$, so, daß $K(u)$ nicht im ganzen Intervall $a \leqq u \leqq b$ konstant gleich K^* bleibt, und daß

$$b - a = 2r'$$

ist, wobei r' den Radius des umfanggleichen Kreises auf der Mannigfaltigkeit mit der konstanten Krümmung K^* bezeichnet. Dann gilt gemäß dem Satz XXXVI

$$G(L, a, b) > G_{K^*}\{L, r'\}.$$

Da nun die rechte Seite dieser Ungleichung, wie die majorisierende Seite der linearen isoperimetrischen Ungleichung (48) des vorigen Paragraphen zeigt, gleich dem Inhalt des umfanggleichen Kreises wird, so ist die Behauptung bewiesen.

§ 21.

Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationsringe in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie.

Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper, welche ihre Achse schneiden, ist schon an früherer Stelle [14]) von mir im wesentlichen mit den Methoden behandelt worden, deren allgemeine Theorie in der vorliegenden Arbeit entwickelt worden ist. Daher soll hier als weiteres Beispiel für die Tragkraft dieser Methoden das isoperimetrische Problem für Rotationsringe gelöst werden.

Unter einem Rotationsringe verstehen wir den Körper, der durch Rotation einer einfachen, geschlossenen, ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Gerade erzeugt wird. Dabei seien die Ableitungen der laufenden Koordinaten der erzeugenden Meridiankurve als Funktionen der Bogenlänge bis auf höchstens endlich viele Punkte bestimmt und stetig. Wir ziehen nur solche Ringe in Betracht, deren Abstand von der Rotationsachse nirgends geringer ist als eine gegebene positive Größe ϱ und suchen bei gegebener Oberfläche L den Rotationsring größten Volumens. Im Interesse der Durchsichtigkeit beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Euklidischen und hyperbolischen Raum.

Man erhält in der Euklidischen Geometrie

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + dv^2, \quad L = 2\pi \int_C u\, ds, \quad J = 2\pi \int_T u\, du\, dv,$$

wobei u und v rechtwinklige Koordinaten in der Meridianebene bezeichnen, die Rotationsachse durch die Gleichung $u = 0$ gegeben wird, C die geschlossene Meridiankurve bedeutet, T das von ihr umschlossene Gebiet und J das Volumen des Rotationsringes.

Man hat also für diesen Fall

$$(2) \qquad g(u) = 1, \; \sigma(u) = 2\pi u, \quad \tau(u) = 2\pi u, \quad \gamma(u) = \pi u^2$$

[14]) Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 696–709; **46** (1940), S. 218–230, 769–794.

und gemäß § 7 (5)

$$\mu(a,b) = \frac{\pi b^2 - \pi a^2}{2\pi a + 2\pi b} = \frac{b-a}{2},$$

(3)
$$\varkappa_0(a,b) = -\frac{2\pi a\, \pi b^2 + 2\pi b\, \pi a^2}{2\pi a + 2\pi b} = -\pi a b,$$

(4) $$\mu_a(a,b) = -\frac{1}{2}, \qquad \mu_b(a,b) = \frac{1}{2},$$

(5) $$\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a(a,b) + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b(a,b) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) < 0,$$

(6) $$\psi(u,\varkappa_0) = \frac{u^2 - ab}{2u}, \qquad \mu(a,b)^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2 = \frac{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}{4u^2},$$

(7) $$\mu(a,b)L - 2\int_a^b \sqrt{\mu(a,b)^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2}\,\sigma(u)\,du$$
$$= \frac{b-a}{2}L - 2\pi\int_a^b \sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}\,du,$$

(8) $$S(a,b,\varkappa_0,\mu) = \int_a^b \frac{\mu\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{\mu^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2}} = 2\pi\int_a^b \frac{(b-a)\,u^2\,du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}},$$

(9) $$V(a,b,\varkappa_0,\mu) = \int_a^b \frac{\psi(u,\varkappa_0)\,du}{g(u)\sqrt{\mu^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2}} = \int_a^b \frac{(u^2 - ab)\,du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}.$$

Gemäß § 7 (9), (10), (11), § 5 (20), (25) hat man ferner

(10) $$L''(a,b) = 2S(a,b,\varkappa_0,\mu) + 2\sigma(a)g(a)V(a,b,\varkappa_0,\mu) = 4\pi b\int_a^b \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{\sqrt{b^2-u^2}}\,du.$$

Durch die Substitution $u = b\tau$ erhält man

(11) $$L''(a,b) = 4\pi b^2\int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\sqrt{\tau^2 - \frac{a^2}{b^2}}}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau,$$

und diese Darstellung zeigt, daß $L''(a,b)$ bei festem a mit wachsendem b und bei festem b mit fallendem a zunimmt.

Nun folgt aus (5) und der Gleichung $\psi(a,\varkappa_0) + \psi(b,\varkappa_0) = 0$ auf Grund des Hilfssatzes IV § 16

(12) $$V(a,b,\varkappa_0,\mu) > 0$$

und mithin

(13) $$\overline{L}(a,b) = L''(a,b) > L'(a,b).$$

Da gemäß (4) μ_a negativ und μ_b positiv bleibt, *so ist kraft des Satzes* X § 8 *sichergestellt, daß für jedes Wertepaar* a, b, $0 < a < b$, *die lineare isoperimetrische Ungleichung Gültigkeit hat — und zwar für*

$$L \geqq L''(a, b) \tag{14}$$

als genaue nur von einer einzigen Kurve erreichte Schranke. Die lineare isoperimetrische Ungleichung hat gemäß (7) *die Gestalt*

$$J \leqq \frac{b-a}{2} L - 2\pi \int_a^b \sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}\, du. \tag{15}$$

Ist

$$L < L''(a, b), \tag{16}$$

so kann die durch die lineare isoperimetrische Ungleichung (15) gegebene Schranke durch eine kleinere ersetzt werden — und zwar liegt hier wegen des durch (12) gesicherten positiven Vorzeichens von $V(a, b, \varkappa_0, \mu)$ in der Klassifikation des Satzes XXIII § 15 der Fall I, 2 vor. Es gibt daher laut diesem Satz einen durch die Gleichung § 15 (60) eindeutig bestimmten Wert $\varkappa_1^*$, so daß die das genaue isoperimetrische Extremum liefernde Extremale für

$$2\int_a^b \sigma(u)\, du = 2\pi(b^2 - a^2) < L < L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) \tag{17}$$

dem Typus (A) angehört, und für

$$L''(a, b, \varkappa_1^*, -\psi(a, \varkappa_1^*)) \leqq L < L''(a, b) \tag{18}$$

dem Typus (B, 2).

Jetzt wenden wir uns der am Eingang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe zu, bei gegebenem $\varrho > 0$ und L im Bereiche $\varrho \leqq u$ die Meridiankurve zu bestimmen, welche das Maximum von J liefert.

Durch die Ungleichung (5) sind die Voraussetzungen des Satzes XXVI § 16 gesichert. Laut diesem wird das gesuchte Maximum von einer dem Typus (B, 3) angehörenden Extremalen erreicht, bei welcher $a = \varrho$ wird, und welche mit der Geraden $u = \varrho$ ein endliches Stück, mit der Geraden $u = b^*$ dagegen nur einen Punkt gemein hat, wobei b^* den zugehörigen Wert von b bezeichnet, d. h. also das Maximum von u auf der Extremalen.

Diese letzte Eigenschaft ist, wie die am Schlusse des § 13 angegebene Formel für G_b im Falle (B, 3) zeigt, gleichbedeutend mit dem Verschwinden von $G_b(L, \varrho, b^*)$ oder mit der Gleichung

$$L''(\varrho, b^*) = L. \tag{19}$$

Da nun, wie oben an der Hand der Darstellung (11) festgestellt, $L''(a, b)$ bei festem a mit wachsendem b zunimmt, so ist b^* durch die Gleichung (19)

eindeutig bestimmt. Das Extremum wird daher nur von einer einzigen Extremalen erreicht, oder mit anderen Worten: *es gibt bei gegebenem ϱ und gegebener Oberfläche L nur einen einzigen Rotationsring von maximalem Volumen. Man erhält für dieses Maximalvolumen*

$$J = \frac{b^* - \varrho}{2} L - 2\pi \int_{\varrho}^{b^*} \sqrt{(b^{*2} - u^2)(u^2 - \varrho^2)}\, du, \tag{20}$$

wobei b^* eindeutig bestimmt ist durch die Gleichung

$$4\pi b^{*2} \int_{\frac{\varrho}{b^*}}^{1} \frac{\sqrt{\tau^2 - \frac{\varrho^2}{b^{*2}}}}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = L. \tag{21}$$

Für die Länge $l - s_3$ des Stückes, welches die Meridiankurve mit der Geraden $u = \varrho$ gemein hat, erhält man wegen $s_1 = s_2$ aus der Gleichung § 6 (25) bei Einführung der Gleichung (9) des laufenden Paragraphen

$$l - s_3 = 2 g(\varrho) V(\varrho, b^*, \varkappa_0, \mu) = 2 \int_{\varrho}^{b^*} \frac{(u^2 - \varrho\, b^*)\, du}{\sqrt{(b^{*2} - u^2)(u^2 - \varrho^2)}}, \tag{22}$$

wobei das positive Vorzeichen der rechten Seite durch (12) gesichert ist. Die beiden symmetrischen Extremalbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ werden endlich gemäß § 6 (6), (7), (8), (9) durch die folgenden Formeln gegeben:

$$\text{für } 0 < s < s_1 \qquad v = v(0) + \int_{\varrho}^{u} \frac{(t^2 - \varrho\, b^*)\, dt}{\sqrt{(b^{*2} - t^2)(t^2 - \varrho^2)}}, \tag{23}$$

$$s_1 = s_2, \quad v(s_2) = v(s_1) = v(0) + \int_{\varrho}^{b^*} \frac{(t^2 - \varrho\, b^*)\, dt}{\sqrt{(b^{*2} - t^2)(t^2 - \varrho^2)}} = v(0) + V(\varrho, b^*, \varkappa_0, \mu), \tag{24}$$

$$\text{für } s_2 < s < s_3 \qquad v = v(s_2) + \int_{u}^{b^*} \frac{(t^2 - \varrho\, b^*)\, dt}{\sqrt{(b^{*2} - t^2)(t^2 - \varrho^2)}}, \tag{25}$$

$$v(s_3) = v(s_2) + \int_{\varrho}^{b^*} \frac{(t^2 - \varrho\, b^*)\, dt}{\sqrt{(b^{*2} - t^2)(t^2 - \varrho^2)}} = v(s_2) + V(\varrho, b^*, \varkappa_0, \mu). \tag{26}$$

Man hat

$$\int_{\frac{b^*}{\varrho}}^{1} \frac{\sqrt{\tau^2 - \frac{\varrho^2}{b^{*2}}}}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau < \int_{0}^{1} \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = 1. \tag{27}$$

Aus (21) folgt daher

$$b^* > b_0, \tag{28}$$

wobei b_0 durch die Gleichung

$$4\pi b_0^2 = L \tag{29}$$

definiert ist. Da, wie an der Hand der Darstellung (11) festgestellt, die Funktion $L''(a, b)$ bei festem a mit wachsendem b und bei festem b mit fallendem a wächst, so folgt aus der Gleichung (21), daß b^* mit fallendem ϱ abnimmt. Da wegen (28) $\frac{\varrho}{b^*}$ mit ϱ gegen Null konvergiert, so konvergiert mit verschwindendem ϱ auch das Integral auf der linken Seite von (21) gegen 1 und mithin auch b^* gegen b_0. Die Einführung dieser Grenzwerte in (20) und (22) ergibt bei Berücksichtigung von (29), daß aus $\varrho \to 0$

$$b^* \to b_0, \quad J \to \tfrac{4}{3}\pi b_0^3 \quad \text{und} \quad l - s_3 \to 2 b_0 \tag{30}$$

folgt. Ebenso ergibt die Einführung der Grenzwerte in (23), (24), (25), (26), daß aus $\varrho \to 0$

$$\text{(31) für } 0 < s < s_1 \quad v \to v(0) + b_0 - \sqrt{b_0^2 - u^2}, \quad v - (v(0) + b_0) \to -\sqrt{b_0^2 - u^2},$$

$$v(s_2) = v(s_1) \to v(0) + b_0 \tag{32}$$

folgt und

$$\text{für } s_2 < s < s_3 \quad v - (v(0) + b_0) \to \sqrt{b_0^2 - u^2}, \tag{33}$$

$$v(s_3) \to v(0) + 2 b_0. \tag{34}$$

Da endlich das Maximalvolumen nur von einer einzigen Meridiankurve erreicht wird, und diese mit der Geraden $u = \varrho$ ein endliches durch (22) gegebenes Stück gemein hat, so folgt, daß das Maximalvolumen mit fallendem ϱ zunimmt, ein Sachverhalt, der wegen der Ungleichung (5) des laufenden Paragraphen auch unmittelbar aus dem Satz XXIV § 16 geschlossen oder aus der am Schlusse des § 13 gegebenen Formel für die Ableitung der Extremalfunktion nach a abgelesen werden kann. *Konvergiert also ϱ gegen Null, so konvergiert, wie die Gleichungen* (29) *und* (30) *zeigen, das Maximalvolumen wachsend gegen das Volumen der oberflächengleichen Kugel. Gleichzeitig konvergiert, wie die Gleichungen* (31), (32), (33), (34) *zeigen, die Meridiankurve gegen die Grenzgestalt eines auf der Rotationsachse ruhenden Halbkreises mit dem Radius der oberflächengleichen Kugel.*

Qualitativ ähnelt also der extremale Rotationsring bei verschwindendem ϱ mehr und mehr einer oberflächengleichen Kugel mit einem um einen Durchmesser rotationssymmetrischen Bohrloch, das im Innern die Gestalt eines

Zylinders mit dem Radius ϱ hat und an den beiden Enden sich mit stetiger Tangentialebene in die kugelähnliche Oberfläche umbiegt.

Jetzt kommen wir zur selben Aufgabe in der hyperbolischen Geometrie, wobei der Einfachheit halber das Krümmungsmaß gleich -1 gesetzt wird: Man erhält gemäß den an einer früheren Stelle [15]) abgeleiteten Formeln

$$dS^2 = \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} + \frac{dr^2}{r^2\cos^2\varphi}, \quad r > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad L = 2\pi \int_C \operatorname{tg}\varphi\, dS,$$

(35)
$$J = 2\pi \int_T \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r\cos^2\varphi}\, dr\, d\varphi,$$

wobei dS das Linienelement der hyperbolischen Meridianebene bedeutet, die Rotationsachse durch die Gleichung $\varphi = 0$ gegeben ist, C die einfache geschlossene Meridiankurve bezeichnet, T das von ihr umschlossene Gebiet und J das Volumen des Rotationsringes. Man setzte

(36)
$$u = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \qquad v = \log r.$$

Dann ist

(37)
$$du = \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

(38)
$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \cosh u.$$

Durch Differentiation von (38) ergibt sich bei Einführung von (37)

(39)
$$\operatorname{tg}\varphi = \sinh u$$

und nach Division dieser Gleichung durch (38)

(40)
$$\sin\varphi = \operatorname{tgh} u.$$

Man erhält in den neuen Koordinaten, wenn statt dS wieder ds geschrieben wird,

(41)
$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 u\, dv^2, \qquad L = 2\pi \int_C \sinh u\, ds,$$
$$J = 2\pi \int_T \sinh u \cosh u\, du\, dv,$$

wobei $u > 0$ die Entfernung von der Rotationsachse angibt.

---

[15]) Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 218 Gleichung (62), S. 220 (69), (70), (71): n ist in diesen Formeln gleich 3 zu setzen und dementsprechend E_{n-1} gleich π, während ds dort eine andere Bedeutung hat als in der vorliegenden Arbeit, und zwar durch die Gleichung

$$ds^2 = x^2 dS^2 = r^2\cos^2\varphi\, dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

definiert ist.

Wir haben also für diesen Fall

$$g(u) = \cosh u, \quad \sigma(u) = 2\pi \sinh u, \quad \tau(u) = 2\pi \sinh u, \tag{42}$$
$$\gamma(u) = \pi \sinh^2 u.$$

$$\mu(a,b) = \frac{\sinh^2 b - \sinh^2 a}{2 \sinh a \cosh a + 2 \sinh b \cosh b}, \tag{43}$$
$$\varkappa_0 = -\frac{\pi \sinh a \sinh b \,(\sinh b \cosh a + \cosh b \sinh a)}{\sinh a \cosh a + \sinh b \cosh b}.$$

Nun gilt

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta + \sinh\alpha \sinh\beta, \tag{44}$$
$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta + \cosh\alpha \sinh\beta,$$

$$\sinh 2\alpha = 2 \sinh\alpha \cosh\alpha, \quad \cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha, \tag{45}$$
$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1,$$

$$\cosh^2\alpha = \frac{1 + \cosh 2\alpha}{2}, \quad \sinh^2\alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}. \tag{46}$$

Die Einführung von (45) und (46) in (43) ergibt

$$\mu(a,b) = \frac{1}{2}\frac{\cosh 2b - \cosh 2a}{\sinh 2b + \sinh 2a} = \frac{1}{2}\frac{2\sinh(b+a)\sinh(b-a)}{2\sinh(b+a)\cosh(b-a)} = \frac{1}{2}\operatorname{tgh}(b-a). \tag{47}$$

Ebenso erhält man

$$\varkappa_0 = -\pi\frac{\sinh a \sinh b \sinh(b+a)}{\sinh(b+a)\cosh(b-a)} = -\frac{\pi \sinh a \sinh b}{\cosh(b-a)}, \tag{48}$$

$$\mu_a(a,b) = -\frac{1}{2\cosh^2(b-a)}, \quad \mu_b(a,b) = \frac{1}{2\cosh^2(b-a)}, \tag{49}$$

$$\frac{1}{\sigma(a)}\mu_a + \frac{1}{\sigma(b)}\mu_b = \frac{1}{4\pi\cosh^2(b-a)}\left(\frac{1}{\sinh b} - \frac{1}{\sinh a}\right) < 0, \tag{50}$$

$$\psi(u,\varkappa_0) = \frac{\pi \sinh^2 u + \varkappa_0}{2\pi \sinh u \cosh u} = \frac{\cosh(b-a)\sinh^2 u - \sinh a \sinh b}{2\cosh(b-a)\sinh u \cosh u}, \tag{51}$$

$$\mu(a,b)^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2 = \frac{4\pi^2\mu^2 \sinh^2 u \cosh^2 u - (\pi \sinh^2 u + \varkappa_0)^2}{4\pi^2 \sinh^2 u \cosh^2 u}.$$

Wegen $\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$ hat man daher

$$\mu^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2 = \frac{\pi^2(4\mu^2 - 1)\sinh^4 u + A_1 \sinh^2 u + A_2}{4\pi^2 \sinh^2 u \cosh^2 u},$$

wobei A_1 und A_2 nicht von u abhängen.

Da die linke Seite gemäß den Definitionen von $\varkappa_0$ und μ an den Stellen $u = a$ und $u = b$ verschwindet und aus (47)

$$1 - 4\mu^2 = \frac{1}{\cosh^2(b-a)}$$

folgt, so ergibt sich

$$\mu^2 - \psi(u,\varkappa_0)^2 = \frac{(\sinh^2 b - \sinh^2 u)(\sinh^2 u - \sinh^2 a)}{4\cosh^2(b-a)\sinh^2 u \cosh^2 u}. \tag{52}$$

Man setze zur Abkürzung

$$\sinh a = \alpha, \quad \sinh b = \beta \tag{53}$$

und mache die Substitution

$$\sinh u = t. \tag{54}$$

Dann erhält man

$$\mu L - 2\int_a^b \sqrt{\mu^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}\,\sigma(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tgh}(b-a)\,L - \frac{2\pi}{\cosh(b-a)}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(\beta^2 - t^2)(t^2 - \alpha^2)}}{1+t^2}\,dt, \tag{55}$$

$$S(a, b, \varkappa_0, \mu) = \int_a^b \frac{\mu\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{\mu^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}} = 2\pi\sinh(b-a)\int_\alpha^\beta \frac{t^2}{\sqrt{(\beta^2 - t^2)(t^2 - \alpha)^2}}\,dt, \tag{56}$$

und wegen (51)

$$V(a, b, \varkappa_0, \mu) = \int_a^b \frac{\psi(u, \varkappa_0)\,du}{g(u)\sqrt{\mu^2 - \psi(u, \varkappa_0)^2}} = \int_a^\beta \frac{\cosh(b-a)\,t^2 - \varkappa\beta}{(1+t^2)\sqrt{(\beta^2 - t^2)(t^2 - \alpha^2)}}\,dt, \tag{57}$$

$$L''(a, b, \varkappa_0, \mu) = 2\,S(a, b, \varkappa_0, \mu) + 2\,\sigma(a)\,g(a)\,V(a, b, \varkappa_0, \mu)$$

$$= 4\pi\int_a^\beta \frac{\sinh(b-a)\,t^2(1+t^2) + \varkappa\cosh a\,(\cosh(b-a)\,t^2 - \varkappa\beta)}{(1+t^2)\sqrt{(\beta^2 - t^2)(t^2 - \alpha^2)}}\,dt.$$

Der Zähler des letzten Integranden hat die Gestalt

$$\sinh(b-a)\,t^4 + Bt^2 - \alpha^2\beta\cosh a,$$

wobei B von t unabhängig ist. Da der Zähler wegen $\psi(a, \varkappa_0) = -\mu$ an der Stelle $u = a$, also $t^2 = \alpha^2$ verschwindet, so ist er gleich

$$(t^2 - \alpha^2)\,(\sinh(b-a)\,t^2 + \beta\cosh a).$$

Man hat also

$$L''(a, b) = 4\pi\int_\alpha^\beta \frac{(t^2\sinh(b-a) + \beta\cosh a)\sqrt{t^2 - \alpha^2}}{(1+t^2)\sqrt{\beta^2 - t^2}}\,dt. \tag{58}$$

Durch die Substitution $t = \beta\tau$ erhält man

$$L''(a, b) = 4\pi\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \frac{(\tau^2\beta\sinh(b-a) + \cosh a)\sqrt{\tau^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}}{\left(\tau^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\sqrt{1 - \tau^2}}\,d\tau. \tag{59}$$

Wegen $\beta = \sinh b$ zeigt die letzte Darstellung daß $L''(a\ b)$ bei festem a mit wachsendem b zunimmt. Jetzt wollen wir nachweisen, daß $L''(a, b)$ bei festem b mit wachsendem a abnimmt. Dazu genügt es, darzutun, daß der Zähler Z des Integranden auf der rechten Seite von (58) mit wachsendem a abnimmt. Nun ist bei Berücksichtigung der Ungleichung $\cosh b > \sinh b = \beta$

$$\frac{\partial}{\partial a}(t^2 \sinh(b-a) + \beta \cosh a) = -t^2 \cos(b-a) + \beta \sinh a$$

$$= \beta \sinh a + t^2 \beta \sinh a - t^2 \cosh b \cosh a < \beta(\sinh a - t^2(\cosh a - \sinh a)).$$

Für

$$t^2 \geqq \frac{\sinh(a)}{\cosh(a) - \sinh a} = \sinh a(\cosh a + \sinh a) = \alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha^2 \tag{60}$$

ist also $\frac{\partial}{\partial a}(t^2 \sinh(b-a) + \beta \cosh a) < 0$.

Genügt daher t^2 der Ungleichung (60), so nimmt der Zähler Z des Integranden (58) mit wachsendem a ab. Nun gilt aber auch

$$Z = t^2 \sinh(b-a)\sqrt{t^2-\alpha^2} + \beta\sqrt{(t^2-\alpha^2)(1+\alpha^2)},$$

und da der erste Summand mit wachsendem a sinkt, so ist das Fallen von Z mit wachsendem a sichergestellt, wenn

$$\frac{d}{d(\alpha^2)}(t^2-\alpha^2)(1+\alpha^2) = t^2 - 1 - 2\alpha^2 \leqq 0, \quad \text{also } t^2 \geqq 1 + 2\alpha^2 \tag{61}$$

ist. Da endlich wegen $\alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha^2 < 1 + 2\alpha^2$ mindestens eine der beiden Ungleichungen (60), (61) gelten muß, so ist der Nachweis dafür, daß $L''(a, b)$ mit wachsendem a abnimmt, erbracht. Hieraus folgt, indem wir a verschwinden lassen, bei Berücksichtigung der Gleichung $\sinh b = \beta$

$$L''(a, b) < 4\pi \int_0^\beta \frac{(t^2 \sinh b + \beta)\, t}{(1+t^2)\sqrt{\beta^2 - t^2}}\, dt = 4\pi\beta \int_0^\beta \frac{t\, dt}{\sqrt{\beta^2 - t^2}} = 4\pi\beta^2. \tag{62}$$

Nun folgt aus (50) und der Gleichung $\eta'(a, \varkappa_0) + \eta'(b, \varkappa_0) = 0$ auf Grund des Hilfssatzes IV § 16

$$V(a, b, \varkappa_0, \mu) > 0 \tag{63}$$

und mithin

$$\bar{L}(a, b) = L''(a, b) > L'(a, b). \tag{64}$$

Da gemäß (49) μ_a negativ und μ_b positiv bleibt, so ist kraft des Satzes X § 8 sichergestellt, daß für jedes Wertepaar a, b, $0 < a < b$ die lineare isoperimetrische Ungleichung Gültigkeit hat — und zwar für

$$L \geqq L''(a, b) \tag{65}$$

als genaue, nur von einer einzigen Kurve erreichte Schranke. Die lineare isoperimetrische Ungleichung hat gemäß (55) die Gestalt

$$(66) \qquad J \leqq \frac{1}{2}\operatorname{tgh}(b-a)\,L - \frac{2\pi}{\cosh(b-a)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(\beta^2-t^2)\,(t^2-\alpha^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

Ist

$$(67) \qquad L \leqq L''(a, b),$$

so kann die obige isoperimetrische Schranke durch eine kleinere ersetzt werden, wobei die hierzu im Euklidischen Fall gemachten Ausführungen bestehen bleiben.

Jetzt wenden wir uns der Aufgabe zu, bei gegebenem $\varrho > 0$ und gegebener Oberfläche L im Bereiche $\varrho \leqq u$ die Meridiankurve zu finden, welche das Maximalvolumen liefert.

Durch die Ungleichung (50) sind die Voraussetzungen des Satzes XXVI § 16 gegeben. Laut diesem wird das gesuchte Maximum von einer Extremalen erreicht, bei welcher $a = \varrho$ wird, und welche mit der Abstandskurve $u = \varrho$ ein endliches Stück, mit der Abstandskurve $u = b^*$ dagegen nur einen Punkt gemein hat, wobei b^* den zugehörigen Wert von b bezeichnet, d. h. also das Maximum von u auf der Extremalen. Diese letzte Eigenschaft ist, wie die am Schlusse des § 13 für G_b im Falle (B, 3) angegebene Formel zeigt, gleichbedeutend mit dem Verschwinden von $G_b(L, \varrho, b^*)$ oder mit der Gleichung

$$(68) \qquad L''(\varrho, b^*) = L.$$

Da nun, wie oben an der Hand der Darstellung (59) festgestellt, $L''(a, b)$ bei festem a mit wachsendem b zunimmt, so ist b^* durch die Gleichung (68) eindeutig bestimmt. *Das Extremum wird daher nur von einer einzigen Extremalen erreicht, oder mit anderen Worten, es gibt bei gegebenem $\varrho > 0$ und gegebener Oberfläche L nur einen einzigen Rotationsring von maximalem Volumen.* Man erhält für dieses Maximalvolumen gemäß (66)

$$(69) \qquad J = \frac{1}{2}\operatorname{tgh}(b^*-\varrho)\,L - \frac{2\pi}{\cosh(b^*-\varrho)} \int_{\sinh\varrho}^{\sinh b^*} \frac{\sqrt{(\sinh^2 b^* - t^2)\,(t^2-\sinh^2\varrho)}}{1+t^2}\,dt.$$

Für die Länge $l - s_3$ des Stückes, welches die Meridiankurve mit der Abstandskurve $u = \varrho$ gemein hat, erhält man wie im Euklidischen Fall gemäß (57)

$$(70) \qquad l - s_3 = 2\,g(\varrho)\,V(\varrho, b^*, \varkappa_0, \mu)$$

$$= 2\cosh\varrho \int_{\sinh\varrho}^{\sinh b^*} \frac{(\cosh(b^*-\varrho)\,t^2 - \sinh\varrho\sinh b^*)\,dt}{(1+t^2)\sqrt{(\sinh^2 b^* - t^2)\,(t^2-\sinh^2\varrho)}},$$

wobei das positive Vorzeichen der rechten Seite durch (63) gesichert ist. Die beiden symmetrischen Extremalbögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$

werden endlich gemäß § 6 (6), (7), (8), (9) bei Berücksichtigung der Umformung, welche zu (57) geführt hat, durch die folgenden Formeln gegeben:

$$(71)\quad \text{für } 0 < s < s_1 \qquad v = v(0) + \int_{\sinh\varrho}^{\sinh u} \frac{(t^2 \cosh(b^* - \varrho) - \sinh\varrho \sinh b^*)\, dt}{(1+t^2)\sqrt{(\sinh^2 b^* - t^2)(t^2 - \sinh^2\varrho)}},$$

$$(72)\qquad s_1 = s_2, \quad v(s_2) = v(s_1) = v_0 + V(\varrho, b^*, \varkappa_0, \mu),$$

$$(73)\quad \text{für } s_2 < s < s_3 \qquad v = v(s_2) + \int_{\sinh u}^{\sinh b^*} \frac{(t^2 \cosh(b^* - \varrho) - \sinh\varrho \sinh b^*)\, dt}{(1+t^2)\sqrt{(\sinh^2 b^* - t^2)(t^2 - \sinh^2\varrho)}},$$

$$v(s_3) = v(s_2) + V(\varrho, b^*, \varkappa_0, \mu).$$

Aus (68) und (62) folgt

$$(74)\qquad b^* > b_0,$$

wobei b_0 durch die Gleichung

$$(75)\qquad 4\pi \sinh^2 b_0 = L$$

definiert ist und mithin den Radius der oberflächengleichen Kugel angibt[16]). Da, wie oben festgestellt, die Funktion $L''(a, b)$ bei festem a mit wachsendem b und bei festem b mit fallendem a wächst, so folgt aus der Gleichung (68), daß b^* mit fallendem ϱ abnimmt. Wegen (74) konvergiert daher b^* mit verschwindendem ϱ gegen einen gewissen Grenzwert nicht unterhalb b_0. Wie die Rechnung, die auf Grund von (58) zur Ungleichung (62) geführt hat, unmittelbar zeigt, ist dieser Grenzwert gleich b_0. Aus $\varrho \to 0$ folgt also $b^* \to b_0$. Die Einführung dieser Grenzwerte in (69) ergibt bei Berücksichtigung von (75)

$$J \to 2\pi \operatorname{tgh} b_0 \sinh^2 b_0 - \frac{2\pi}{\cosh b_0} \int_0^{\sinh b_0} \frac{\sqrt{\sinh^2 b_0 - t^2}}{1+t^2}\, t\, dt.$$

Bei der Substitution

$$(75')\qquad \sqrt{\sinh^2 b_0 - t^2} = y$$

erhält man

$$\int_0^{\sinh b_0} \frac{\sqrt{\sinh^2 b_0 - t^2}}{1+t^2}\, t\, dt = \int_0^{\sinh b_0} \frac{y^2\, dy}{\cosh b_0^2 - y^2}$$

$$= \int_0^{\sinh b_0} \left\{-1 + \frac{\cosh b_0}{2}\left(\frac{1}{\cosh b_0 + y} + \frac{1}{\cosh b_0 - y}\right)\right\} dy$$

$$= -\sinh b_0 + \frac{\cosh b_0}{2} \log \frac{\cosh b_0 + \sinh b_0}{\cosh b_0 - \sinh b_0}$$

$$= b_0 \cosh b_0 - \sinh b_0.$$

---

[16]) Siehe z. B. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 221, Gleichung (75), n ist dabei gleich 3 zu setzen und dementsprechend $E_n = \frac{4}{3}\pi$.

Man hat also

$$J \to 2\pi \frac{\sinh^3 b_0 + \sinh b_0}{\cosh b_0} - 2\pi b_0 = 2\pi \sinh b_0 \cosh b_0 - 2\pi b_0 = \pi(\sinh 2b_0 - 2b_0). \tag{76}$$

Nun ist wegen (45), (46)

$$\frac{d}{db_0}\pi(\sinh 2b_0 - 2b_0) = 4\pi \sinh^2 b_0,$$

$$\pi(\sinh 2b_0 - 2b_0) = 4\pi \int_0^{b_0} \sinh^2 x\, dx. \tag{77}$$

Der letzte Ausdruck stellt aber das Volumen der Kugel mit dem Radius b_0 dar [17]). Bei Berücksichtigung von (75) *sehen wir daher, daß in der Tat, wie zu erwarten war, das Maximalvolumen des Rotationsringes bei verschwindendem ϱ gegen das Volumen der oberflächengleichen Kugel konvergiert — und zwar aus demselben Grunde wie beim Euklidischen Falle — wachsend.*

Durch Einführung der Grenzwerte in (70) erhält man für $\varrho \to 0$ bei der Substitution (75′)

$$l - s_3 \to 2\cosh b_0 \int_0^{\sinh b_0} \frac{1}{1+t^2} \frac{t\,dt}{\sqrt{\sinh^2 b_0 - t^2}} \tag{78}$$

$$= \int_0^{\sinh b_0} \frac{2\cosh b_0}{\cosh^2 b_0 - y^2}\, dy = \log\left(\frac{\cosh b_0 + \sinh b_0}{\cosh b_0 - \sinh b_0}\right) = 2b_0.$$

Endlich erhält man aus (71) auf dem Bogen $0 \leqq s \leqq s_1$ für $\varrho \to 0$ bei derselben Substitution

$$v - v(0) \to \cosh b_0 \int_0^{\sinh u} \frac{1}{1+t^2} \frac{t\,dt}{\sqrt{\sinh^2 b_0 - t^2}} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}^{\sinh b_0} \frac{2\cosh b_0}{\cosh^2 b_0 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cosh b_0 + \sinh b_0}{\cosh b_0 - \sinh b_0}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cosh b_0 + \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}{\cosh b_0 - \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}\right), \tag{79}$$

$$v - v(0) - b_0 \to -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\cosh b_0 + \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}{\cosh b_0 - \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}\right).$$

$$e^{v-(v(0)+b_0)} \to \frac{\sqrt{\cosh b_0 - \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}}{\sqrt{\cosh b_0 + \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}},$$

$$e^{(v(0)+b_0)-v} \to \frac{\sqrt{\cosh b_0 + \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}}{\sqrt{\cosh b_0 - \sqrt{\sinh^2 b_0 - \sinh^2 u}}}, \tag{80}$$

$$\cosh\left[v - (v(0) + b_0)\right] = \frac{e^{v-(v(0)+b_0)} + e^{(v(0)+b_0)-v}}{2} \to \frac{\cosh b_0}{\cosh u}.$$

---

[17]) Siehe z. B. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 221, Gleichung (75), n ist dabei gleich 3 zu setzen und dementsprechend $E_n = \frac{4}{3}\pi$.

Da die beiden Bögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ sich an der Geraden $v = v(s_2) = v(s_1)$ spiegeln, und da wegen (72) (78), (70) $v(s_1)$ gegen $v(0) + b_0$ konvergiert, so gilt die Gleichung (80) auch auf dem Bogen $s_2 < s < s_3$. Gemäß dem Kosinussatz im rechtwinkligen Dreieck[18]) besagt nun diese Gleichung, daß die Entfernung des Kurvenpunktes u, v vom festen Punkt 0, $v(0) + b_0$ konstant gleich b_0 ist. *Die Grenzgestalt der Meridiankurve bei verschwindendem ϱ wird also in der Tat, wie zu erwarten war, durch einen auf der Rotationsachse ruhenden Halbkreis mit dem Radius der oberflächengleichen Kugel dargestellt.*

§ 22.

Die Konsequenzen der Identifizierung der Punkte u, v und $u, v + 2\pi$.

[19]) Handelt es sich um eine Rotationsfläche oder um Polarkoordinaten auf einer beliebigen Fläche, so bedeutet v einen Winkel, und es sind dann die Punkte u, v und $u, v + 2\pi$ zu identifizieren. Diejenige Fläche, welche aus der gegebenen durch Aufhebung der Identifizierung entsteht, wird als Überlagerungsfläche bezeichnet. Zwei Punkte der Überlagerungsfläche, welche einem und demselben Punkt der gegebenen Fläche entsprechen, deren u-Koordinaten also miteinander übereinstimmen, während die v-Koordinaten sich um ein ganzes Vielfaches von 2π unterscheiden, sollen kongruent heißen. Zunächst ist es klar, daß jede einfache Kurve auf der gegebenen Fläche auch auf der Überlagerungsfläche einfach bleibt, aber nicht umgekehrt, und daß jede geschlossene Kurve auf der Überlagerungsfläche auch auf der gegebenen Fläche geschlossen bleibt, aber nicht umgekehrt. Man bezeichne nun als Kurven erster Art solche Kurven, welche auf beiden Flächen einfach und geschlossen sind, als zweiter Art solche, welche auf der Überlagerungsfläche einfach und geschlossen sind, aber auf der gegebenen geschlossen und nicht einfach, zur dritten Art rechne man endlich diejenigen Kurven, welche auf der gegebenen Fläche einfach und geschlossen sind und auf der Überlagerungsfläche einfach und nicht geschlossen.

Es bezeichne nun C^* eine Kurve auf der gegebenen Fläche und C eine ihr entsprechende auf der Überlagerungsfläche. Dann sollen zwei Punkte der gegebenen Fläche als verbindbar bezeichnet werden, wenn sie auf einem stetigen C^* nicht schneidenden Wege ineinander übergeführt werden können. Ebenso sollen zwei Punkte der Überlagerungsfläche, welche beide nicht auf C oder einer der zu C kongruenten Kurven liegen, verbindbar genannt werden,

---

[18]) Man berücksichtige, daß die Rotationsachse $u = 0$ eine hyperbolische Gerade ist, auf welcher wegen $g(0) = 1$ $ds = dv$ ist.

[19]) Die topologischen Ausführungen, welche diesen Paragraphen einleiten, erheben natürlich nicht den Anspruch, etwas Neues zu bringen. Sie sollen lediglich dazu dienen, dem Leser die Übersicht zu erleichtern.

wenn sie auf einem stetigen Wege ineinander übergeführt werden können, der weder C noch eine der zu C kongruenten Kurven schneidet. Nun entsprechen offenbar zwei verbindbaren Punkten auf der Überlagerungsfläche zwei verbindbare Punkte auf der gegebenen Fläche. Sind umgekehrt A^* und B^* zwei verbindbare Punkte auf der gegebenen Fläche, und ist A ein beliebiger A^* entsprechender Punkt der Überlagerungsfläche, so gibt es auf dieser einen B^* entsprechenden und mit A verbindbaren Punkt B.

Man mache jetzt die Voraussetzung, daß C eine Kurve erster Art ist, bezeichne auf der Überlagerungsfläche das Innere von C mit T_C und den abgeschlossenen Bereich, der aus dem offenen Gebiet T_C durch Hinzufügung von C selbst entsteht, mit $\overline{T}_C$. Es möge nun C' eine zu C kongruente Kurve bezeichnen und $T_{C'}$ und $\overline{T}_{C'}$ die entsprechenden Bereiche. Dann sind auf C' jedenfalls Punkte vorhanden, die im Äußeren von C liegen, C' kann ferner C nicht schneiden, weil sonst C^* nicht einfach wäre. Also liegt C' und mithin auch $\overline{T}_{C'}$ ganz im Äußeren von C. $\overline{T}_C$ und $\overline{T}_{C'}$ sind daher punktfremd. Da das für alle zu $\overline{T}_C$ kongruenten Bereiche gilt, so enthält $\overline{T}_C$ kein Paar kongruenter Punkte. Es mögen nun auf der gegebenen Fläche die Kurve C^* und die Bereiche $T^*_{C^*}$ und $\overline{T}^*_{C^*}$ der Kurve C und den Bereichen T_C und $\overline{T}_C$ entsprechen. Dann sind, da je zwei Punkte von T_C verbindbar sind, auch je zwei Punkte von $T^*_{C^*}$ verbindbar, und da auf der Überlagerungsfläche je zwei Punkte, welche weder $\overline{T}_C$ noch einem der zu $\overline{T}_C$ kongruenten Gebiete angehören, verbindbar sind, so sind auf der gegebenen Fläche je zwei nicht zu $\overline{T}^*_{C^*}$ gehörende Punkte verbindbar. Endlich kann auf der gegebenen Fläche ein zu $T^*_{C^*}$ gehörender Punkt mit einem nicht zu $\overline{T}^*_{C^*}$ gehörenden Punkt nicht verbindbar sein, weil sonst auf der Überlagerungsfläche ein zu T_C gehörender Punkt mit einem nicht zu T_C gehörenden verbindbar sein müßte. C^* zerlegt also die gegebene Fläche ebenfalls in zwei Gebiete. Dabei ist $\overline{T}^*_{C^*}$ beschränkt und abgeschlossen und C^* bildet die vollständige Umgrenzung von $\overline{T}^*_{C^*}$. Ferner ist, da $\overline{T}_C$, wie oben festgestellt, keine kongruenten Punkte enthält, $\overline{T}^*_{C^*}$ eindeutig, eindeutig umkehrbar und stetig auf $\overline{T}_C$ abgebildet.

Bei Beschränkung auf Kurven erster Art ist daher die isoperimetrische Aufgabe auf der gegebenen Fläche identisch mit der isoperimetrischen Aufgabe auf der Überlagerungsfläche.

Es sei nun C^* eine Kurve dritter Art auf der gegebenen Fläche, A^* ein Punkt auf ihr und A ein ihm entsprechender Punkt auf der Überlagerungsfläche. Dann entspricht einem von A^* ausgehenden Umlauf um C^* in der Überlagerungsfläche ein einfacher offener Kurvenbogen C, der von A nach einem ihm kongruenten Punkte B führt. B entstehe aus A durch Vermehrung von v um $2\varkappa\pi$ ($\varkappa$ ganz). Man kann annehmen, daß $\varkappa \geqq 1$ ist. Wir werden später nachweisen, daß aus der gemachten Voraussetzung, daß C^* einfach ist, folgt,

daß $\varkappa = 1$ ist. Zunächst benötigen wir aber dieser Einsicht noch nicht. Der Kurvenbogen C bildet mit allen aus ihm durch Vermehrung oder Verminderung von v um ganze Vielfache von $2\varkappa\pi$ entstehenden Kurvenbögen eine offene Linie auf welcher u ein endliches Maximum und ein endliches Minimum besitzt, während v bei Durchlaufung der Linie von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Diese Linie mag mit $\bar{C}$ bezeichnet werden. Durch eine Transformation mit reziprokem Radius von einem nicht auf $\bar{C}$ liegenden Punkte aus geht $\bar{C}$ in eine einfache, geschlossene Jordankurve über. Daher zerlegt $\bar{C}$ die Überlagerungsfläche in zwei Gebiete miteinander verbindbarer Punkte. Es sei nun P ein nicht auf $\bar{C}$ liegender Punkt. Durchläuft dann der Punkt Q die Linie $\bar{C}$ etwa in dem von A nach B führenden Sinne, so soll in der Euklidischen (u, v)-Ebene der Winkel, den der Strahl PQ beschreibt, als Charakteristik von P bezeichnet werden. Die Charakteristik kann offenbar nur ein ungerades Vielfaches von π sein, und da sie sich mit P stetig ändert, so ist sie in jedem der beiden Gebiete, in welche die Überlagerungsfläche durch $\bar{C}$ zerlegt wird, konstant. Bezeichnet nun m das Maximum und μ das Minimum von u auf $\bar{C}$, so kann die Charakteristik eines Punktes, in welchem $u \geqq m$ ist, offenbar nur $\pm\pi$ sein. Dann aber ist sie für einen Punkt, in welchem $u \leqq \mu$ ist $\mp\pi$. Daher gehören alle Punkte, in welchen $u \geqq m$ ist, dem einen Gebiete an, das wir das obere nennen, und alle Punkte, in welchen $u \leqq \mu$ ist, dem anderen, das wir das untere nennen.

Jetzt wollen wir die oben gemachte Behauptung beweisen, daß $\varkappa = 1$ ist. $\bar{C}'$ sei diejenige Kurve, welche aus $\bar{C}$ durch Vermehrung von v um 2π hervorgeht. Q'_m bezeichne einen Punkt von $\bar{C}'$, in welchem $u = m$ ist und Q'_μ einen Punkt von $\bar{C}'$, in welchem $u = \mu$ ist. Lägen nun weder Q'_m noch Q'_μ auf $\bar{C}$, so müßte Q'_m dem oberen Gebiet von $\bar{C}$ angehören, und Q'_μ dem unteren, und daher müßte der zwischen Q'_m und Q'_μ liegende Bogen von $\bar{C}'$ sich mit $\bar{C}$ schneiden. $\bar{C}$ und $\bar{C}'$ haben also jedenfalls Schnittpunkte. Es sei nun P_1 mit den Koordinaten u_1, v_1 ein solcher Schnittpunkt. Dann liegen sowohl der Punkt P_1 als auch der Punkt P_2 mit den Koordinaten u_2, v_2,

$$u_2 = u_1, \quad v_2 = v_1 - 2\pi,$$

auf $\bar{C}$. Daher liegt auch auf dem von A nach B führenden Bogen C von $\bar{C}$ ein Punkt P_1'' mit den Koordinaten u_1, $v_1 + n_1\varkappa 2\pi$ und ein Punkt P_2'' mit den Koordinaten $u_2 = u_1$, $v_1 + (n_2\varkappa - 1)2\pi$, wobei n_1 und n_2 ganze Zahlen bedeuten. Wäre also $\varkappa > 1$, so wären P_1'' und P_2'' zwei verschiedene, aber kongruente auf dem Bogen AB gelegene Punkte und mindestens einer von ihnen müßte ein innerer Punkt des Bogens sein. Das aber widerspricht der Voraussetzung, daß C^* einfach ist. Damit ist bewiesen, daß $\varkappa = 1$ ist. Daher geht die Kurve $\bar{C}$ bei Verschiebung von 2π in sich selber über und mithin auch jedes der beiden Gebiete, in welche die Überlagerungsfläche durch sie zerlegt wird. Daher gibt es auch kein kongruentes Punktepaar, dessen einer Punkt

dem einen und dessen anderer Punkt dem anderen Gebiete angehört. Also sind die diesen beiden Gebieten der Überlagerungsfläche auf der gegebenen Fläche entsprechenden beiden Gebiete zueinander punktfremd. Ferner schließt man wie oben, daß je zwei Punkte eines und desselben dieser beiden Gebiete verbindbar sind, während die beiden Gebiete voneinander durch C^* getrennt werden. Also zerlegt C^* die gegebene Fläche ebenfalls in zwei aus miteinander verbindbaren Punkten bestehende Gebiete, das obere, welches alle Punkte enthält, in denen $u \geqq m$ ist, und das untere, welches alle Punkte enthält, in denen $u \leqq \mu$ ist.

Im Gegensatz zum Sachverhalt bei Kurven erster Art ist aber jetzt keines dieser beiden Gebiete beschränkt, von C^* vollständig umgrenzt und singularitätenfrei. Betrachten wir nämlich etwa das obere Gebiet. Ist dann die gegebene Fläche nach oben durch eine Ungleichung von der Gestalt $u \leqq \beta_1$ begrenzt, so wird, da $g(u)$ durchweg als > 0 vorausgesetzt ist, das obere Gebiet durch die beiden Kurven C^* und $u = \beta_1$ begrenzt. Ist aber die gegebene Fläche nach oben durch eine Ungleichung von der Gestalt $u < \beta$ begrenzt, so ist das Gebiet für $\beta = \infty$ nicht beschränkt, während es bei endlichem β nicht als singularitätenfrei betrachtet werden kann. Auch in dem Falle, daß $g(u)$ mit $\beta - u$ gegen Null konvergiert, daß es sich also um Polarkoordinaten handelt, wirkt der Pol des Koordinatensystems als Singularität, indem in unseren Formeln $g(u)$ im Nenner von $\psi(u, \varkappa)$ auftritt.

Die isoperimetrische Aufgabe für Kurven dritter Art bedarf also jedenfalls einer abgeänderten Fassung, wie sie am Ende dieses Paragraphen gegeben werden wird.

Die isoperimetrische Aufgabe für Kurven erster Art behandeln wir dagegen zunächst auf der Überlagerungsfläche. Dann bleiben alle in den vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Ungleichungen unverändert bestehen. Denn durch die einzig neu hinzukommende Forderung des Ausschlusses der Kurven zweiter Art wird ja nur die Gesamtheit derjenigen einfachen geschlossenen Kurven, für welchen diese allgemeingültigen Ungleichungen beansprucht werden, eingeschränkt. Wohl aber bedarf die Behauptung, daß die Schranke $G(L, a, b)$ genau ist, indem sie von einer und nur einer Kurve erreicht wird, einer gewissen Einschränkung, welche es unmöglich macht, daß die die Schranke erreichende Extremale eine Kurve zweiter Art ist. Da die Extremalen durch Spiegelung an einer Geraden $v = \text{const}$ in sich selber übergehen, und da gemäß Satz VII § 6 und der Gleichungen § 6 (6) und (8) v das Maximum und Minimum für $u = u_0$ erreicht, so wird die Extremale dann und nur dann eine Kurve zweiter Art, wenn die positiv genommene Differenz der beiden zu $u = u_0$ gehörenden Extremalwerte von v, also die Schwankung von v, die wir mit $D(L, a, b)$ bezeichnen wollen, den Wert 2π erreicht oder überschreitet. Es gilt nun der

Satz XXXVIII. *Die Schwankung $D(L, a, b)$ wächst bei festem a und b mit L monoton und stetig.*

Beweis. Es mögen auf den beiden symmetrischen Bögen $0 < s < s_1$ und $s_2 < s < s_3$ s' und s'' diejenigen Stellen bezeichnen, an welchen $u = u_0$ wird. Dann hat man gemäß den Aufführungens des § 6

$$(1)\quad D(L,a,b) = v(s'') - v(s') = \big(v(s'') - v(s_2)\big) + \big(v(s_2) - v(s_1)\big) + \\ + \big(v(s_1) - v(s')\big) = \big(v(s'') - v(s_3)\big) + \big(v(s_3) - v(0)\big) + v(0) - v(s').$$

Da a und b fest bleiben, setze man zur Abkürzung

$$(2)\qquad V(a,b,\varkappa,q) = V(\varkappa,q),$$

$$(3)\quad V'(\varkappa,q) = \int_a^{u_0} \frac{\psi(u,\varkappa)\,du}{g(u)\sqrt{q^2 - \psi(u,\varkappa)^2}}, \qquad V''(\varkappa,q) = \int_{u_0}^{b} \frac{\psi(u,\varkappa)\,du}{g(u)\sqrt{q^2 - \psi(u,\varkappa)^2}},$$

wobei u_0 durch die Gleichung

$$(4)\qquad \psi(u_0,\varkappa) = 0 \text{ oder gleichbedeutend } \gamma(u_0) + \varkappa = 0$$

als Funktion von $\varkappa$ gegeben ist. Man hat zunächst

$$(5)\qquad V(\varkappa,q) = V'(\varkappa,q) + V''(\varkappa,q)$$

$$(6)\qquad \frac{\partial u_0}{\partial \varkappa} = -\frac{1}{g(u_0)\,\tau(u_0)}.$$

Man erhält aus (1) gemäß § 6 (6), (8), (13), (14), (15), (19)

$$(7)\quad \text{beim Typus (A)} \qquad D(L,a,b) = -2V'(\varkappa_1,q_1) = 2V''(\varkappa_1,q_1),$$

$$(8)\quad \text{beim Typus (B, 1)} \qquad D(L,a,b) = -2V'\big(\varkappa_1,\psi(b,\varkappa_1)\big),$$

$$(9)\quad \text{beim Typus (B, 2)} \qquad D(L,a,b) = 2V''\big(\varkappa_1,-\psi(a,\varkappa_1)\big),$$

und wegen § 6 (22), (23), (34) bei Berücksichtigung von § 7 (3), (4), (5), (9), (10)

$$(10)\quad \text{beim Typus (B, 3)} \qquad D(L,a,b) = \frac{L - L'(a,b)}{\sigma(a)\,g(a) + \sigma(b)\,g(b)} - 2V'(\varkappa_0,\mu) \\ = \frac{L - L''(a,b)}{\sigma(a)\,g(a) + \sigma(b)\,g(b)} + 2V''(\varkappa_0,\mu).$$

Da beim Typus (B, 3) $\varkappa_0$ und μ und mithin auch u_0 nur von a und b und nicht von L abhängen, so ist die zu beweisende Behauptung beim Typus (B, 3) evident.

Beim Typus (B, 1) erhält man, da der Integrand des $V'(\varkappa, q)$ definierenden Integrals an der Stelle u_0 verschwindet und die Ableitung von u_0 nach $\varkappa$, gemäß (6) endlich ist, für einen inneren Punkt der Klasse (B, 1) wegen Satz XVII, § 12

$$(11)\qquad \frac{\partial D(L\,a,b)}{\partial L} = -2\left\{\int_a^{u_0} \frac{\partial}{\partial \varkappa_1}\left(\frac{\psi(u,\varkappa_1)}{g(u)\sqrt{\psi(b,\varkappa_1)^2 - \psi(u,\varkappa_1)^2}}\right)du\right\}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial L}.$$

Ebenso erhält man beim Typus (B, 2) für einen inneren Punkt der Klasse

$$\frac{\partial D(L,a,b)}{\partial L} = 2\left\{\int_{u_0}^{b} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\psi(u,x_1)}{g(u)\sqrt{\psi(a,x_1)^2-\psi(u,x_1)^2}}\right)du\right\}\frac{\partial x_1}{\partial L}. \tag{12}$$

Nun ist gemäß § 12 (21), (26) in den inneren Punkten der Klasse (B, 1)

$$\frac{\partial x_1}{\partial L} < 0 \tag{13}$$

und in den inneren Punkten der Klasse (B, 2)

$$\frac{\partial x_1}{\partial L} > 0, \tag{14}$$

während der Integrand auf den rechten Seiten von (11) und (12), wie bei der Herleitung der Ungleichungen § 15 (50) und (51) festgestellt worden ist, positiv bleibt.

Damit ist die zu beweisende Behauptung auch für die inneren Punkte der Klassen (B, 1) und (B, 2) als zutreffend festgestellt.

Beim Typus (A) hat man

$$\frac{1}{2}\frac{\partial D(L,a,b)}{\partial L} = \frac{\partial V''}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial L} + \frac{\partial V''}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial L}, \tag{15}$$

wobei die Ableitungen von x_1 und q_1 nach L gemäß § 12 (10) bestimmt sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x_1,q_1)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial L} + \frac{\partial S(x_1,q_1)}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial L} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial V(x_1,q_1)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial L} + \frac{\partial V(x_1,q_1)}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial L} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Determinante dieser Gleichungen, die wir mit Δ bezeichnen wollen, ist, wie bei der Diskussion der Gleichungen § 12 (10), deren Determinante übrigens $-\Delta$ ist, festgestellt worden ist, positiv. Man erhält bei Berücksichtigung von (5)

$$\frac{\partial D(L,a,b)}{\partial L} = \frac{\frac{\partial V''}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial q_1} - \frac{\partial V''}{\partial q_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\Delta} = \frac{\frac{\partial V''}{\partial x_1}\frac{\partial V'}{\partial q_1} - \frac{\partial V''}{\partial q_1}\frac{\partial V'}{\partial x_1}}{\Delta}. \tag{17}$$

Da der Integrand der V' und V'' definierenden Integrale, den wir zur Abkürzung mit $W(u, x_1, q_1)$ bezeichnen wollen, für $u = u_0$ verschwindet, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial x_1} &= \int_{a}^{u_0}\frac{\partial W}{\partial x_1}du, \quad \frac{\partial V''}{\partial x_1} = \int_{u_0}^{b}\frac{\partial W}{\partial x_1}du, \\ \frac{\partial V'}{\partial q_1} &= \int_{a}^{u_0}\frac{\partial W}{\partial q_1}du, \quad \frac{\partial V''}{\partial q_1} = \int_{u_0}^{b}\frac{\partial W}{\partial q_1}du. \end{aligned} \tag{18}$$

Nun ist, wie bei der Diskussion der Gleichungen § 12 (10) sich ausgerechnet findet,

$$(19)\quad \frac{\partial W}{\partial \varkappa_1} = \frac{q_1^3\,\sigma(u)}{\sigma(u)^3 g(u)^3 (q_1^2 - \psi(u,\varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{-q_1\,\psi(u,\varkappa_1)\,\sigma(u)}{\sigma(u)\,g(u)\,(q_1^2 - \psi(u,\varkappa_1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist daher in beiden Integrationsintervallen

$$(20)\quad \frac{\partial W}{\partial \varkappa_1} > 0,$$

während

$$(21)\quad \text{für } a \leqq u < u_0\ \frac{\partial W}{\partial q_1} > 0, \qquad \text{für } u_0 < u \leqq b\ \frac{\partial W}{\partial q_1} < 0$$

ist. Die Einführung dieser Ungleichungen in (18) und (17) ergibt, daß die zu beweisende Behauptung auch in der Klasse A zutrifft. Da endlich, wie aus Satz XXIII § 15 hervorgeht, bei festem a und b höchstens für zwei Werte von L der Punkt L, a, b auf dem Rande einer Klasse liegt, wobei Satz XVI, § 11 die Stetigkeit sichert, so ist der Satz XXXVIII vollständig bewiesen. Dabei lassen die obigen Ausführungen noch erkennen, daß die Funktion $D(L, a, b)$ auch in ihren drei Argumenten L, a, b stetig bleibt.

Satz XXXIX. Man setze

$$(22)\quad M_1 = \operatorname*{Min}_{a \leqq u \leqq b} (\sigma(u) g(u)), \qquad M_2 = \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq b} (\sigma(u) g(u)).$$

Dann gilt

$$(23)\quad 2\sqrt{\left(\int_a^b \sigma(u)\,du\right)^2 + M_1^2 D(L,a,b)^2} \leqq L \leqq 2\int_a^b \sigma(u)\,du + 2 M_2 D(L,a,b).$$

Beweis. Man hat

$$1 = \sqrt{\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + g(u)^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2} \leqq \left|\frac{du}{ds}\right| + g(u)\left|\frac{dv}{ds}\right|$$

und mithin gemäß § 1 (5)

$$(24)\quad L = \int_C \sigma(u)\,ds \leqq \int_C \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds + \int_C \sigma(u)\,g(u)\left|\frac{dv}{ds}\right| ds$$

$$\leqq \int_C \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds + M_2 \int_C \left|\frac{dv}{ds}\right| ds.$$

Ferner hat man

$$L = \int_C \sqrt{\sigma(u)^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \sigma(u)^2 g(u)^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\,ds$$

und mithin gemäß einer Ungleichung von SCHWARZ[20])

$$L^2 \geqq \Big(\int_C \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds\Big)^2 + \Big(\int_C \sigma(u)\, g(u)\left|\frac{dv}{ds}\right| ds\Big)^2 \tag{25}$$

$$\geqq \Big(\int_C \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds\Big)^2 + M_1^2\Big(\int_C \left|\frac{dv}{ds}\right| ds\Big)^2.$$

Nun erhält man auf Grund von Satz I § 1

$$\int_C \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds = \int_0^{s_1} \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds + \int_{s_2}^{s_3} \sigma(u)\left|\frac{du}{ds}\right| ds \tag{26}$$

$$= \int_0^{s_1} \sigma(u)\frac{du}{ds}\, ds + \int_{s_2}^{s_3} \sigma(u)\Big(-\frac{du}{ds}\Big) ds$$

$$= \int_0^{s_1} \sigma(u)\frac{du}{ds}\, ds + \int_{s_3}^{s_2} \sigma(u)\frac{du}{ds}\, ds = 2\int_a^b \sigma(u)\, du,$$

$$\int_C \left|\frac{dv}{ds}\right| ds = \int_{s'}^{s''} \left|\frac{dv}{ds}\right| ds + \int_{s''}^{s'+l} \left|\frac{dv}{ds}\right| ds,$$

wobei s' und s'' wie bei der Gleichung (1) des laufenden Paragraphen definiert sind, und l wie in § 1 (24) den Umfang von C bedeutet. Man hat weiter

$$\int_{s'}^{s''} \left|\frac{dv}{ds}\right| ds = \int_{s'}^{s''} \frac{dv}{ds}\, ds = v(s'') - v(s') = D(L, a, b), \tag{27}$$

$$\int_{s''}^{s'+l} \left|\frac{dv}{ds}\right| ds = \int_{s''}^{s'+l} \Big(-\frac{dv}{ds}\Big) ds = v(s'') - v(s'+l) = D(L, a, b).$$

Die Einführung von (26) und (27) in (24) und (25) ergibt die zu beweisende Ungleichung (23).

Wie die Ungleichung (23) zeigt, folgt aus

$$\begin{cases} L \to 2\int_a^b \sigma(u)\, du \\ D(L, a, b) \to 0 \end{cases} \tag{28}$$

und aus

$$\begin{cases} L \to \infty \\ D(L, a, b) \to \infty. \end{cases} \tag{29}$$

[20]) Für den Beweis vgl. z. B. meine schon zitierte Arbeit, Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 709.

Da ferner gemäß Satz XXXVIII $D(L, a, b)$ mit L monoton und stetig wächst, so hat die Gleichung

$$D(L^*, a, b) = 2\pi \tag{30}$$

stets eine und nur eine Lösung $L^*(a, b)$, und man hat wegen (23)

$$2\sqrt{\left(\int_a^b \sigma(u)\,du\right)^2 + 4\pi^2 M_1^2} \leqq L^*(a, b) \leqq 2\int_a^b \sigma(u)\,du + 4\pi M_2. \tag{31}$$

Die oben auseinandergesetzte Zurückführung der isoperimetrischen Aufgabe auf der mit der Identifizierung der Punkte u, v und $u, v + 2\pi$ behafteten Fläche auf die isoperimetrische Aufgabe auf der Überlagerungsfläche ergibt jetzt den

Satz XL. *Solange*

$$L < L^*(a, b) \tag{32}$$

bleibt, was a fortiori gesichert ist, solange

$$L < 2\sqrt{\left(\int_a^b \sigma(u)\,du\right)^2 + 4\pi^2 M_1^2} \tag{33}$$

bleibt, ändert die Identifizierung der Punkte u, v und $u, v + 2\pi$ an der in den vorangehenden Paragraphen durchgeführten Theorie der isoperimetrischen Aufgabe überhaupt gar nichts.

Ist aber

$$L \geqq L^*(a, b), \tag{34}$$

so behalten die isoperimetrischen Ungleichungen zwar ihre Gültigkeit, doch bleiben die durch sie gegegebenen Schranken nicht mehr genau.

Als Beispiel betrachte man etwa die klassische isoperimetrische Aufgabe auf einer Rotationsfläche. Dann erhält das Kriterium (33) die einfache Gestalt

$$L < 2\sqrt{(b-a)^2 + U^2}, \tag{35}$$

wobei U den Umfang des kleinsten Breitenkreises auf dem Flächenstück $a \leqq u \leqq b$ angibt.

Als weiteres Beispiel diene die klassische isoperimetrische Aufgabe in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie für einfache, geschlossene Kurven, welche in einen von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien a und b begrenzten Kreisring eingeschrieben sind. Und zwar sind dabei, wie schon in § 19 hervorgehoben, in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie nur diejenigen Kurven in Betracht zu ziehen, welche den Mittelpunkt des Kreisringes nicht im Innern enthalten, und in der sphärischen — nur diejenigen, welche die beiden Mittelpunkte des Kreisringes nicht voneinander trennen. In der Bezeichnungsweise des laufenden Paragraphen

heißt das, daß nur diejenigen Kurven zugelassen sind, welche in bezug auf das zugehörige Polarkoordinatensystem Kurven erster Art sind. Im § 19 ist die Herleitung der isoperimetrischen Ungleichungen und die Bestimmung der Extremalen für diesen Fall vollständig durchgeführt worden. Dort ist auch schon hinsichtlich der Ermittlung des kritischen Umfanges L^*, bei welchem die zugehörige Extremale aufhört eine Kurve erster Art zu sein, sondern in eine Kurve zweiter Art ausartet, indem vermöge der Identifizierung Selbstschnittpunkte entstehen, auf den laufenden Paragraphen verwiesen worden. Wie aus dem Satz XXXIV § 19 hervorgeht, tritt das offenbar erst dann ein, wenn der Typus (B, 3) vorliegt, und die beiden in den Kreisring eingeschriebenen, mit der konvexen Seite nach außen gekehrten Halbkreise sich von außen berühren. Da der Halbkreis $0 < s < s_1$ den Kreis $u = a$ an der Stelle $v = v(0)$ berührt und den Kreis $u = b$ an der Stelle $v = v(s_1)$ und mithin $v(0) = v(s_1)$ ist, und da s' der Stelle des Halbkreises entspricht, an welcher v das Minimum erreicht, so gibt $v(s_1) - v(s')$ den Winkel an, unter welchem der Halbkreis vom Mittelpunkt des Kreisringes aus gesehen wird. Betrachtet man nun das Dreieck, das vom Mittelpunkt des Halbkreises, dem Mittelpunkt des Kreisringes und dem Berührungspunkt der von letzterem an den Halbkreis gezogenen Tangente gebildet wird, so ergibt der Sinussatz in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie

$$\sin\left(v(s_1) - v(s')\right) = \frac{r}{t}, \quad \sin\left(v(s_1) - v(s')\right) = \frac{\sinh r}{\sinh t}, \tag{36}$$
$$\sin\left(v(s_1) - v(s')\right) = \frac{\sin r}{\sin t},$$

wobei $r = \frac{b-a}{2}$, $t = \frac{b+a}{2}$ zu setzen ist, und

$$v(s_1) - v(s') < \frac{\pi}{2} \tag{37}$$

zu nehmen ist.

Gemäß (1) hat man

$$D(L, a, b) = \left(v(s_2) - v(s_1)\right) + 2\left(v(s_1) - v(s')\right). \tag{38}$$

Gemäß § 6 (34), (22) ist

$$v(s_2) - v(s_1) = \frac{L - L''(a, b)}{g(a) + g(b)}, \tag{39}$$

und wegen § 19 (19), (43)

$$L''(a, b) = L_K\{r\}, \tag{40}$$

wobei $L_K\{r\}$ den Umfang des Kreises mit dem Radius r auf einer Mannigfaltigkeit mit der konstanten Krümmung K angibt. Bei Einführung der Gleichungen (38), (39), (40) in die $L^*(a, b)$ definierende Gleichung

$$D(L^*, a, b) = 2\pi \tag{41}$$

erhält man

$$(42) \qquad L^*(a,b) = L_K\{r\} + (g(a) + g(b))\{2\pi - 2(v(s_1) - v(s'))\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{|K|}},$$

so ergibt sich bei den betreffenden Polarkoordinaten in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie

$$(43) \qquad g(u) = u, \quad g(u) = \varrho \sinh \frac{u}{\varrho}, \quad g(u) = \varrho \sin \frac{u}{\varrho}.$$

Ebenso erhält man gemäß § 19 (43), (39), (40), (41) in den drei Geometrien

$$(44) \qquad L_0\{r\} = 2\pi r, \quad L_K\{r\} = 2\pi\varrho \sinh \frac{r}{\varrho}, \quad L_K\{r\} = 2\pi\varrho \sin \frac{r}{\varrho}.$$

Die Einführung von (36), (43), (44) in (42) ergibt die gesuchten Formeln, die in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie die folgende Gestalt haben.

$$(45) \qquad L^*(a,b) = 2\pi r + 2t\left(\pi + 2 \arccos \frac{r}{t}\right),$$

$$(46) \qquad L^*(a,b) = 2\pi\varrho \sinh \frac{r}{\varrho} + 2\varrho \sinh \frac{t}{\varrho} \cosh \frac{r}{\varrho} \left\{\pi + 2 \arccos\left(\frac{\sinh r}{\sinh t}\right)\right\},$$

$$(47) \qquad L^*(a,b) = 2\pi\varrho \sin \frac{r}{\varrho} + 2\varrho \sin \frac{t}{\rho} \cos \frac{r}{\varrho} \left\{\pi + 2 \arccos\left(\frac{\sin r}{\sin t}\right)\right\},$$

wobei für den arc cos der Wert zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist.

Zum Schluß kommen wir zur isoperimetrischen Aufgabe für Kurven dritter Art, die wir uns etwa als einfache, geschlossene Kurven auf einer Rotationsfläche veranschaulichen, welche die Rotationsachse einmal umlaufen. Man suche also eine Kurve dritter Art C so zu bestimmen, daß bei gegebenem Werte L des Integrals § 1 (5) das Integral § 1 (6) zum Maximum wird, wobei man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, daß T etwa das untere der beiden Gebiete bezeichnet, in welche die Fläche durch die Kurve zerlegt wird. Ist das Integral über T nicht endlich, so muß T durch T_λ ersetzt werden, wobei T_λ denjenigen Teil von T bedeutet, auf welchem $u \geqq \lambda$ ist. Dabei ist offenbar, daß die Aufgabe von der Wahl von λ unabhängig bleibt; λ muß nur fest und so gewählt sein, daß auf C $u > \lambda$ bleibt. Diese Ersetzung von T durch T_λ nehmen wir, um die Singularität abzuschneiden, auch dann vor, wenn die ursprüngliche Aufgabe sie nicht fordert, indem das Integral über T endlich bleibt. Dann gelangt man auf dem Wege, der im § 1 zu der isoperimetrischen Fundamentalungleichung (25) führte, zu der isoperimetrischen Fundamentalungleichung, welche den in einen Streifen

$a \leqq u \leqq b$ eingeschriebenen Kurven dritter Art entspricht — und zwar in der folgenden etwas abgeänderten Gestalt:

$$J \leqq qL - 2\int_a^b \sqrt{q^2 - \psi(u,\varkappa)^2}\,\sigma(u)\,du - 2\pi\varkappa - 2\pi\gamma(\lambda), \tag{48}$$

wobei $\gamma(u)$, $\varkappa$, $\psi(u,\varkappa)$, q genau dieselbe Bedeutung haben wie im § 1.

Dabei fordert die Herleitung der Gleichung, daß $\lambda < a$ gewählt ist; im übrigen figuriert λ in der Ungleichung, wie zu erwarten war, ganz unwesentlich, indem es nur eine additive Konstante beeinflußt. An der Hand der Bestimmung des Minimums der majorisierenden Seite der Fundamentalungleichung als Funktion von $\varkappa$ und q verläuft nun die Theorie der isoperimetrischen Aufgabe für die Kurven dritter Art in der großen Linie ebenso, wie sie in den vorangehenden Paragraphen durchgeführt worden ist. Auf die mannigfachen Abweichungen im einzelnen, welche durch das Zusatzglied $-2\pi\varkappa$ bedingt werden, an dieser Stelle einzugehen, verbietet der Rahmen, welcher dem Umfang der vorliegenden Arbeit gesteckt ist.

Endlich darf noch erwähnt werden, daß die isoperimetrische Aufgabe in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie für einfache, geschlossene Kurven, welche in einen von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Kreisring dergestalt eingeschrieben sind, daß die beiden Kreise getrennt werden, bei Einführung des zugehörigen Polarkoordinatensystems offenbar auch unter die eben skizzierte Theorie fällt.

(Eingegangen am 31. Juli 1941.)

Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers.

Von

Max Deuring in Jena.

$f(x, y) = 0$ sei eine absolut irreduzible algebraische Gleichung mit rationalen Zahlkoeffizienten. Sie legt einen algebraischen Funktionenkörper $K = k(x, y)$ über dem Körper k der rationalen Zahlen als Konstantenkörper fest. Für zahlentheoretische Fragestellungen über algebraische Funktionen ist es wichtig, die folgende Frage zu untersuchen: Was wird aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ und aus dem Körper K, wenn wir sie modulo einer Primzahl p betrachten? Offenbar wird $f(x, y) \equiv 0 \bmod p$ eine Gleichung im Primkörper $\bar{k}$ der Charakteristik p. Wir zeigen, daß sie für fast alle p absolut irreduzibel ist und daher einen Funktionenkörper $\overline{K}$ der Charakteristik p definiert, der als Restklassenkörper modulo p von K angesehen werden kann. Wir untersuchen weiter, was bei dieser Reduktion aus den Divisoren, Divisorenklassen, Differentialen und linearen Divisorenscharen wird. Wir werden beweisen, daß sich unter der weiteren Voraussetzung, daß $\overline{K}$ das gleiche Geschlecht habe wie K — auch das ist für fast alle p der Fall —, jedem Divisor, jeder Klasse und jedem Differential von K ein Divisor, eine Klasse und ein Differential von $\overline{K}$ so zuordnen läßt, daß die Relationen zwischen ihnen erhalten bleiben. Ferner geht dabei jede lineare Schar ganzer Divisoren von K in eine Schar gleicher Dimension von $\overline{K}$ und im allgemeinen jede Vollschar in eine Vollschar über.

Wir behandeln allerdings die gestellte Aufgabe etwas allgemeiner, indem wir einen beliebigen Konstantenkörper k zugrunde legen, der durch einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ diskret bewertet ist. Darunter fällt auch ein Körper K, der von einem Parameter t algebraisch abhängt, wenn unter $\mathfrak{p}$ eine Spezialisierung $t \to t_0$ verstanden wird. Anders ausgedrückt, es liegt eine von t algebraisch abhängige algebraische Kurve vor, die für $t \to t_0$ in eine Grenzlage übergeht, deren Beziehungen zu der allgemeinen Kurve der Schar untersucht werden sollen. Die oben gemachten Voraussetzungen laufen darauf hinaus, daß die Kurve, wenn sie spezialisiert wird, irreduzibel bleiben und auch ihr Geschlecht nicht ändern soll. Wenn wir an die Möglichkeit denken, daß die Kurve in der Grenzlage reduzibel wird oder ihr Geschlecht ändert, so erhebt sich die Frage, wie die Dinge bei der Reduktion nach einer Primzahl liegen,

wenn $f(x, y) \equiv 0$ modulo p reduzibel wird oder wenn sich das Geschlecht verkleinert. Die Reduzibilität von $f(x, y)$ mod p läuft darauf hinaus, daß p in K nicht prim bleibt, sondern zerfällt, und die verschiedenen irreduziblen Bestandteile der Kurve in der Grenzlage entsprechen den Restklassenkörpern von K nach den Primfaktoren von p. Interessant wäre es zu beweisen, daß alle diese verschiedenen Restklassenkörper höchstens das gleiche Geschlecht haben wie K. Für die Grenzlagen von Kurven hat dies Severi [1]) auf algebraisch geometrischem Wege gezeigt. Die Methode ist aber auf Primzahlreduktionen nicht übertragbar.

1. k sei irgendein Körper, in dem durch eine Exponentenbewertung ein Primdivisor p gegeben ist. Im Ring k_0 der p-ganzen Elemente von k bilden die durch p teilbaren Elemente ein Primideal. Die Restklasse eines Elementes a von k_0 nach diesem Primideal bezeichnen wir mit $\bar{a}$ und den ganzen Restklassenkörper von k_0 mit $\bar{k}$.

Wir können p dadurch auf den Körper $k(x)$ der rationalen Funktionen einer Unbestimmten x in k ausdehnen, daß wir unter dem Exponenten einer rationalen Funktion

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_s x^s}$$

das Minimum der Exponenten aller a_ν vermindert um das Minimum der Exponenten aller b_ν verstehen. Daß auf diese Weise eine allerdings von der Wahl des erzeugenden Elementes x abhängige Bewertung p von $k(x)$ entsteht, ist nichts weiter als die Aussage des Gaussschen Satzes über die Inhalte von Polynomen. Die p-Restklasse $\bar{x}$ von x ist transzendent über $\bar{k}$ und daher ist der Restklassenkörper von $k(x)$ nach p der Körper der rationalen Funktionen von $\bar{x}$ in $\bar{k}$. Zu der gleichen Bewertung von K kommen wir, wenn wir $x_1 = \frac{1}{x}$ statt x (oder allgemeiner $x_1 = \frac{a x + b}{c x + d}$ mit zu p primer Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$) zugrunde legen.

K sei ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper k. Wir nehmen irgendein nichtkonstantes Element x von K, erklären p für $k(x)$ auf die beschriebene Weise und können diese Bewertung dann auf endlich viele Weisen auf den Körper K, der ja eine endliche algebraische Erweiterung von $k(x)$ ist, fortsetzen. Der Restklassenkörper $\bar{K}$ von K ist dann ein algebraischer Funktionenkörper von $\bar{x}$ mit einem $\bar{k}$ umfassenden Konstantenkörper.

[1]) Fr. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie, übersetzt von E. Löffler, Leipzig-Berlin 1921, Anhang F, Nr. 5, S. 319 ganz unten.

Wir sprechen von einer *Ausdehnung von p auf K hinsichtlich x.*

Im folgenden nehmen wir stets an, daß p in K prim bleibe, dann gilt $[\bar{K} : \bar{k}(\bar{x})] = [K : k(x)]$. Wir nehmen weiter stets an, daß p eine diskrete Bewertung sei. Ein Primelement π von p in k ist dann auch in K Primelement. In den beiden wichtigsten Fällen, wenn nämlich k ein endlicher algebraischer Zahl- oder Funktionenkörper einer Unbestimmten ist, ist diese Bedingung erfüllt, außerdem bleiben dann fast alle p in K prim, wie wir später zeigen werden.

2. $\mathfrak{M}$ sei ein k-Modul in K, also eine Menge von Elementen y des Körpers K mit der Eigenschaft, daß für $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ aus k $\varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, sobald y_1 und y_2 es tun. Die p-Reste der p-ganzen Elemente von $\mathfrak{M}$ bilden einen $\bar{k}$-Modul $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\bar{K}$. Wir zeigen:

Ein k-Modul $\mathfrak{M}$ der endlichen Dimension d von K geht modulo p in einen $\bar{k}$-Modul $\overline{\mathfrak{M}}$ der gleichen Dimension d über und es gibt eine Basis $y_1, \ldots, y_d$ von $\mathfrak{M}$, die in eine Basis $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_d$ von $\overline{\mathfrak{M}}$ übergeht[2]).

Beweis. $y_1, \ldots, y_d$ sei eine Basis von $\mathfrak{M}$. Wir können annehmen, daß sie aus p-primen Elementen besteht, da wir das nötigenfalls durch Multiplikation mit passenden Potenzen von π erreichen können. Sind die Reste $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_d$ linear unabhängig über $\bar{k}$, so bilden sie eine Basis von $\overline{\mathfrak{M}}$. Denn dann müssen für ein p-ganzes $y = \sum \varepsilon_\nu y_\nu$ auch die Koeffizienten ε_ν p-ganz sein und es folgt $\bar{y} = \sum_\nu \bar{\varepsilon}_\nu \bar{y}_\nu$. Wenn es nur $d - f$ linear unabhängige unter den $\bar{y}_\nu$ gibt, so gilt bei passender Numerierung eine Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_f \end{pmatrix} + \mathfrak{A}_1 \begin{pmatrix} y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_f \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit einer p-ganzen Matrix $\mathfrak{A}_1$ aus k und p-ganzen y'_ν.

$y'_1, \ldots, y'_f, y_{f+1}, \ldots, y_d$ bilden auch eine Basis von $\mathfrak{M}$. Gibt es unter ihnen nur $d - f'$ modulo p linear unabhängige, so gilt eine Gleichung

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{f'} \end{pmatrix} + \mathfrak{A}_2 \begin{pmatrix} y'_{f'+1} \\ \vdots \\ y'_f \\ y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} y''_1 \\ \vdots \\ y''_{f'} \end{pmatrix} \tag{2}$$

[2]) Es kommt bei diesem Satz nur darauf an, daß K eine Erweiterung von k und p eine in K prim bleibende diskrete Bewertung von k ist, nicht darauf, daß K algebraischer Funktionenkörper über k ist.

(bei passender Numerierung der y'). Setzen wir dies in die f' ersten Zeilen von (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{f'} \end{pmatrix} + \mathfrak{A}_{11} \begin{pmatrix} y_{f'+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \pi^2 \begin{pmatrix} y_1'' \\ \vdots \\ y_{f'}'' \end{pmatrix} - \mathfrak{A}_2 \pi \begin{pmatrix} y_{f'+1}' \\ \vdots \\ y_f' \\ y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$$

(3)

$$= \pi^2 \begin{pmatrix} y_1'' \\ \vdots \\ y_{f'}'' \end{pmatrix} - \mathfrak{A}_{21} \pi \begin{pmatrix} y_{f'+1}' \\ \vdots \\ y_f' \end{pmatrix} - \mathfrak{A}_{22} \pi \begin{pmatrix} y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\mathfrak{A}_{11}$ die Matrix aus den ersten f' Zeilen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_{21}$ die aus den ersten $f - f'$ Spalten von $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_{22}$ die aus den letzten $d - f$ Spalten von $\mathfrak{A}_2$. Ist $\mathfrak{A}_{12}$ die Matrix der $f - f'$ letzten Zeilen von $\mathfrak{A}_1$, so gilt

$$\begin{pmatrix} y_{f'+1} \\ \vdots \\ y_f \end{pmatrix} + \mathfrak{A}_{12} \begin{pmatrix} y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} y_{f'+1}' \\ \vdots \\ y_f' \end{pmatrix}.$$

Setzen wir das in (3) ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{f'} \end{pmatrix} + \mathfrak{A}_{21} \begin{pmatrix} y_{f'+1} \\ \vdots \\ y_f \end{pmatrix} + (\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{12} + \pi \mathfrak{A}_{22}) \begin{pmatrix} y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \pi^2 \begin{pmatrix} y_1'' \\ \vdots \\ y_{f'}'' \end{pmatrix},$$

für $f' = f$ einfach

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_f \end{pmatrix} + (\mathfrak{A}_1 + \pi \mathfrak{A}_2) \begin{pmatrix} y_{f+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \pi^2 \begin{pmatrix} y_1'' \\ \vdots \\ y_f'' \end{pmatrix}. \tag{4}$$

In dieser Weise können wir fortfahren. Wenn das Verfahren nicht abbräche, also nie zu einer Basis von $\mathfrak{M}$ führte, die auch modulo $\mathfrak{p}$ linear unabhängig wäre, so müßten die Zahlen $f, f', f'', \ldots$, die nie wachsen, von einer gewissen Stelle ab alle gleich und mindestens gleich 1 sein. (4) zeigt, daß wir dann zu einer $\mathfrak{p}$-adischen Relation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{f^{(m)}} \end{pmatrix} + (\mathfrak{B} + \pi^m \mathfrak{A}_{m+1} + \pi^{m+1} \mathfrak{A}_{m+2} + \cdots) \begin{pmatrix} y_{f^{(m)}+1} \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = 0$$

gelangten. Wenn wir zeigen können, daß $y_1, \ldots, y_d$ auch in der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung $k_\mathfrak{p}$ von k linear unabhängig sind, so wären wir damit auf

einen Widerspruch gestoßen und der Beweis ist beendet. Da p in K nicht zerfällt, so ist $[K k_p : k_p(x)] = [K : k(x)]$. Es sei nun

$$\sum_{i=1}^{d} c_i y_i = 0$$

eine lineare Relation, deren Koeffizienten c_i einem über k endlichen Teilkörper k^* von k_p angehören. k^* entstehe aus k durch Adjunktion der algebraisch unabhängigen Unbestimmten $u_1, \ldots, u_t$ und nachfolgende algebraische Erweiterung; $b_1, \ldots, b_m$ sei eine Basis von $k^*/k(u_1, \ldots, u_t)$. Es ist dann

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}(u)\, b_j$$

mit rationalen Funktionen h_{ij} der u. Da es auf einen gemeinsamen Faktor nicht ankommt, so können wir sie als Polynome annehmen. Die u_ν sind auch über K algebraisch unabhängig und die b_j linear-unabhängig über $K(u_1, \ldots, u_t)$, weil $[Kk^* : k^*(x)] = [K : k(x)]$ ist. Daher folgt aus

$$0 = \sum_{i=1}^{d} c_i y_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{d} y_i h_{ij}(u)\, b_j$$

zunächst

$$\sum_{i=1}^{d} y_i\, h_{ij}(u) = 0,$$

und daraus, wenn etwa

$$h_{ij}(u) = \sum \varepsilon_{ij\,l_1 \cdots l_t} u_1^{l_1} \ldots u_t^{l_t}$$

ist,

$$\sum_{i=1}^{d} y_i\, \varepsilon_{ij\,l_1 \cdots l_t} = 0,$$

also

$$\varepsilon_{ij\,l_1 \cdots l_t} = 0,$$

$$c_i = 0.$$

3. Wir wollen von jetzt ab voraussetzen, daß der Konstantenkörper von $\overline{K}$ genau $\bar{k}$ (und keine echte Erweiterung von k) ist. Später werden wir zeigen, daß auch diese Bedingung für Zahl- oder Funktionenkörper k von fast allen p erfüllt wird.

y sei ein von x ganzabhängiges Element von K. Geht sein Nenner in der t-ten Potenz des Nenners $\mathfrak{n}_x$ von x auf, so hängt yx^{-t} ganz von x^{-1} ab. Umgekehrt ist jedes Multiplum y von $\mathfrak{n}_x^{-t}$ von x ganzabhängig, während yx^{-t} von x^{-1} ganz abhängt. Da x-ganze Elemente modulo p in $\bar{x}$-ganze und x^{-1}-ganze in $\bar{x}^{-1}$-ganze übergehen, so schließen wir: *Jedes Multiplum von $\mathfrak{n}_x^{-t}$ geht modulo p in ein Multiplum von $\mathfrak{n}_{\bar{x}}^{-t}$ über.*

Für hinreichend großes t gibt es, $n = [K : k(x)]$ gesetzt, $nt - g + 1$ über k linear unabhängige Multipla von $\mathfrak{n}_x^{-t}$, wo g das Geschlecht von K bezeichnet. Da sie nach 2 in ebenso viele linear unabhängige Multipla von $\bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^{-t}$ übergehen, so folgt

Das Geschlecht $\bar{g}$ von $\bar{K}$ ist höchstens gleich dem Geschlecht g von K [3]).

Wenn $\bar{g} = g$ ist, so gehen alle Multipla von $\bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^{-t}$ aus solchen von $\mathfrak{n}_x^{-t}$ hervor, alle $\bar{x}$-ganzen Elemente von $\bar{K}$ aus x-ganzen Elementen von K und alle $\bar{x}^{-1}$-ganzen Elemente aus x^{-1}-ganzen.

Den Ring der von z ganz abhängigen Elemente von K bezeichnen wir mit K_z. Das letzte Ergebnis lautet dann einfach $\bar{K}_{\bar{z}} = \overline{K_z}$, $\bar{K}_{\bar{z}^{-1}} = \overline{K_{z^{-1}}}$.

4. *Wenn K und $\bar{K}$ das gleiche Geschlecht haben, so kann jedem Divisor $\mathfrak{a}$ von K ein Divisor $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\bar{K}$ zugeordnet werden, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$,
2. $\operatorname{grad} \bar{\mathfrak{a}} = \operatorname{grad} \mathfrak{a}$,
3. *Ist das p-prime Element $a \simeq \mathfrak{a}$, so ist auch $\bar{a} \simeq \bar{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Zunächst sei $\mathfrak{a}$ ganz. Zur Definition von $\bar{\mathfrak{a}}$ nehmen wir die natürliche Zahl t so groß, daß $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_x^t) > 2g - 1$ ist. Es gibt dann $nt + \operatorname{grad}\mathfrak{a} + 1 - g = d$ linear unabhängige Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_x^t}$ und die Schar $\mathfrak{S}$ dieser Multipla geht modulo p in eine Schar $\overline{\mathfrak{S}}$ von $\bar{K}$ der gleichen Dimension d über. Wir zeigen, daß $\overline{\mathfrak{S}}$ die Vollschar aller Multipla eines Divisors $\frac{1}{\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^t}$ ist, wo $\bar{\mathfrak{a}}$ einen ganzen Divisor vom gleichen Grad wie $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Zunächst ist unmittelbar klar, daß $\overline{\mathfrak{S}}$ in der Schar aller Multipla von $\frac{1}{\bar{\mathfrak{g}}}$ enthalten ist, wo $\bar{\mathfrak{g}}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner aller $\bar{y}$ aus $\overline{\mathfrak{S}}$ ist. In $\overline{\mathfrak{S}}$ kommen offenbar Elemente $\bar{y}$ mit dem genauen Nenner $\bar{\mathfrak{g}}$ vor. Da nun wegen $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{n}}_{\bar{y}} = (\bar{K} : \bar{k}(\bar{y})) \leqq (K : k(y)) = \operatorname{grad}\mathfrak{n}_y$ der Divisor $\bar{\mathfrak{g}}$ höchstens den Grad $nt + \operatorname{grad}\mathfrak{a} = d + g - 1$ hat, es aber andererseits wegen $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{g}} \geqq d - 1 > 2g - 2$ genau $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{g}} - g + 1$ linear unabhängige

---

[3]) Diese Überlegung kann auch in dem Fall angewendet werden, daß p in K ein Produkt $P_1^{e_1} \dots P_h^{e_h}$ von Primdivisoren wird, wenn jeder Restklassenkörper $\bar{K}_i = K/P_i$ den Konstantenkörper $\bar{k}$ hat. An Stelle von $\bar{K}$ tritt dann der Restklassenring K/p, der die direkte Summe der $K/P_i^{e_i}$ ist. Es ergibt sich dann für die Geschlechter g_i der K_i die Ungleichung

$$g - 1 \geqq \sum_{i=1}^{k} e_i (g_i - 1).$$

Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ gibt, so ist $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{g}} = nt + \operatorname{grad}\mathfrak{a}$. Es ist nun noch zu zeigen, daß $\bar{\mathfrak{g}}$ durch $\bar{\mathfrak{n}}_x^t$ teilbar ist. Es ist das gleiche, ob wir sagen: der ganze Divisor $\mathfrak{a}$ ist durch den ganzen Divisor $\mathfrak{b}$ teilbar, oder: alle Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{b}}$ sind auch Multipla von $\mathfrak{a}$. Es ist also zu zeigen, daß alle Multipla von $\bar{\mathfrak{n}}_x^t$ in $\bar{\mathfrak{S}}$ enthalten sind. Da jedes Multiplum von $\mathfrak{n}_x^t$ in $\mathfrak{S}$ liegt, so folgt dies aus dem in 3 bewiesenen.

Die gleiche Schlußweise zeigt, daß $\bar{\mathfrak{a}}$ nicht von der Wahl von t abhängt. $\bar{\mathfrak{a}}$ soll der *Rest* mod $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$ heißen. Es ist $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{a}} = \operatorname{grad}\mathfrak{a}$, weil ja $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{g}} = \operatorname{grad}\mathfrak{g}$ gilt. Ferner ist $\bar{\mathfrak{n}}_x = \bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}$, wie die Anwendung der Definition von $\bar{\mathfrak{a}}$ auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_x$ sofort zeigt.

Wir wollen zeigen, daß $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{a}}_2 = \overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}$ gilt. $\bar{y}_i$ sei ein Element mit dem genauen Nenner $\bar{\mathfrak{a}}_i\, \bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^{t_i}$, $i = 1, 2$. $\overline{y_i}$ ist Rest eines Elementes y_i mit dem genauen Nenner $\mathfrak{a}_i \mathfrak{n}_x^{t_i}$. $y_1 y_2$ ist ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{n}_x^{t_1+t_2}}$ und daher $\overline{y_1 y_2}$ eines von $\frac{1}{\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}\, \bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^{t_1+t_2}}$. Folglich geht der Nenner $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{a}}_2 \cdot \bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^{t_1+t_2}$ von $\bar{y}_1 \bar{y}_2$ in $\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} \cdot \bar{\mathfrak{n}}_{\bar{x}}^{t_1+t_2}$ auf und wegen $\operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{a}}_1 \bar{\mathfrak{a}}_2) = \operatorname{grad}\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}$ muß $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{a}}_2 = \overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}$ sein.

Für einen gebrochenen Divisor $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}$, $\mathfrak{a}_i$ ganz, erklären wir $\bar{\mathfrak{a}} = \frac{\bar{\mathfrak{a}}_1}{\bar{\mathfrak{a}}_2}$, die Regeln $\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \bar{\mathfrak{a}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{a}}_2$ und $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{a}} = \operatorname{grad}\mathfrak{a}$ gelten dann auch für gebrochene Divisoren.

Es bleibt noch zu zeigen, daß aus $a \equiv \mathfrak{a}, \bar{a} \neq 0, \infty, \bar{a} \equiv \bar{\mathfrak{a}}$ folgt. Wir schreiben $\mathfrak{a}$ als Quotienten $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}$ zweier ganzer Divisoren, deren Grade größer als $2g - 1$ sind, so daß wir, wenn wir $\bar{\mathfrak{a}}_1$ und $\bar{\mathfrak{a}}_2$ bilden wollen, $t = 0$ nehmen können. $\bar{z}_1$ sei ein Element mit dem Nenner $\bar{\mathfrak{a}}_1$, dessen Zähler $\bar{\mathfrak{z}}$ zu $\bar{\mathfrak{a}}_1 \bar{\mathfrak{a}}_2$ teilerfremd ist, das ist möglich, wenn nur $\bar{\mathfrak{a}}_1$ passend gewählt wird[4]). Als Multiplum von $\bar{\mathfrak{a}}_1^{-1}$ ist $\bar{z}_1$ Rest eines Multiplums z_1 von $\mathfrak{a}_1^{-1}$. $\mathfrak{z}'$ sei der Zähler von z_1. Er ist zu $\mathfrak{a}_1$ teilerfremd, weil der genaue Nenner von z_1 sonst ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$ und daher der genaue Nenner von $\bar{z}_1$ ein echter Teiler von $\bar{\mathfrak{a}}_1$ wäre. Nun ist aber $\frac{1}{\bar{z}_1}$ ein Multiplum von $\bar{\mathfrak{z}}_1^{-1}$, und da $\operatorname{grad}\bar{\mathfrak{z}}_1 = \operatorname{grad}\bar{\mathfrak{z}}$ ist, so folgt $\bar{\mathfrak{z}}_1 = \bar{\mathfrak{z}}$. $z_2 = a z_1$ hat den Divisor $\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{a}_2}$. Da $\bar{z}_2$ ein Multiplum von $\bar{\mathfrak{a}}_2^{-1}$ und $\bar{z}_2^{-1}$

---

[4]) Vgl. M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. II. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **183**, 25—36 (1940), § 1, 1. Wenn $\bar{k}$ unendlich viele Elemente hat, so ist der dortige Hilfssatz 1 anzuwenden. Hat $\bar{k}$ endlich viele Elemente, so wählen wir $\bar{\mathfrak{a}}_2$ als eine Potenz $\bar{\mathfrak{a}}_2 = \bar{\mathfrak{a}}_{20}^{q}$ des genauen Nenners $\bar{\mathfrak{a}}_{20}$ von $\mathfrak{a}$. Dann ist, unter $\mathfrak{a}_{10}$ den genauen Zähler von $\mathfrak{a}$ verstanden, $\bar{\mathfrak{a}}_2 = \bar{\mathfrak{a}}_{10}\, \bar{\mathfrak{a}}_{20}^{q-1}$ und der Zähler von $\bar{z}_1$ ist als zu $\bar{\mathfrak{a}}_{10} \bar{\mathfrak{a}}_{20}$ teilerfremder ganzer Divisor in der Klasse von $\bar{\mathfrak{a}}_1$ zu suchen. Ist n_0 der Grad von $\bar{\mathfrak{a}}_{10}$, so ist das nach dem a. a. O. Kleingedruckten möglich, sobald $q n_0 > 2g - 2 + 2n_0$, d. h. $q > 2\left(1 + \frac{g-1}{n_0}\right)$ ist.

eines von $\bar{\mathfrak{z}}_1^{-1} = \bar{\mathfrak{z}}^{-1}$ ist, $\bar{\mathfrak{z}}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ aber teilerfremd sind, so folgt, daß $\bar{z}_2$ den Divisor $\frac{\bar{\mathfrak{z}}}{\bar{\mathfrak{a}}_2}$ hat. Daher ist $\bar{\mathfrak{a}} = \frac{z_2}{z_1} \simeq \frac{\bar{\mathfrak{z}}}{\bar{\mathfrak{a}}_2} \cdot \frac{\bar{\mathfrak{a}}_1}{\bar{\mathfrak{z}}} = \bar{\mathfrak{a}}$, wie behauptet.

Schließlich merken wir noch folgendes an: *Wenn* $\mathfrak{p}$ *ein Primdivisor ersten Grades von* K *ist, für den* $x \equiv \xi \bmod \mathfrak{p}$ *mit konstantem,* p*-ganzem* ξ *gilt, so ergibt sich der Rest* $\bar{\mathfrak{p}}$ *eines* $\bar{x}$*-ganzen* $\bar{y}$ *aus dem Rest* $\bar{\mathfrak{p}}$ *eines zugehörigen* x*-ganzen* y *durch Restbildung nach* p: ist $y \equiv \eta \bmod \mathfrak{p}$, so ist $\bar{y} = \bar{\eta} \bmod \bar{\mathfrak{p}}$. Anders ausgedrückt: *Die Restbildungen* $\bmod \mathfrak{p}$ *und* $\bmod p$ *sind für* x*-ganze Elemente* y *vertauschbare Operationen.*

Beweis. Es ist $x - \xi \simeq \frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}_x}$ mit ganzem $\mathfrak{x}$, daraus folgt $\bar{x} - \bar{\xi} \simeq \frac{\bar{\mathfrak{x}}\,\bar{\mathfrak{p}}}{\bar{\mathfrak{n}}_x}$, und daher kann $\bar{\mathfrak{p}}$ nicht in $\bar{\mathfrak{n}}_x$ aufgehen. Aus $y - \eta \simeq \frac{\mathfrak{y}\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}_x^t}$ mit ganzem $\mathfrak{y}$ würde nun, wenn η nicht p-ganz wäre, const. $\simeq \frac{\bar{\mathfrak{y}}\,\bar{\mathfrak{p}}}{\bar{\mathfrak{n}}_x^t}$ folgen. Daher ist η p-ganz und es wird

$$\bar{y} - \bar{\eta} \simeq \frac{\bar{\mathfrak{y}}\,\bar{\mathfrak{p}}}{\bar{\mathfrak{n}}_x^t}, \quad \bar{y} \equiv \bar{\eta} \bmod \bar{\mathfrak{p}}.$$

Weiter zeigt die Schlußweise von **3**: *Wenn* $\operatorname{grad} \bar{\mathfrak{n}}_{\bar{y}} = \operatorname{grad} \mathfrak{n}_y$ *ist, so gilt*

$$\overline{K_y} = \overline{K}_{\bar{y}}.$$

Ferner: Ein Ideal $\mathfrak{i}$ von K_y besteht aus allen Multipla aller Divisoren $\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_y^{-n}$; $n = 1, 2, \ldots$, wo $\mathfrak{a}$ ein fester Divisor ist. *Modulo* p *geht* $\mathfrak{i}$ *in das* $\overline{K_y}$*-Ideal* $\bar{\mathfrak{i}}$ *über, das in gleicher Weise dem Divisor* $\bar{\mathfrak{a}}$ *zugeordnet ist.*

5. Der in **4** bewiesene Satz sagt, daß alle Divisoren einer Klasse C von K modulo p in Divisoren ein und derselben Klasse von $\overline{K}$ übergehen. Diese Klasse nennen wir den *Rest modulo* p *von* C und bezeichnen sie mit $\bar{C}$.

Wir nennen zwei Divisoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ von K *kongruent* $\bmod p$, in Zeichen

$$\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}_2 \bmod p,$$

wenn $\mathfrak{a}_1 = \bar{\mathfrak{a}}_2$. Entsprechend definieren wir Kongruenzen

$$C_1 \equiv C_2 \bmod p$$

zwischen Divisorenklassen.

$\mathfrak{D}$ sei die Gruppe der Divisoren von K, und $\mathfrak{D}_p$ die Untergruppe derjenigen Divisoren, die $\equiv 1 \bmod p$ sind. Dann ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_p$ eine Untergruppe der Divisorengruppe von $\overline{K}$. Ist $\mathfrak{E}$ die Hauptklasse und $\mathfrak{C}$ die Klassengruppe von K, so ist $\mathfrak{C}_p = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}_p$ die Untergruppe der Klassen, die $\equiv 1 \bmod p$ sind, und $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_p$ wird ein Teil der Klassengruppe von $\overline{K}$.

Nach **2** geht eine lineare Schar ganzer Divisoren von K modulo p in eine Schar ganzer Divisoren von $\overline{K}$ über und die Dimension der neuen Schar ist die gleiche wie die der ersten.

Daraus folgt weiter: *Wenn die Geschlechter von K und $\bar{K}$ gleich sind, und wenn $\bar{C}$ keine besondere Klasse ist (d. h. wenn* $\dim \bar{C} = \operatorname{grad} \bar{C} - g + 1$ *ist, also insbesondere für* $\operatorname{grad} \bar{C} > 2g - 2$*), so gilt das gleiche für C und die Vollschar der ganzen Divisoren von C geht modulo p in die Vollschar der ganzen Divisoren von $\bar{C}$ über.* Allgemeiner gilt dies, wenn sich der Speziellitätsindex von C beim Übergang zu $\bar{K}$ nicht vergrößert. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat $\bar{C}$ eine größere Dimension als C.

W sei die Differentialklasse von K. Für ihren Rest mod p gilt $\operatorname{grad} \bar{W} = 2g - 2$, $\dim \bar{W} \geqq g$. Wenn die Geschlechter von K und $\bar{K}$ gleich sind, so folgt daraus: *Die Differentialklasse von K geht* modulo p *in die Differentialklasse von $\bar{K}$ über.*

6. Wir wollen jetzt annehmen, daß sich $\bar{K}$ separabel erzeugen lasse und untersuchen, wie sich die Differentiale $v\,du$ von K verhalten, wenn wir sie modulo p betrachten.

Wenn $\bar{z}$ ein separierendes Element von $\bar{K}$ ist, so geht jeder relativ zu $\bar{k}$ ($\bar{x}$ inseparable Primdivisor von $\bar{K}$ in der Differente von $\bar{K}/\bar{k}(\bar{x})$ auf; es gibt daher unendlich viele separable Primdivisoren von $\bar{K}$. Sei $\bar{\mathfrak{p}}$ einer von ihnen, $\mathfrak{n}_t$ ein ganzer Divisor von K, dessen Grad größer als $2g - 2 + \operatorname{grad} \bar{\mathfrak{p}}$ ist, $\bar{t} \equiv \frac{\bar{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}}{\bar{\mathfrak{n}}_t}$ ein Multiplum von $\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{n}}_t^{-1}$ mit zu $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{n}}_t$ primem $\bar{\mathfrak{q}}$, und t ein Multiplum von $\mathfrak{n}_t^{-1}$ mit dem p-Rest $\bar{t}$. $\bar{t}$ ist separierend für $\bar{K}$, daher ist wegen $[K : k(t)] = [\bar{K} : \bar{k}(\bar{t})]$ auch t separierend für K. Ferner ergibt sich die in $\bar{k}$ irreduzible Gleichung $\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{t}) = 0$ für ein Element $\bar{u}$ von $\bar{K}$ aus der in k irreduziblen, p-primitiven Gleichung $\varphi(u, t) = 0$ durch Reduktion modulo p, so daß $\bar{\varphi}_{\bar{t}}(\bar{u}, \bar{t}) = \overline{\varphi_t(u,t)}$, $\bar{\varphi}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{t}) = \overline{\varphi_u(u,t)}$ und daher

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \frac{\overline{du}}{\overline{dt}} \tag{5}$$

gilt. $du = 0$ hat somit $d\bar{u} = 0$ zur Folge, mithin:

Wenn $\bar{u}$ separierend für $\bar{K}$ ist, so ist u separierend für K.

Ferner folgt aus (5) die Divisorengleichung:

$$\frac{\overline{\mathfrak{d}_u/\mathfrak{n}_u^2}}{\overline{\mathfrak{d}_{\bar{u}}/\mathfrak{n}_{\bar{u}}^2}} = \frac{\overline{\mathfrak{d}_t}}{\overline{\mathfrak{d}_{\bar{t}}}}. \tag{6}$$

Nun ist aber $\overline{\mathfrak{d}_t} = \bar{\mathfrak{d}}_{\bar{t}}$: $\mathfrak{i}$ sei das $\mathfrak{d}_t^{-1}$ zugeordnete Ideal von K_t und $\bar{\mathfrak{i}}_0$ das $\bar{\mathfrak{d}}_{\bar{t}}^{-1}$ zugeordnete Ideal von $\bar{K}_{\bar{t}}$. Wir zeigen $\bar{\mathfrak{i}} \subseteq \bar{\mathfrak{i}}_0$. Wenn d in $\mathfrak{i}$ liegt, so ist $S_{K/k(t)}(da)$ für jedes a aus K_t ein Polynom von t. Folglich ist, wenn $\bar{d}$ in $\bar{\mathfrak{i}}$ liegt, $S_{\bar{K}/\bar{k}(\bar{t})}(\bar{d}\,\bar{a}) = \overline{S_{K/k(t)}(da)}$ für jedes $\bar{a}$ aus $\bar{K}_{\bar{t}} = \overline{K_t}$ ein Polynom von $\bar{t}$. $\bar{d}$ liegt daher in $\bar{\mathfrak{i}}_0$. Aus $\bar{\mathfrak{i}} \subseteq \bar{\mathfrak{i}}_0$ folgt aber, daß der von Primteilern von $\bar{\mathfrak{n}}_{\bar{t}}$

freie Bestandteil von $\bar{\mathfrak{d}}_{\bar{t}}$ durch den von Primteilern von $\bar{\mathfrak{n}}_t$ freien Bestandteil von $\bar{\mathfrak{d}}_t$ teilbar ist. Die gleiche Überlegung für $\frac{1}{t}$ zeigt, daß das gleiche für die von Zählerprimteilern von $\bar{t}$ freien Bestandteile von $\bar{\mathfrak{d}}_t$ und $\bar{\mathfrak{d}}_{\bar{t}}$ gilt. Folglich ist $\bar{\mathfrak{d}}_{\bar{t}}$ durch $\bar{\mathfrak{d}}_t$ teilbar, und da beide Divisoren den gleichen Grad $2g-2+2[K:k(t)]$ haben, so sind sie gleich. Aus (6) folgt also

$$\frac{\bar{\mathfrak{d}}_{\bar{u}}}{\bar{\mathfrak{n}}_{\bar{u}}^2} = \frac{\mathfrak{d}_{\bar{u}}}{\mathfrak{n}_{\bar{u}}^2} \tag{7}$$

für jedes separierende $\bar{u}$ von $\bar{K}$.

Für ein Differential $v\,du$ von K mit endlichem $\bar{v}$ und separierendem u erklären wir jetzt den p-Rest durch

$$\overline{v\,du} = \bar{v}\,d\bar{u},$$

was von der Wahl von $\bar{u}$ nicht abhängt, da nach (5)

$$\frac{\overline{du}}{du_1} = \frac{\overline{du}}{dt} : \frac{\overline{du_1}}{dt} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} : \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{u}_1}$$

wird. Aus (7) schließen wir:

Der Divisor eines Differentials von K geht modulo p *in den Divisor seines Restes über. Insbesondere gehen ganze Differentiale in ganze Differentiale über und es gibt eine Basis der ganzen Differentiale von K, die in eine Basis der ganzen Differentiale von $\bar{K}$ übergeht.*

7. Wenn k ein algebraischer Zahlkörper oder Funktionenkörper einer Unbestimmten ist, so können wir fragen, für welche von den unendlich vielen Primdivisoren p von k die Ausdehnung von p auf K hinsichtlich x den Bedingungen genügt, daß p in K prim bleibe, daß $\bar{k}$ der Konstantenkörper von $\bar{K}$ werde und daß $\bar{K}$ das gleiche Geschlecht habe wie K.

Wir beweisen zuerst:

Fast alle Primdivisoren p von k bleiben in K prim[5]. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß K über $k(x)$ separabel ist[6]. Wir können annehmen, daß der Zähler von x in K in lauter verschiedene Primfaktoren $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ zerfällt, da wir k endlich algebraisch erweitern und $x-\varepsilon$ an Stelle von x nehmen können. y sei ein x-ganzes Element von K, das modulo den $\mathfrak{p}_\nu$ n ver-

[5]) Diesen Satz hat vor einiger Zeit Herr EICHLER benutzt für eine zahlentheoretische Frage der eingangs genannten Art. Vgl. M. EICHLER, Math. Annalen **116** (1939), S. 742—748, Hilfssatz 1. Der hier gegebene Beweis scheint mir einfacher zu sein. Indessen muß bemerkt werden, daß der Satz schon A. OSTROWSKI und E. NOETHER bekannt war.

[6]) Was nach 6 immer möglich ist, wenn $\bar{K}$ separabel erzeugbar ist und bei Konstantenerweiterung keine Geschlechtserniedrigung erleidet.

schiedene Reste $a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(n)}$ hat. Dann ist $K = k(x, y)$ und y genügt einer Gleichung n-ten Grades

$$f(x, y) = 0,$$

wo $f(x, t) = \sum_i h_i(t)\, x^i$ ein absolut irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus k ist. Die $a_0^{(i)}$ sind die Nullstellen von $f(0, t)$, daher ist

$$h_0'(a_0^{(i)}) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\Big|_{x=0,\ t=a_0^{(i)}} \neq 0.$$

Im Körper der Potenzreihen von x mit Koeffizienten aus k wird $f(x, t)$ das Produkt von n Linearfaktoren

$$t - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(i)} x^\nu, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bei gegebenem Anfangskoeffizienten $a_0^{(i)}$ berechnen sich die weiteren Koeffizienten $a_1^{(i)}, a_2^{(i)} \ldots$ einer dieser Potenzreihen folgendermaßen: Sind $a_0^{(i)}, \ldots, a_{m-1}^{(i)}$ bekannt, so haben wir zur Bestimmung von $a_m^{(i)}$ die Kongruenz

$$\begin{aligned} f(x, a_0^{(i)} + \cdots + a_m^{(i)} x^m) &\equiv f(x, a_0^{(i)} + \cdots + a_{m-1}^{(i)} x^{m-1}) + a_m^{(i)} x^m h_0'(a_0^{(i)}) \\ &\equiv 0 \bmod x^{m+1}, \end{aligned}$$

d. h. es ist

$$a_m^{(i)} = -\left.\frac{f(x, a_0^{(i)} + \cdots + a_{m-1}^{(i)} x^{m-1})}{h_0'(a_0^{(i)})\, x^m}\right|_{x=0}.$$

$a_m^{(i)} h_0'(a_0^{(i)})$ ist hiernach ein ganzzahliges Polynom der Koeffizienten von f und von $a_0^{(i)}, \ldots, a_{m-1}^{(i)}$. Es können also im Nenner von $a_m^{(i)}$ nur solche Primdivisoren aufgehen, die auch $h_0'(a_0^{(i)})$ teilen.

Es sei p von den Primfaktoren von $h_0'(a_0^{(1)}) \ldots h_0'(a_0^{(n)})$ verschieden. Dann geht f modulo p in

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \prod_{i=1}^{n} (\bar{t} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu^{(i)} \bar{x}^\nu)$$

über. Gesetzt nun, $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$ sei reduzibel in $\bar{k}(\bar{x})$. Dann muß das Produkt von weniger als n der Faktoren $\bar{t} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu^{(i)} \bar{x}^\nu$, etwa der n_1 ersten, $n_1 < n$, ein Polynom $\bar{f}_1(\bar{x}, \bar{t})$ von $\bar{x}$ und $\bar{t}$ sein. Da das Produkt der entsprechenden Ausdrücke $t - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(i)} x^\nu$ eine nicht abbrechende Potenzreihe in x ist, während $\bar{f}_1(\bar{x}, \bar{t})$ höchstens den gleichen Grad m wie $f(x, t)$ in x hat, so schließen wir, daß p in einem von gewissen endlich vielen Elementen von k aufgehen, also einer von endlich vielen Primdivisoren sein muß. Damit ist die Behauptung bewiesen, weil $K = k(x, y)$ ist.

Wir sehen unmittelbar ein, daß wenn $\mathfrak{p}$ von den eben gefundenen endlich vielen Ausnahmen verschieden ist, $f(x, t)$ sogar bei beliebiger Konstantenerweiterung modulo $\mathfrak{p}$ (genauer modulo den Primteilern von $\mathfrak{p}$ in der Konstantenerweiterung) irreduzibel bleibt. Das heißt:

Für fast alle $\mathfrak{p}$ ist $\bar{k}$ der Konstantenkörper von $\bar{K}$.

Das Verhalten des Geschlechtes von K bei der Reduktion mod $\mathfrak{p}$ untersuchen wir auf die folgende Weise: Wir erzeugen K durch eine Gleichung

$$f(y, z) = 0,$$

die eine Kurve mit nur gewöhnlichen Knotenpunkten darstellt[7]). Sind $a_0, \ldots, a_N$ die Koeffizienten von $f = a_0 y^m + \cdots$, so bestehen einige homogene algebraische Gleichungen

$$\varphi_\nu(a_1, \ldots, a_N) = 0$$

und einige Ungleichungen

$$\psi_\nu(a_0, \ldots, a_N) \neq 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die zum Ausdruck bringen, daß $f = 0$ tatsächlich eine Kurve vom gegebenen Geschlechte g mit nur gewöhnlichen Knotenpunkten darstellt. Diese Gleichungen und Ungleichungen sind, wie aus ihrer Ableitung folgt, für jede Primzahlcharakteristik die gleichen wie für die Charakteristik 0. Sie gelten also, da sie für f erfüllt sind, auch modulo fast allen $\mathfrak{p}$, d. h. $f(y, z) = 0$ stellt modulo fast allen $\mathfrak{p}$ ebenfalls eine Kurve vom Geschlechte g dar.

$\bar{z}$ und $\bar{y}$ sind für fast alle $\mathfrak{p}$ nicht konstant. Zwischen ihnen besteht die für fast alle $\mathfrak{p}$ irreduzible Gleichung $\bar{f}(\bar{y}, \bar{z}) = \bar{a}_0 \bar{y}^m + \cdots$ vom Geschlechte g, $\bar{k}(\bar{x}, \bar{z})$ ist dann ein Teilkörper des Geschlechtes g von $\bar{K}$ und *das Geschlecht von $\bar{K}$ ist daher nach* 3 *für fast alle $\mathfrak{p}$ ebenfalls gleich g.*

---

[7]) Vgl. B. L. VAN DER WAERDEN, Zur algebraischen Geometrie. XI. Projektive und birationale Äquivalenz und Moduln von ebenen Kurven. Math. Annalen **114** (1937), S. 683–699, Beweis von Satz 3.

(Eingegangen am 1. Februar 1941.)

Die Fourierentwicklung des Sinus, Cosinus und der Umkehrung einer Fourierreihe.

Von

U. T. Bödewadt in Göttingen.

Es ist bekannt, daß man durch Einsetzen einer rein- oder fastperiodischen Funktion $y = \varphi(t)$ mit absolut konvergenter Fourierreihe in y^2, y^{-1} oder irgendeine andere analytische Funktion $f(y)$ im allgemeinen wieder eine rein- bzw. fastperiodische Funktion $\psi(t) = f(\varphi(t))$ mit absolut konvergenter Fourierreihe erhält[1]). Es ist aber (außer für Polynome in y) kaum etwas darüber bekannt, wie denn die Fourierkoeffizienten der mittelbaren Funktion $\psi(t)$ von denen der eingesetzten Funktion $\varphi(t)$ explizit abhängen. Diese Frage wird in der vorliegenden Mitteilung für die beiden Funktionen $\sin y$, $\cos y$ und reinperiodische Funktionen $y = \varphi(t)$ beantwortet: die Koeffizienten von $\psi(t)$ sind darstellbar als Reihen von Produkten Besselscher Funktionen (mit ganzzahligem Parameter) der Koeffizienten von $\varphi(t)$. Als Anwendung davon wird die Umkehrung einer Fourierreihe behandelt. Die angegebenen Formeln werden auch dann von Nutzen sein können, wenn die Funktion $f(y)$ zwar nicht selber ein Fourierpolynom oder eine Fourierreihe ist, sich aber in dem in Betracht kommenden Intervall gut durch ein solches Polynom ersetzen läßt.

1.

Wir gehen aus von den seit langem bekannten[2]) Formeln

$$\sin(a \sin t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{2p+1}(a) \sin(2p+1)t, \tag{1a}$$

$$\cos(a \sin t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{2p}(a) \cos 2pt. \tag{1b}$$

Hier wie im folgenden bedeutet $J_p(x)$ die Besselsche Zylinderfunktion mit ganzzahligem Parameter p, wie sie für positive p erklärt ist durch die Reihe

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n};$$

[1]) R. H. Cameron, Analytic functions of absolutely convergent generalized trigonometric sums. Duke math. J. **3** (1937), S. 682–688; H. R. Pitt, A theorem on absolutely convergent trigonometrical series. J. Math. Phys. Massachusetts **16**, S. 191–195.

[2]) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904. S. 65.

sie hat die Symmetrieeigenschaft $J_{-p}(x) = J_p(-x) = (-1)^p J_p(x)$. Man erhält die Formeln durch Einsetzen von $y = a \sin t$ in die Potenzentwicklung von $\sin y$ und $\cos y$; die Reihen sind beständig absolut konvergent. — Ersetzt man t durch $\frac{\pi}{2} + t$, so kommt noch

$$\sin(a \cos t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p J_{2p+1}(a) \cos(2p+1)t, \tag{1c}$$

$$\cos(a \cos t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p J_{2p}(a) \cos 2pt. \tag{1d}$$

Nimmt man als Argument des sin oder cos ein harmonisches sin- oder cos-Polynom aus N Gliedern, so findet man vermöge der Additionsgesetze zunächst für $N = 2$, dann schrittweise durch vollständige Induktion für jedes endliche N die Formeln:

$$\sin\Big(\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt\Big) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sin \lambda t \cdot S''_\lambda, \tag{2a}$$

$$\cos\Big(\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt\Big) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \cos \lambda t \cdot C''_\lambda, \tag{2b}$$

$$\sin\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt\Big) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \cos \lambda t \cdot S'_\lambda, \tag{2c}$$

$$\cos\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt\Big) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \cos \lambda t \cdot C'_\lambda; \tag{2d}$$

dabei sind die Koeffizienten gegeben durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{matrix} S''_\lambda \\ C''_\lambda \end{matrix}\right\} = \sum_{(q_n)} \prod_{n=1}^{N} J_{q_n}(b_n), \tag{2a, b}$$

$$\left.\begin{matrix} S'_\lambda \\ C'_\lambda \end{matrix}\right\} = \sum_{(p_n)} (-1)^{[\frac{1}{2}P]} \prod_{n=1}^{N} J_{p_n}(a_n). \tag{2c, d}$$

Diese Summen sind zu erstrecken über alle Kombinationen

$$(q_n) = (q_1, q_2, \ldots, q_N) \quad \text{bzw.} \quad (p_n) = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$$

aus ganzen Zahlen $-\infty < q_n < \infty$ bzw. $-\infty < p_n < \infty$, die erstens die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{N} n p_n = \lambda \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{N} n q_n = \lambda \tag{2e}$$

erfüllen und für die zweitens die Größen

$$P = \sum_{n=1}^{N} p_n, \qquad Q = \sum_{n=1}^{N} q_n$$

nach folgender Vorschrift gerade oder ungerade sind:

$$\begin{aligned} &Q \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{für } S_\lambda'' \text{ in (2a)},\\ &Q \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{für } C_\lambda'' \text{ in (2b)},\\ &P \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{für } S_\lambda' \text{ in (2c)},\\ &P \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{für } C_\lambda' \text{ in (2d)}. \end{aligned} \tag{2f}$$

$[\frac{1}{2} P]$ in der Formel (2c, d) bedeutet die größte ganze in $\frac{1}{2} P$ enthaltene Zahl. Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

Durch Zusammensetzung dieser Ergebnisse erhält man auch die Entwicklungen für sin und cos eines trigonometrischen Polynoms, das nicht gerade oder ungerade ist:

$$\cos\Big(\sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\Big) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (A_\lambda \cos \lambda t + B_\lambda \sin \lambda t), \tag{3a}$$

$$\sin\Big(\sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\Big) = \tfrac{1}{2} C_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (C_\lambda \cos \lambda t + D_\lambda \sin \lambda t). \tag{3b}$$

Die Koeffizienten dieser Reihen sind gegeben durch die Summe

$$A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda = 2 \cdot \sum_{(p_n, q_n)} (-1)^{[\frac{1}{2} P]} \cdot \prod_{n=1}^{N} J_{p_n}(a_n) J_{q_n}(b_n). \tag{3c}$$

Sie ist zu erstrecken über alle Kombinationen (p_n, q_n) aus ganzen Zahlen p_n, q_n. die erstens die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{N} n (p_n + q_n) = \lambda \tag{3d}$$

erfüllen und zweitens den Bedingungen

$$\begin{aligned} &P \equiv 0,\ Q \equiv 0 \pmod 2 \text{ genügen, um } A_\lambda,\\ &P \equiv 1,\ Q \equiv 1 \pmod 2 \quad ,, \quad ,, \quad B_\lambda,\\ &P \equiv 1,\ Q \equiv 0 \pmod 2 \quad ,, \quad ,, \quad C_\lambda,\\ &P \equiv 0,\ Q \equiv 1 \pmod 2 \quad ,, \quad ,, \quad D_\lambda \end{aligned} \tag{3e}$$

zu erhalten. Dabei bedeutet wieder

$$P = \sum_{\lambda=1}^{N} p_n; \qquad Q = \sum_{n=1}^{N} q_n.$$

Wenn in dem gegebenen Polynom einzelne Koeffizienten a_n, b_n verschwinden, so sind die zugehörigen p_n bzw. q_n immer $= 0$ zu wählen; und in den Produkten in (3c) sind die entsprechenden Faktoren fortzulassen. Das folgt aus $J_0(0) = 1$; $J_p(0) = 0$ für $p > 0$.

Ist als Argument von sin y oder cos y eine konvergente trigonometrische Reihe ohne konstantes Glied gegeben:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

so wird man versuchen, die Fourierkoeffizienten von $\sin y$ und $\cos y$ dadurch zu erhalten, daß man in den Formeln (3) $N \to \infty$ streben läßt. Die Produkte laufen dann in n von 1 bis ∞, und in den Kombinationen (p_n, q_n) können zwar unbeschränkt viele, doch stets nur endlich viele von 0 verschiedene p_n, q_n auftreten. Dadurch behalten die Summen P, Q und die Bedingungen (3d), (3e) ihren Sinn. Für ein verschwindendes a_n oder b_n ist wieder für das betreffende p_n oder q_n nur der Wert 0 zu betrachten, der entsprechende Faktor in den Produkten $= 1$ zu setzen.

Ob man auf diese Weise auch wirklich die Entwicklung von $\cos y$ und $\sin y$ erhält und ob die Reihen (3c) überhaupt und ob sie unbedingt konvergieren, muß noch untersucht werden.

Wenn die Fourierreihe von y noch ein konstantes Glied enthält:

$$y = k + f(t), \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

so muß man $\sin y$ und $\cos y$ nach den Additionsgesetzen aus $\sin f(t)$ und $\cos f(t)$ zusammensetzen. In leicht verständlicher Bezeichnung wird

$$\begin{aligned} A_\lambda(y) &= \cos k \cdot A_\lambda(f) - \sin k \cdot C_\lambda(f), \\ B_\lambda(y) &= \cos k \cdot B_\lambda(f) - \sin k \cdot D_\lambda(f), \\ C_\lambda(y) &= \cos k \cdot C_\lambda(f) + \sin k \cdot A_\lambda(f), \\ D_\lambda(y) &= \cos k \cdot D_\lambda(f) + \sin k \cdot B_\lambda(f). \end{aligned}$$

2.

Die Konvergenzfrage ist bei der Formel (3c) nicht nur für die Reihe als Ganzes, sondern im Falle $N = \infty$ schon für jedes Glied, d. h. für jedes Produkt zu stellen. Da fast alle p_n, q_n verschwinden, so braucht man nur die Konvergenz des Produktes $\prod_{n=1}^{\infty} J_0(a_n) J_0(b_n)$ zu prüfen. Da $|J_0(x)| \leqq 1$ und $J_0(x) = 1 - j(x)$ mit $0 \leqq j(x) \leqq \frac{1}{4} x^2$, so ergibt sich die Konvergenz des Produktes aus der Konvergenz von $\sum_n (a_n^2 + b_n^2)$.

Wenn die Koeffizientensumme $\sum_n (a_n + b_n)$ absolut konvergiert: $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < K$, so ist auch die in (3c) stehende Summe absolut konvergent. Zum Beweise setzen wir

$$|a_n| = \alpha_n, \quad |b_n| = \beta_n, \quad |p_n| = \gamma_n, \quad |q_n| = \delta_n, \quad \Sigma \gamma_n = \Gamma, \quad \Sigma \delta_n = \Delta.$$

Zuerst schätzen wir das Produkt

$$\Pi = \prod_{n=1}^{\infty} J_{p_n}(a_n) J_{q_n}(b_n)$$

ab: Es ist $|J_\nu(a)| \leqq \frac{1}{\nu!}\left(\frac{a}{2}\right)^\nu$, also erhalten wir

$$|\Pi| \leqq \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n!}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^{\gamma_n} \cdot \frac{1}{\delta_n!}\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{\delta_n}.$$

In diesem Produkt darf man sich auf die endlich vielen Faktoren beschränken, für die p_n, q_n von Null verschieden sind. Nennen wir r die Anzahl der nicht verschwindenden γ_n in der vorgelegten Kombination (p_n), s die Anzahl der $\delta_n \neq 0$ in (q_n), so gibt es 2^r Kombinationen (p_n) zur gleichen Zusammenstellung (γ_n) und 2^s Kombinationen (q_n), die dieselbe Kombination (δ_n) liefern. Da diese Größen r, s höchstens gleich Γ bzw. Δ sein können, so ist die Summe der Beträge aller Produkte Π, deren (p_n, q_n) zu derselben Zusammenstellung (γ_n, δ_n) gehören, abzuschätzen durch

$$\sum_{(\gamma_n,\ \delta_n)\text{ fest}} |\Pi| \leqq 2^{\Gamma+\Delta} \cdot \prod_n \frac{\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^{\gamma_n}}{\gamma_n!} \cdot \frac{\left(\frac{\beta_n}{2}\right)}{\delta_n!}.$$

Bilden wir jetzt die Summe über alle (p_n, q_n) mit dem gleichen Wert von Γ und Δ, so können wir sie mit Hilfe der Polynomialformel abschätzen durch

$$\sum_{\Gamma,\ \Delta\text{ fest}} |\Pi| \leqq \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots)^\Gamma}{\Gamma!} \cdot \frac{(\beta_1+\beta_2+\cdots)^\Delta}{\Delta!}.$$

Läßt man schließlich Γ und Δ alle Werte 0, 1, 2, ... durchlaufen, so erhält man alle möglichen Kombinationen (p_n, q_n); wir finden die Ungleichung

$$2 \cdot \sum_{(p_n,\ q_n)} |\Pi| \leqq 2 \cdot \exp\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \beta_1 + \beta_2 + \cdots\right) < 2 \cdot e^K.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist nun, da die Bedingungen (3d), (3e) noch gar nicht berücksichtigt worden sind, eine Majorante für jeden Koeffizienten A_λ, B_λ, C_λ, D_λ wie auch für die Summen ihrer Beträge. Die Summen (3c) konvergieren also unbedingt.

Insbesondere sind also die Reihen (3c) dann absolut konvergent, wenn y ein endliches Fourierpolynom ist.

Daß diese Reihen auch für $N = \infty$ die Koeffizienten von $\cos y$ und $\sin y$ liefern, ergibt sich aus Zusammenhängen, die man in folgende beiden Sätze fassen kann:

1. Wenn eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ mit der Periode 2π im Mittel gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, so konvergieren auch die Fourierkoeffizienten von $f_n(x)$ gegen die von $f(x)$.

2. Eine Folge von Funktionen $y = f_n(x)$ konvergiere im Mittel gegen $y = f(x)$. Die Funktionen $f_n(x)$, $f(x)$ sollen die Periode 2π haben, und ihre Werte sollen sämtlich innerhalb eines Gebietes liegen, in dem eine Funktion $G(y)$ erklärt ist und eine beschränkte Ableitung $|G'(y)| < M$ hat. Dann sind auch die Funktionen $g_n(x) = G(f_n(x))$ und $g(x) = G(f(x))$ periodisch mit 2π, und die Funktionen $g_n(x)$ streben im Mittel gegen $g(x)$.

Wir können jetzt für $f(x)$ die Fourierreihe y, für $f_n(x)$ ihre Teilsummen nehmen; $G(y)$ bedeutet cos y oder sin y. Für die $f_n(x)$ gelten die Formeln (3), und der Grenzübergang $N \to \infty$ gibt dann die Formeln für die Entwicklung von $f(x)$. Die Anordnung der Summanden muß, wenn die Reihen (3c) nicht unbedingt konvergieren, dem Grenzübergang $N \to \infty$ entsprechen: man nehme die Glieder also in der Reihenfolge, wie sie sich einstellen, wenn man außer (3d), (3e) vorerst noch $p_n = q_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ fordert und dann schrittweise die Bedingungen $p_1 = q_1 = 0$; $p_2 = q_2 = 0$; ... aufhebt.

Wenn man $a_n = \alpha_n \cdot \varepsilon^n$, $b_n = \beta_n \cdot \varepsilon^n$ setzt $(0 < \varepsilon < 1)$, so wird $J_p(a_n)$ und desgleichen $J_q(b_n)$ von der Ordnung $n|p|$ bzw. $n|q|$ in ε; es empfiehlt sich daher zuweilen, die Produkte nach der Größe von $\sum_n n(|p_n| + |q_n|)$ anzuordnen, wenn das möglich ist. Da sich nämlich die Reihen (3c) kaum jemals geschlossen auswerten lassen, wenn sie auch numerisch durchaus brauchbar sind, so wird man öfters den Ausweg der Potenzreihenentwicklung versuchen müssen[3]).

3.

Bei der Umkehrung einer Fourierreihe wollen wir uns auf den Fall beschränken, wo zwei stetig zusammenhängende Größen x und y „durchschnittlich proportional" sind, d. h. es soll eine Konstante x_0 und eine andere Konstante y_0 geben, so daß bei einer Vergrößerung von x um x_0 sich y stets um y_0 vergrößert. Durch Multiplikation von x und y mit geeigneten Faktoren kann man erreichen, daß $x_0 = y_0 = 2\pi$ wird:

$$y(x + 2\pi) = y(x) + 2\pi.$$

Ein solcher Zusammenhang besteht z. B. dann, wenn der Punkt $z = r e^{ix}$ eine einfache geschlossene Kurve durchläuft und abhängig von ihm der Punkt $w = R e^{iy}$ eine andere einfache geschlossene Kurve.

Setzen wir jetzt

(4a) $$y = x + f(x),$$

wo also nach Voraussetzung $f(x)$ stetig sein soll, so ist $f(x)$ periodisch in x mit 2π. Durch Änderung von x oder y um eine Konstante läßt sich auch immer erreichen, daß der Mittelwert von $f(x)$ Null ist. Es werde weiter vorausgesetzt, daß $f(x)$ eine Ableitung habe, die einer Bedingung von der Form

$$0 < \varepsilon < 1 + f'(x) < M$$

genügt. Dann existiert auch die Umkehrfunktion

(4b) $$x = y + g(y),$$

[3]) Vgl. BÖDEWADT, Von den freien Schwingungen eines Kreiselpendels bei endlichen Ausschlägen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik **20** (1940), S. 218–234, bes. S. 232f.

wobei auch $g(y)$ differenzierbar ist und die Periode 2π in y hat. Für $f(x)$ und $g(y)$ gibt es Fourierentwicklungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ g(y) &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\alpha_\lambda \cos \lambda y + \beta_\lambda \sin \lambda y), \end{aligned} \tag{4c}$$

und es handelt sich um die Berechnung der α_λ, β_λ aus den a_k, b_k.

Es ist z. B.

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(y) \cos \lambda y \, dy.$$

Setze ich hier $g(y) = x - y = -(y - x) = -f(x)$ und führe durch $y = x + f(x)$ die Integrationsveränderliche x ein, so werden die Grenzen $y = 0$, $y = 2\pi$ zu $x = g(0)$, $x = g(0) + 2\pi$; doch kann man das Integral wegen der Periodizität des Integranden auch über die um $g(0)$ verschobene Periode von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ erstrecken:

$$\alpha_\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot (1 + f'(x)) \cos (\lambda x + \lambda f(x)) \, dx.$$

Wenn man also schreibt

$$f(x) + f(x) f'(x) = F(x),$$

so ist wegen

$$\cos (\lambda x + \lambda f) = \cos \lambda x \cos \lambda f - \sin \lambda x \sin \lambda f$$

die Größe α_λ einfach aus den Fourierentwicklungen von $F(x)$, $\sin f(x)$ und $\cos f(x)$ berechenbar; diese aber sind bekannt, da die Koeffizienten von $f(x)$ gegeben sind.

Man entwickle also zunächst $F(x)$:

$$F(x) = f(x) + f(x) f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos mx + d_m \sin mx),$$

$$\begin{aligned} c_m &= a_m + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(m-k)(a_k b_{m-k} + b_k a_{m-k}) + \\ &\qquad + (m+k)(a_k b_{m+k} - b_k a_{m+k})], \\ d_m &= b_m + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(m-k)(-a_k a_{m-k} + b_k b_{m-k}) - \\ &\qquad - (m+k)(a_k a_{m+k} + b_k b_{m+k})]. \end{aligned} \tag{4d}$$

Bei der Bildung dieser Summen ist für $k \leqq 0$ $a_k = b_k = 0$ zu setzen. Anschließend erkläre man c_m und d_m für negative m durch

$$c_{-m} = c_m; \qquad d_{-m} = -d_m.$$

Weiter entwickle man $\sin \lambda f(x)$ und $\cos \lambda f(x)$:

$$\cos \lambda f(x) = \tfrac{1}{2} A^{\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_{\nu}^{\lambda} \cos \nu x + B_{\nu}^{\lambda} \sin \nu x),$$

$$\sin \lambda f(x) = \tfrac{1}{2} C_0^{\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (C_{\nu}^{\lambda} \cos \nu x + D_{\nu}^{\lambda} \sin \nu x).$$

Die Koeffizienten $A_{\nu}^{\lambda}, B_{\nu}^{\lambda}, C_{\nu}^{\lambda}, D_{\nu}^{\lambda}$ sind aus λa_n und λb_n ebenso zu berechnen, wie nach den Formeln (3) die Koeffizienten $A_{\nu}, B_{\nu}, C_{\nu}, D_{\nu}$ aus a_n und b_n. Die Reihen (3c) konvergieren nach den hier gemachten Voraussetzungen absolut.

Die gesuchten Größen $\alpha_{\nu}, \beta_{\nu}$ sind dann durch die Reihen gegeben

$$\begin{aligned} 2\alpha_{\nu} = &- A_0^{\nu} c_{\nu} + C_0^{\nu} d_{\nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{\nu} (c_{n-\nu} + c_{n+\nu}) + B_n^{\nu} (d_{n-\nu} + d_{n-\nu}) + \\ &+ C_n^{\nu} (d_{n-\nu} - d_{n+\nu}) + D_n^{\nu} (-c_{n-\nu} + c_{n+\nu})\}, \\ 2\beta_{\nu} = &- A_0^{\nu} d_{\nu} - C_0^{\nu} c_{\nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{\nu} (-d_{n-\nu} + d_{n+\nu}) + B_n^{\nu} (c_{n-\nu} - c_{n+\nu}) + \\ &+ C_n^{\nu} (c_{n-\nu} + c_{n+\nu}) + D_n^{\nu} (d_{n-\nu} + d_{n+\nu})\}. \end{aligned} \tag{4e}$$

Die Konvergenz dieser Reihen ergibt sich, da die $A_n^{\nu}, \ldots$ bei festem ν beschränkt sind, aus dem Satz

3. Die in x mit 2π periodischen Funktionen $y = f_n(x)$ sollen im Mittel gegen die gleichfalls periodische Funktion $y = f(x)$ streben; ihre Ableitungen sollen existieren und gleichmäßig beschränkt sein: $0 < \varepsilon < f_n'(x) < M$, $0 < \varepsilon < f'(x) < M$. Dann existieren die Umkehrfunktionen $x = g_n(y)$, $x = g(y)$, und die Folge $g_n(y)$ strebt im Mittel gegen $g(y)$.

Nimmt man nämlich an, daß $f(x) = y - x$ durch eine endliche trigonometrische Summe in x darzustellen sei, so sind auch nur endlichviele der Koeffizienten c_n, d_n von $F(x) \neq 0$, und die Summen für $\alpha_{\nu}, \beta_{\nu}$ haben nur endlichviele Glieder.

Zusatz bei der Korrektur. Die durch (3c) dargestellten Koeffizienten von $\sin y$ und $\cos y$ sind Funktionen der Koeffizienten von y. Auch die Ableitungen dieser Funktionen sind mit Hilfe der Formeln (3) leicht explizit anzugeben, denn es ist z. B.

$$\frac{\partial A_{\lambda}}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial b_n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos y(t) \cdot \cos \lambda t \cdot dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} - \sin y(t) \cdot \sin nt \cdot \cos \lambda t \cdot dt = \frac{1}{2} (D_{\lambda-n} - D_{\lambda+n}).$$

(Eingegangen am 30. Juni 1941.)

Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Es bezeichne

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{a}_\nu \tag{1}$$

irgendeine, nicht notwendig konvergente, *Umordnung* einer *bedingt* konvergenten Reihe von Vektoren $\mathfrak{a}_\nu$ des s-dimensionalen Vektorraumes. Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathfrak{a}_\nu| \tag{2}$$

der Vektorbeträge $|\mathfrak{a}_\nu|$ divergiert; jedenfalls gilt aber

$$\lim_{\nu=\infty} |\mathfrak{a}_\nu| = 0. \tag{3}$$

Wird die in (1) vorgeschriebene Addition der Vektoren $\mathfrak{a}_\nu$ geometrisch nach der Polygonregel ausgeführt, so entsteht ein unendliches *Vektorpolygon* α; seine *Eckpunkte* sind durch die Teilabschnittsvektoren

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{a}_\nu \tag{4}$$

gegeben. Das beim n-ten Eckpunkt von α beginnende *Restpolygon* bezeichnen wir mit α_n. Bei dieser Numerierung wird der Anfangspunkt von α als 0ter Eckpunkt gerechnet. Einen Häufungspunkt der Menge der Eckpunkte von α nennen wir kurz *Endpunkt* des Polygons. Die Menge aller Endpunkte heißt dann *Endpunktmenge* von α.

Unter der ε-Umgebung einer Punktmenge im Raume verstehen wir die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen s-dimensionalen Kugeln vom Radius $\varepsilon > 0$, die um sämtliche Punkte der genannten Menge gelegt werden.

Wir charakterisieren nun ein mögliches ausgezeichnetes Verhalten des Polygons α, das eine Konvergenzart bezeichnet. Es handelt sich um eine Erweiterung des gewöhnlichen Konvergenzbegriffes, deren Studium einiges Interesse zu bieten scheint.

Wir definieren:

Das Vektorpolygon α heißt konvergent, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n so angeben läßt, daß das Restpolygon α_n ganz innerhalb der ε-Umgebung der Endpunktmenge von α verläuft. Besteht die Endpunktmenge aus nur einem

Punkt bzw. aus mehreren Punkten, so heißt das Polygon insbesondere bestimmt bzw. unbestimmt konvergent.

Man bestätigt leicht, daß sich der Begriff der bestimmten Konvergenz mit dem üblichen Konvergenzbegriff deckt; es handelt sich offensichtlich um die Formulierung des bekannten Kriteriums von CAUCHY in der hier verwendeten geometrischen Ausdrucksweise. Die unbestimmte Konvergenz erscheint als natürliche Erweiterung auf die Fälle, wo das Polygon mehr als einen Endpunkt aufweist. Sie bezeichnet ein besonderes infinitesimales Verhalten des nach der üblichen Klassifikation divergenten Polygons, das anschaulich gesagt darin besteht, daß jedes Restpolygon in einem zugewiesenen Raumteil Platz findet, aber mit keinem kleineren Teil auskommt.

Nach Voraussetzung gibt es Umordnungen des Polygons α, die bestimmt konvergieren. Die Gesamtheit der Endpunkte aller bestimmt konvergenten Umordnungen erfüllen nach dem bekannten *Umordnungssatz* von E. STEINITZ einen echten oder unechten, mindestens 1-dimensionalen linearen Unterraum, den wir in der Folge als *Steinitzschen Unterraum* bezeichnen.

Es ist eine bekannte und leicht zu beweisende Tatsache, daß jeder Endpunkt einer beliebigen, nicht notwendig konvergenten Umordnung des Polygons in seinem STEINITZschen Unterraum liegt[1]).

Unmittelbar aus der Definition folgert man, daß die Endpunktmenge eines Polygons abgeschlossen ist. Mit Rücksicht auf (3) schließt man mühelos, daß eine beschränkte Endpunktmenge eines unbestimmt konvergenten Polygons zusammenhängend ist. Zusammenfassend stellen wir fest, daß die beschränkte Endpunktmenge eines unbestimmt konvergenten Polygons ein Teilkontinuum[2]) des STEINITZschen Unterraumes ist.

Ziel dieser Note ist der Beweis des folgenden Umordnungssatzes:

Zu jedem konvexen Teilkontinuum des Steinitzschen Unterraumes eines unendlichen Vektorpolygons gibt es eine unbestimmt konvergente Umordnung, so daß das vorgegebene Kontinuum Endpunktmenge des umgeordneten Vektorpolygons ist.

Die Voraussetzung, daß das Polygon eine bedingt konvergente Vektorreihe liefert, kann dem Wortlaut des Satzes entnommen werden, wonach dem Polygon ein nicht trivialer, d. h. ein nicht nulldimensionaler STEINITZscher Unterraum zugeordnet ist.

Der STEINITZsche Satz sagt aus, daß zu jedem Punkt des STEINITZschen Unterraumes eine bestimmt konvergente Umordnung existiert, so daß der

---

[1]) Vgl. H. HADWIGER, Über das Umordnungsproblem im HILBERTschen Raum. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 70–79; besonders S. 72.

[2]) Unter einem Kontinuum verstehen wir hier eine mehrpunktige abgeschlossene Menge, die nicht in zwei punktfremde abgeschlossene Teilmengen zerlegt werden kann.

vorgegebene Punkt Endpunkt ist. Der oben formulierte Satz kann als Erweiterung dieses Satzes interpretiert werden; er vermag ein noch eindrucksvolleres Bild von der Reichhaltigkeit der Effekte zu geben, die durch Umordnung bedingt konvergenter Vektorreihen erwirkt werden können.

Der Steinitzsche Satz erscheint als Spezialfall unseres Umordnungssatzes, wobei das konvexe Kontinuum durch einen Punkt ersetzt wird; der diesem Fall gegenüberstehende extreme Spezialfall liegt dann vor, wenn das Kontinuum mit dem Steinitzschen Unterraum identifiziert wird.

Der Steinitzsche Unterraum einer Vektorreihe kann s-dimensional sein, d. h. mit dem Vektorraum selbst zusammenfallen. Eine solche bedingt konvergente Vektorreihe kann nach der obenerwähnten Spezialisierung unseres Umordnungssatzes so umgeordnet werden, daß jeder Punkt des Raumes Endpunkt des Vektorpolygons ist. Das Polygon liegt im ganzen Raum dicht[3]).

Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz über Umordnung eines endlichen Polygons mit kleinen Vektoren.

Er lautet so:

Ein endliches Vektorpolygon des s-dimensionalen Raumes, dessen Seitenvektoren alle eine den Wert $a > 0$ nicht übersteigende Länge aufweisen, kann immer so umgeordnet werden, daß es ganz in der $(2^s - 1)\,a$-Umgebung der Verbindungsstrecke von Anfangs- und Endpunkt liegt.

Die ε-Umgebung einer Strecke ist hier im nämlichen Sinne zu verstehen, wie sie weiter oben für beliebige Punktmengen definiert wurde. In dem hier vorliegenden speziellen Fall stellt diese Umgebung einen Parallelkörper der Strecke dar.

Das Vektorpolygon enthalte die k Seitenvektoren

$$\mathfrak{a}_\nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots k. \tag{5}$$

Nach Voraussetzung ist $|\mathfrak{a}_\nu| \leqq a$. Wir setzen

$$\mathfrak{b}_\nu = -\frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_k}{k}; \quad \nu = 1, 2, \ldots k. \tag{6}$$

Offenbar gilt auch $|\mathfrak{b}_\nu| \leqq a$. Nun ist

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_k = 0,$$

und die Vektoren dieses geschlossenen Vektorpolygons können nach einem Lemma von Gross[4]) so angeordnet werden, daß das Polygon ganz in einer

[3]) Diese Möglichkeit besteht auch im Hilbertschen Raum. Vgl. hierzu das Beispiel auf S. 79 der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit.

[4]) W. Gross, Bedingt konvergente Reihen. Monatshefte Math. u. Physik 28 (1917), S. 221–237.

Kugel vom Radius $(2^s - 1)\,a$ um den Anfangspunkt Platz findet[5]). In dieser Anordnung, in der die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gemischt auftreten, folgen sich die Vektoren $\mathfrak{a}$ in einer bestimmten Reihenfolge. Diese ergibt die gewünschte Umordnung des ursprünglichen Polygons. In der Tat: Es sei $1 \leqq n,\ m \leqq k$, und es bezeichne $\mathfrak{A}_n$ die Summe der n ersten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}_m$ die Summe der m ersten Vektoren $\mathfrak{b}$ im geschlossenen Polygon, das ganz in der obenerwähnten Hüllkugel liegt. Das Anfangspolygon, das aus den ersten r-Vektoren besteht, $1 \leqq r \leqq 2k$, soll $n(r)$ Vektoren $\mathfrak{a}$ und $m(r)$ Vektoren $\mathfrak{b}$ enthalten.

Offenbar gilt

$$|\mathfrak{A}_{n(r)} + \mathfrak{B}_{m(r)}| \leqq (2^s - 1)\,a. \tag{7}$$

Beachtet man, daß im Hinblick auf (5)

$$-\mathfrak{B}_m = \frac{m}{k}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_k)$$

ist, ein Vektor also, der einen Punkt der Verbindungsstrecke von Anfangs- und Endpunkt des ursprünglichen Polygons bezeichnet, so ergibt sich die Behauptung einfach dadurch, daß man die Relation (7) für alle $n(r) = 1, 2, 3, \ldots k$ beansprucht.

Mit Hilfe dieses Hilfssatzes läßt sich nun unser Umordnungssatz leicht beweisen.

Es bezeichne $\mathfrak{K}$ das im Steinitzschen Unterraum gelegene konvexe Kontinuum. Es kann eine abzählbare Teilmenge von $\mathfrak{K}$ bestehend aus den Punkten

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots \tag{8}$$

so gewählt werden, daß sie in $\mathfrak{K}$ überall dicht liegt[6]). Nach dem Steinitzschen Umordnungssatz gibt es zu jedem Punkt P_ν der Folge (8) eine bestimmt konvergente Umordnung U_ν des Vektorpolygons α mit P_ν als Endpunkt. Die Umordnungsfolge

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots \tag{9}$$

---

[5]) Die Schranke $(2^s - 1)\,a$ für den Radius der kleinsten Hüllkugel bei der günstigsten Anordnung der Vektoren für die Zusammenpackung des Vektorpolygons auf möglichst engen Raum kann noch erheblich verbessert werden; so ist die von V. Bergström [Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 8 (1931), S. 148—152] angegebene Schranke $\sqrt{4^s - 1/3}\,a$ wesentlich besser. Der oben ausgesprochene Hilfssatz kann natürlich entsprechend verschärft werden; dies ist für die in Aussicht genommene Anwendung unwesentlich.

[6]) Diese Möglichkeit beruht also auf der Eigenschaft des Raumes separabel zu sein, und besteht naturgemäß in allgemeineren metrischen Räumen.

dient uns zur Konstruktion einer Folge

$$T_1, T_2, T_3, \ldots \tag{10}$$

von endlichen Vektorpolygonen folgender Beschaffenheit:

a) T_ν ist ein Teilpolygon des Umordnungspolygons U_ν.

b) Der Teilabschnitt T_ν wird so groß gewählt, daß in T_ν alle Vektoren von $T_{\nu-1}$ enthalten sind; T_1 ist dagegen frei wählbar.

c) Der Teilabschnitt T_ν wird so groß gewählt, daß der Endpunkt Q_ν von T_ν in der $\frac{1}{\nu}$-Umgebung von P_ν liegt.

Mit Rücksicht auf Punkt b) der Konstruktion der Polygonfolge (10) kann eine Umordnung α^0 des ursprünglichen unendlichen Polygons α so erzeugt werden, daß die Umordnung eine Folge

$$T_1^0, T_2^0, T_3^0, \ldots \tag{11}$$

von Teilpolygonen aufweist, so daß für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ T_ν und T_ν^0 genau die gleichen Vektoren enthalten, also bis auf die Reihenfolge der enthaltenen Vektoren übereinstimmen. Die Konstruktion der Umordnung α^0 kann so geschehen:

Zu $T_1 \equiv T_1^0$ werden alle Vektoren in irgendeiner an sich gleichgültigen Reihenfolge addiert, die in T_2 aber nicht in T_1 vorkommen; auf diese Weise, entsteht T_2^0. Nun werden zu T_2^0 alle Vektoren, die zu T_3, aber nicht zu T_2 gehören, in beliebiger Reihenfolge addiert; so gewinnt man T_3^0 usw. Führt man diesen Prozeß ohne Ende weiter, so ergibt sich die Umordnung α^0 mit der verlangten Eigenschaft.

Die Endpunkte der Teilpolygone T_ν^0 von α_0 fallen natürlich mit denjenigen von T_ν zusammen; wir haben diese weiter oben mit Q_ν bezeichnet.

Es sei jetzt a_ν der größte Betrag der Seitenvektoren desjenigen Teilpolygons G_ν von α^0, das die Punkte Q_ν und $Q_{\nu+1}$ verbindet. Offenbar gilt wegen (3)

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0. \tag{12}$$

Nach dem Hilfssatz kann das Polygon G_ν so umgeordnet werden, daß es ganz in der $(2^\varrho - 1)\, a_\nu$-Umgebung der Verbindungsstrecke von Q_ν und $Q_{\nu+1}$ liegt. Das so umgeordnete Teilpolygon bezeichnen wir mit H_ν. Da nach Punkt c) der Konstruktion der Folge (10) Q_ν in der $\frac{1}{\nu}$-Umgebung von P_ν, $Q_{\nu+1}$ in der $\frac{1}{\nu+1}$-Umgebung, also auch in der $\frac{1}{\nu}$-Umgebung von $P_{\nu+1}$ liegt, gehört H_ν ganz zur $\left[(2^\varrho - 1)\, a_\nu + \frac{1}{\nu}\right]$-Umgebung der Verbindungsstrecke von P_ν und $P_{\nu+1}$; dies lehrt eine einfache geometrische Betrachtung.

Da die Punkte P_ν zu $\mathfrak{K}$ gehören, und nach der Voraussetzung der Konvexität von $\mathfrak{K}$ auch die Verbindungsstrecke von P_ν und $P_{\nu+1}$, liegt das umgeordnete Verbindungspolygon H_ν von Q_ν und $Q_{\nu+1}$ ganz in der $\left[(2^\varrho - 1)\, a_\nu + \frac{1}{\nu}\right]$-Umgebung von $\mathfrak{K}$.

Werden nun sämtliche Verbindungspolygone H_ν aneinandergereiht, so entsteht eine Umordnung α^{00} des ursprünglichen Polygons α. Diese genügt den im Umordnungssatz gestellten Forderungen. Zunächst ist klar, daß jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ Endpunkt von α^{00} ist, denn nach Wahl der Folge (8) ist jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ Häufungspunkt der P_ν, also auch der Q_ν. Die Punkte Q_ν bilden aber eine Teilmenge der Eckpunktmenge des Polygons α^{00}. Ist ferner $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so kann im Hinblick auf (12) n_ε so groß gewählt werden, daß $(2^\varrho - 1)\, a_\nu + \frac{1}{\nu} < \varepsilon$ bleibt für alle $\nu \geqq n_\varepsilon$. Das bei Q_{n_ε} beginnende Restpolygon von α^{00} verläuft dann ganz in der ε-Umgebung von $\mathfrak{K}$. Da $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist, kann α^{00} keinen nicht zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Endpunkt aufweisen. Das konvexe Kontinuum $\mathfrak{K}$ ist also Endpunktmenge von α^{00}. Damit ist der Beweis des Umordnungssatzes abgeschlossen.

(Eingegangen am 29. August 1941.)

Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei beliebige konvexe Körper im n-dimensionalen Raum und λ ein beliebiger Wert > 0 und < 1, so gilt nach MINKOWSKI für das Volumen $V(\lambda)$ der linearen Kombination

$$\mathfrak{K}_\lambda = (1-\lambda)\,\mathfrak{K}_1 + \lambda\,\mathfrak{K}_2 \tag{1.1}$$

die Formel

$$V(\lambda) = (1-\lambda)^n V_0 + \binom{n}{1}(1-\lambda)^{n-1}\lambda V_1 + \cdots + \binom{n}{n}\lambda^n V_n, \tag{1.2}$$

worin $V_0, V_1, \ldots, V_n$ die sogenannten gemischten Volumina von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ bedeuten[1]). Insbesondere ist V_0 das Volumen von $\mathfrak{K}_1$, V_n das Volumen von $\mathfrak{K}_2$, und $n\,V_1$ bedeutet die „relative" Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$. Ist $\mathfrak{K}_2$ gleich einer n-dimensionalen Einheitskugel, so stimmt diese relative Oberfläche mit der gewöhnlichen Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$ überein.

Der Hauptsatz der BRUNN-MINKOWSKIschen Theorie lautet dann: *Es gilt*

$$V_0^{n-1} V_n \leqq V_1^n, \tag{1.3}$$

und zwar tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ homothetisch sind[2]).

Für $n = 2$ gelang es BOL, eine Verschärfung von (1.3) zu beweisen, für den Fall, daß der betreffende konvexe Bereich eine Mindestzahl von Ecken aufweist. BOL[3]) zeigte nämlich, daß eine Ungleichung von der Form (1.3) auch dann gilt, wenn V_2 der Inhalt eines geeigneten Kappenbereiches bedeutet, und $2\,V_1$ die Länge des Randes des betreffenden Bereiches ist. Genauer ausgedrückt, bewies er folgende Verschärfung von (1.3):

Unter allen konvexen Bereichen mit vorgegebenem Umfang und vorgegebenen (endlich oder abzählbar vielen) Eckenwinkeln[4]) *haben die und nur die den größt-*

---

[1]) Zur Begriffsbildung vgl. man: BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper. Berlin, Jul. Springer, 1935. (Wird als BONNESEN-FENCHEL zitiert.)

[2]) MINKOWSKIS Beweise beschränkten sich auf $n = 3$. Für beliebiges n wurde (1.3) zuerst von SÜSS bewiesen. Vgl. BONNESEN-FENCHEL, S. 94. Vgl. auch meine Arbeit: Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel für den n-dimensionalen Raum. Sitzungsber. Akad. Wien, Bd. **149** (1940), S. 399—432.

[3]) BOL, Ein isoperimetrisches Problem. Nieuw Archief voor Wiskunde **20** (1940), S. 171—175.

möglichen Flächeninhalt, die entstehen, indem man an einen Kreis Paare von Tangenten mit eben diesen Winkeln ansetzt. Mit anderen Worten: *Bedeutet F den Inhalt eines konvexen Bereiches $\mathfrak{G}$ mit den Eckenwinkeln ψ_i und bedeutet L die Länge des Randes von $\mathfrak{G}$, so gilt*

$$4\pi F - L^2 \leqq -4F \sum_i \left(\operatorname{tg}\frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) \tag{1.4}$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur für den vorhin erwähnten Kappenbereich ein.

In der vorliegenden Note will ich von (1. 3) ausgehend eine ähnliche Verallgemeinerung wie (1. 4) für jedes n beweisen und zeigen, daß dabei die Kappenkörper der Kugel genau so als Extremallösungen auftreten, wie die Kappenbereiche des Kreises für den Fall $n = 2$.

2. Zum Verständnis des Ganzen schicke ich folgende Begriffsbildungen voraus, wobei ich mich zuerst, der Anschaulichkeit wegen, auf den Fall $n = 3$ beschränke. Allerdings geht ziemlich alles, was hier darüber gesagt wird, auf Minkowski zurück[5]).

Ist ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ im dreidimensionalen Raum gegeben, so nennen wir den Punkt $\mathfrak{p}$ einen Eckpunkt von $\mathfrak{K}$, wenn es mindestens drei Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ gibt, mit linear unabhängigen Normalrichtungen[6]). Wir definieren als Projektionsraum von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{p}$ denjenigen konvexen Kegel $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, den man erhält, wenn man $\mathfrak{p}$ mit allen inneren Punkten von $\mathfrak{K}$ verbindet und dann die so erhaltene Strahlenmenge betrachtet. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ sei nun $\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}$. Dann wird der Durchschnitt $\overline{\mathfrak{R}}'_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}'_\mathfrak{p}$, mit der Einheitskugel um $\mathfrak{p}$, der Projektionssektor von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{p}$ genannt. $\overline{\mathfrak{R}}'_\mathfrak{p}$ ist ein konvexer Körper. Nachdem wir den Projektionssektor $\overline{\mathfrak{R}}'_\mathfrak{p}$ definiert haben, definieren wir noch den Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ im Punkte $\mathfrak{p}$ folgendermaßen: Bezeichnen wir als Eckstützebene durch $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{K}$ jede Stützebene, deren Bedingung sich auf irgendeine Weise in eine Form $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 \leqq 0$ bringen läßt, so daß $\varphi_1 \leqq 0$, $\varphi_2 \leqq 0$, $\varphi_3 \leqq 0$ die Bedingungen dreier Stützebenen an $\mathfrak{K}$ mit unabhängigen Normalrichtungen und c_1, c_2, c_3 positive Konstanten sind.

Sind nun x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Eckpunktes $\mathfrak{p}$ in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so denken wir uns zu jeder Bedingung

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) \leqq 0 \tag{2.1}$$

einer Stützebene durch $\mathfrak{p}$ den Punkt mit Koordinaten u, v, w und nehmen nach dem Vorgang Minkowskis noch den Nullpunkt dazu. Die so definierte, aus

---

[4]) Eckenwinkel nennen wir den Winkel, den die nach außen gerichteten Normalen auf die beiden äußersten in den Ecken berührenden Tangenten einschließen.

[5]) Minkowski, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2, S. 161. Berlin, Teubner, 1911.

[6]) D. h., drei Stützebenen durch $\mathfrak{p}$, deren Normalrichtungen nicht in einer Ebene liegen.

lauter Strahlen vom Nullpunkt O aus bestehende Punktmenge, ist abgeschlossen, enthält den Nullpunkt und drei nicht mit ihm in einer Ebene liegende Punkte.

Der Durchschnitt dieses Bereiches mit der Kugel $\mathfrak{S}$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1 \tag{2. 2}$$

ist eine abgeschlossene im Endlichen liegende konvexe Punktmenge und wird nach Minkowski der Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ des Eckpunktes $\mathfrak{p}$ genannt. $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ besteht aus allen Radien von $\mathfrak{S}$ von O zum Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ mit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, welche zugleich äußere Normalrichtungen von Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{K}$ sind.

Nachdem wir nun den Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ definiert haben, führen wir jetzt den Begriff des kleinsten Rotationskegels $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ ein, der den Projektionsraum $\mathfrak{R}'_{\mathfrak{p}}$ enthält. $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ kann folgendermaßen konstruiert werden:

Es sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ derjenige Teil des Randes von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, der auf der Einheitskugel $\mathfrak{S}$ liegt. $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ ist dann in dem Sinne konvex, als es nämlich mit zwei Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ alle Punkte eines Großkreisbogens von $\mathfrak{S}$ enthält, der durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ geht. Da $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ innerhalb einer Halbkugel liegt, so sind diese Großkreisbogen eindeutig bestimmt. Es sei nun $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ der größte Kreis, der in $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ Platz findet. $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ wird höchstens Randpunkte mit dem Rand von $\mathfrak{B}(\mathfrak{p})$ gemeinsam haben. Der Radius von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ möge auf der Oberfläche von $\mathfrak{S}$ gemessen gleich ψ sein. ψ ist also gleich dem Winkel, den der Radius durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ mit dem Radius durch einen beliebigen Randpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ bildet. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{p}'$ einen Randpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$. Diejenigen Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ mit Normalrichtungen $\mathfrak{O}\mathfrak{p}'$ umhüllen nun einen Rotationskegel $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$, den wir den kleinsten Rotationskegel in $\mathfrak{p}$ nennen werden, der den Projektionsraum in $\mathfrak{p}$ enthält. Die „Öffnung" ψ von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ ist wegen der Definition von $\mathfrak{L}(\mathfrak{p})$ eindeutig bestimmt, und zwar ausschließlich durch den Projektionsraum in $\mathfrak{p}$.

Um nun den zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Kappenkörper $\bar{\mathfrak{K}}$ zu konstruieren, betrachten wir wieder die Kugel $\mathfrak{S}$ und konstruieren zu jedem Eckpunkte $\mathfrak{p}$ den zugehörigen Normalsektor $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$. Die inneren Punkte von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ entsprechen den Normalen der Eckstützebene durch $\mathfrak{p}$. Da eine solche Ebene den konvexen Körper nur in $\mathfrak{p}$ trifft, kann sie niemals durch einen zweiten Eckpunkt gehen. Die Normalsektoren $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ also (falls es mehrere Eckpunkte gibt) haben niemals innere Punkte gemeinsam. Die Ecken $\mathfrak{p}$ sind also höchstens abzählbar. Zu jedem $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ konstruieren wir nun den größten Kreis $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$, der in dem sphärischen Randstück von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ Platz findet. Nachdem wir nun diese Kreise auf $\mathfrak{S}$ festgelegt haben, bedecken wir nach dem bekannten Vorgang die von den $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ bestimmten sphärischen Kalotten mit Kappen, indem wir in jedem Randpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ die Tangentenebene an $\mathfrak{S}$ legen, und die dadurch be-

stimmten Kegel hinzunehmen. Wie aus der Konstruktion hervorgeht, sind die Kappen nichts anderes, als die den zugehörigen Punkten p entsprechenden kleinsten Rotationskegel, und zwar so auf $\mathfrak{S}$ angesetzt, daß die Erzeugenden dieser Kegel Tangenten von $\mathfrak{S}$ sind.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit lautet:

Für einen dreidimensionalen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ mit den Eckpunkten $\mathfrak{p}_i$ gilt

$$36\pi V^2 - O^3 \leqq -9\pi V^2 \sum_i \int_0^{\psi_i} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx, \tag{2.3}$$

wobei die Summation über alle Ecken zu erstrecken ist. Ferner bedeuten V und O das Volumen und die Oberfläche von $\mathfrak{K}$.

Für einen n-dimensionalen konvexen Körper gilt eine analoge Ungleichung, man braucht bloß die Größen ψ_i analog zu definieren, wie dies auch später an geeigneter Stelle getan wird. Man erhält folgende Ungleichung:

$$nW_n(nV)^{n-1} - O^n \leqq -W_{n-1}(nV)^{n-1} \sum_i \int_0^{\psi_i} \frac{\sin^n x}{\cos^2 x}\, dx. \tag{2.4}$$

Dabei ist W_{n-1} das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel und nW_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel. Das Gleichheitszeichen gilt sowohl in (2. 3) wie in (2. 4), wenn $\mathfrak{K}$ zu seinem Kappenkörper homothetisch ist, also nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ selbst ein Kappenkörper der Kugel ist.

Dieses Resultat kann man auch folgendermaßen ausdrücken:

Unter allen konvexen Körpern mit vorgegebener Oberfläche und denselben kleinsten Rotationskegeln $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}_i)$ haben die und nur diejenigen Bereiche das größte Volumen, die man erhält, indem man an einer Kugel Kappen mit eben diesen kleinsten Rotationskegeln ansetzt.

Die Ungleichungen (2. 3), (2. 4) sind insofern interessant, als es das erstemal gelingt, auf Grund Brunn-Minkowskischer Methoden eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (1. 3) zu geben.

Die hier befolgte Methode ist allerdings der Bolschen Methode durchaus analog. Das Neue besteht in der Einführung des Begriffes des minimalen Rotationskegels $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$, mit dessen Öffnung ψ die Abschätzungsgrößen von (2. 3) und (2. 4) gebildet werden.

3. Wir beweisen im folgenden die allgemeine Ungleichung (2. 4). Wir betrachten im n-dimensionalen Raum einen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ und definieren zuerst nach dem Vorbild von 2. für einen Eckpunkt $\mathfrak{p}$ den kleinsten Rotationskegel $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$, der den Projektionsraum $\mathfrak{R}'_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ enthält. $\mathfrak{p}$ wird als Eckpunkt

bezeichnet, falls es n Stützebenen durch $\mathfrak{p}$ gibt mit linear unabhängigen Normalen. Die Begriffe des Projektionssektors und des Normalsektors $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ übertragen sich hier ohne besondere Schwierigkeit. $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ wird z. B. definiert (wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Koordinaten von $\mathfrak{p}$ in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem sind) als diejenige Punktmenge, deren Punkte die Koordinaten $u_1, \ldots, u_n$ haben, wobei die u_i die Normalrichtung einer Eckstützebene

$$\sum_1^n u_i (x_i - y_i) \leqq 0 \tag{3.1}$$

sind. Die so definierte abgeschlossene Strahlenmenge und der Nullpunkt $u_i = 0$ dazu bestimmt den Normalkegel. $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ ist dann der Durchschnitt dieses Normalkegels mit der Einheitskugel $\mathfrak{S}_n$,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1. \tag{3.2}$$

Es sei nun $\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p})$ der Teil des Randes von $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$, der auf der Oberfläche von $\mathfrak{S}_n$ liegt. Man kann zeigen, daß $\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p})$ in dem Sinne konvex ist, daß es mit zwei Punkten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ auch den Bogen eines Großkreises enthält, der $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ auf $\mathfrak{S}_n$ verbindet. Dies folgt alles sehr einfach aus der Definition des Normalkegels und des Normalsektors selbst. Wir wiederholen jetzt dieselbe Konstruktion für jeden Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ und betrachten die Gebiete $\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p})$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, da dies ja schon die Normalkegel tun. Daraus folgt, daß die Eckpunkte numerierbar sind. Für irgendeinen Eckpunkt $\mathfrak{p}_i$ definieren wir in dem entsprechenden Gebiet $\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p}_i)$ die größte Kugel $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$, die Platz in $\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p}_i)$ findet, und bezeichnen mit ψ_i den sphärischen Radius von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$. ψ_i ist dann die Bogenlänge des Großkreises von $\mathfrak{S}_n$, der den Mittelpunkt von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$ mit einem Randpunkt von ihr verbindet. Da jedes $\overline{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p}_i)$ in einer Halbkugel enthalten ist, so ist immer $\psi_i < \frac{\pi}{2}$.

Die Tangentenebenen von $\mathfrak{S}_n$ in den Randpunkten von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$ umhüllen nun einen Rotationskegel $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}_i)$, der, wie aus der Definition folgt, der kleinste Rotationskegel ist, welcher den Projektionsraum von $\mathfrak{p}_i$ enthält. Die Kappe $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_i)$ ist dann derjenige Teil von $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}_i)$, der von diesem durch $\mathfrak{S}_n$ „abgeschnitten" wird. Der zu $\mathfrak{K}$ gehörende Kappenkörper $\bar{\mathfrak{K}}$ ist dann der aus der Kugel und aus der Gesamtheit der Kappen bestehende Körper, also $\mathfrak{S}_n + \sum_i \mathfrak{K}(\mathfrak{p}_i)$.

4. Nach diesen Feststellungen betrachten wir nochmals den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ und den ihm zugeordneten Kappenkörper $\bar{\mathfrak{K}}$ und bilden dann die lineare Kombination

$$\bar{\mathfrak{K}}_\lambda = (1 - \lambda)\,\mathfrak{K} + \lambda\,\bar{\mathfrak{K}}_2. \tag{4.1}$$

Nach Minkowski gilt nun

$$V^{n-1}\overline{V} \leqq V^n(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}), \tag{4.2}$$

wenn V bzw. $\overline{V}$ das Volumen von $\mathfrak{K}$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}$ bedeuten und $V(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}})$ die „gemischte" Oberfläche von $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ darstellt. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ zu $\overline{\mathfrak{K}}$ homothetisch ist, also wenn $\mathfrak{K}$ selber ein Kappenkörper ist.

Wir beweisen jetzt:

Bedeutet nV_1 die Oberfläche von $\mathfrak{K}$, so gilt

$$V(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}) = V_1. \tag{4.3}$$

Hiermit gilt

$$V^{n-1}\overline{V} \leqq V_1^n, \tag{4.4}$$

was wegen $V_n < \overline{V}$ eine Verschärfung von (1.3) mit $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{S}_n$ darstellt.

Zum Beweis von (4.3) betrachten wir die linearen Kombinationen

$$\overline{\mathfrak{K}}_h = \mathfrak{K} + h\overline{\mathfrak{K}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_h = \mathfrak{K} + h\mathfrak{S}_n. \tag{4.5}$$

Nach (1.1) wird

$$\overline{V}_h = V_0 + n h V(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}) + \binom{n}{2} h^2 V_2(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}) + \cdots, \tag{4.6}$$

also

$$n V(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{V}_h - V_0}{h}. \tag{4.6'}$$

Für nV_1 gilt analog, wenn V_h das Volumen des Parallelkörpers $\mathfrak{K}_h$ in der Entfernung h bedeutet,

$$n V_1 = \lim_{h \to 0} \frac{V_h - V_0}{h}. \tag{4.7}$$

Sind nun p und $\bar{p}$ die Stützfunktionen von $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ (als Funktionen eines Punktes Q von $\mathfrak{S}_n$), so sind die Stützfunktionen von $\mathfrak{K}_h$, $\overline{\mathfrak{K}}_h$ entsprechend $p + h$ und $p + \bar{p}h$. Diese Funktionen sind immer gleich, falls Q außerhalb von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$ liegt. Innerhalb von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$ ist $\bar{\mathfrak{p}}$ eine (jedesmal verschiedene) lineare Funktion $\sum_k c_{ik}\xi_k$ der Koordinaten ξ_k des Punktes Q.

Um nun (4.3) und hiermit (4.4) zu beweisen, versuchen wir, da $\mathfrak{K}_h$ in $\overline{\mathfrak{K}}_h$ enthalten ist, das Volumen von $\overline{\mathfrak{K}}_h - \mathfrak{K}_h$ zu berechnen.

Wir beweisen:

Das Volumen von $\overline{\mathfrak{K}}_h - \mathfrak{K}_h$ ist gleich

$$V(\overline{\mathfrak{K}}_h - \mathfrak{K}_h) = h^n \sum_i D(\mathfrak{p}_i), \tag{4.8}$$

wenn $D(\mathfrak{p}_i)$ das Volumen der Kappe $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_i)$ von $\mathfrak{S}_n$ bedeutet. Hiermit wird

$$\overline{V}_h = V_h + h^n \sum_i D(\mathfrak{p}_i). \tag{4.9}$$

Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß die kleinsten Rotationskegel von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K} + h\overline{\mathfrak{K}}$ vollständig übereinstimmen, und daß ein eventueller Unterschied von $\mathfrak{K}_h$ und $\overline{\mathfrak{K}}_h$ nur für Stützebenen stattfinden kann, deren Normalrichtungen in ein Gebiet $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$ fallen. Nun erhalten wir den Körper $\mathfrak{K}_h$, indem wir um jeden Randpunkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ eine Kugel $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ vom Mittelpunkt $\mathfrak{p}$ und Radius h legen und dann die Summe dieser Kugel und $\mathfrak{K}$ selbst nehmen. Es sei jetzt $\mathfrak{p}_i$ ein beliebiger Eckpunkt. Der Normalsektor in $\mathfrak{p}_i$ bestimmt auf der Kugel $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_i}$ um $\mathfrak{p}_i$ ein Gebiet $\overline{\mathfrak{R}}_h(\mathfrak{p}_i)$, das vollständig im Rande von $\mathfrak{K}_h$ enthalten ist. Wenn nun der repräsentative Punkt Q der Normalrichtung der Stützebene $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_i)$ durchläuft, umhüllen die Stützebenen von $p + h\bar{p}$ ein Gebiet, das nichts anderes ist, als eine auf $\mathfrak{S}_h(\mathfrak{p}_i)$ aufgesetzte Kappe mit derselben Öffnung ψ_i, wie die Öffnung des kleinsten Rotationskegels in der Ecke $\mathfrak{p}_i$. Da das Volumen dieser Kappe $h^n D(\mathfrak{p}_i)$ ist, so ist hiermit (4. 9) und damit (4. 3) bewiesen.

Es bleibt das Volumen $D(\mathfrak{p}_i)$ einer Kappe von $\mathfrak{K}$ zu berechnen. Die Aufgabe ist leicht und erfordert nur elementare Rechnungen. Man findet

$$D(\mathfrak{p}_i) = \frac{W_{n-1}}{n}\left\{\frac{\sin^{n-1}\psi_i}{\cos\psi_i} - (n-1)\int_0^{\psi_i}\sin^{n-2}\vartheta\, d\vartheta\right\}, \tag{4.10}$$

oder

$$D(\mathfrak{p}_i) = \frac{W_{n-1}}{n}\int_0^{\psi_i}\frac{\sin^n x}{\cos^2 x}\, dx,$$

wobei W_{n-1} das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Kugel bedeutet. Da nun für das Volumen von $\overline{\mathfrak{K}}$

$$\overline{V} = W_n + \frac{W_{n-1}}{n}\sum_i\int_0^{\psi_i}\frac{\sin^n x}{\cos^2 x}\, dx \tag{4.11}$$

gilt, so folgt daraus (2. 4) unmittelbar. Für $n = 3$ folgt schon (2. 3). Allerdings gilt die Formel (4. 11) auch für $n = 2$ und gibt (wenn man noch $\frac{\psi_i}{2}$ statt ψ_i schreibt) die Verschärfung von Bol für die Ebene wieder. Da die Frage des Eintretens des Gleichheitszeichens schon mit (4. 2) erledigt ist, so ist hiermit das Hauptresultat dieser Arbeit bewiesen.

(Eingegangen am 16. April 1941.)

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Domherrn Dr. Dr.-Ing. ALFRED ACKERMANN-TEUBNER in Leipzig im Jahre 1912 der Universität Leipzig gestiftete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften" in Höhe von RM. 500.— ist für das Jahr 1941 durch das Preisgericht dem Professor an der Universität Göttingen Dr. P. TEN BRUGGENCATE für seine Arbeiten zur Erforschung der Fixsternatmosphäre zuerkannt worden

Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. *Einleitung.* In der vorliegenden Arbeit sollen durch eine einfache Methode einige isoperimetrische Gleichungen in gewissen zwei- und mehrdimensionalen Räumen bewiesen werden, aus denen leicht eine Anzahl von isoperimetrischen Ungleichungen folgen. Insbesondere werden dadurch erfaßt, neu bewiesen und verschärft alle diejenigen Ungleichungen aus dem Gebiet des klassischen isoperimetrischen Problems, die Erhard Schmidt in einer Reihe wichtiger Arbeiten[1]) begründet hat.

Die Tatsache, daß hier die fraglichen isoperimetrischen Ungleichungen zuerst in einer Form von Gleichungen bewiesen werden, erleichtert die Diskussion der Extremalkurven bzw. -Flächen sehr. Dies wird noch durch die weitere Tatsache ergänzt, daß in den betreffenden Gleichungen nur Größen mit einer geometrischen Bedeutung eintreten, und zwar in einer Form, welche sofort auf diejenigen Bewegungsgruppen der Kurven bzw. Flächen hinweisen, für welche die isoperimetrischen Gleichungen invariant bleiben. Man erhält somit einen leichten geometrischen Zugang zu den tieferliegenden Untersuchungen von Erhard Schmidt[2]), welcher neuerdings für den Fall einer zweidimensionalen Rotationsmannigfaltigkeit das klassische isoperimetrische Problem erheblich verallgemeinert hat.

Das Problem, das hier behandelt wird, ist zuerst das klassische isoperimetrische Problem in den zwei- und mehrdimensionalen Räumen konstanter Krümmung in der Fassung von Erhard Schmidt. Speziell kommen hier in Frage außer dem gewöhnlichen euklidischen Raum noch der sphärische und der hyperbolische Raum. Diese beiden letzteren Räume weisen bekanntlich mit dem euklidischen Raum die gemeinsame Eigenschaft auf, daß sie eine

[1]) Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689–788. Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolischen Ebene und für Rotationskörper im n-dimensionalen hyperbolischen Raum. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 204–240. Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen Raum. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 743–794. Sie werden im folgenden mit I, II, III zitiert.

[2]) Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 489–642.

überall reguläre isometrische Transformationsgruppe besitzen, und ferner die Eigenschaft des einfachen Zusammenhangs, und zwar in dem Sinne, daß jede geschlossene Linie in diesen Räumen durch stetige Veränderung in einen Punkt reduziert werden kann. Das besagt natürlich nicht, daß das isoperimetrische Problem für den elliptischen Raum nicht gestellt und gelöst werden kann. Mit Rücksicht auf verwandte Entwicklungen, die erst zum Schluß dieser Arbeit angedeutet werden, wird diese Aufgabe unter Zugrundelegung einer CAYLEY-KLEINschen Metrik später behandelt werden.

Für Mannigfaltigkeiten mit der Metrik $ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2$ kann man diese SCHMIDTsche Aufgabe folgendermaßen formulieren:

Unter allen einfachen geschlossenen Kurven, welche auf der betreffenden Mannigfaltigkeit verlaufen und die in den Streifen $a \leqq u \leqq b$ so eingeschrieben werden können, daß C mit den beiden Linien $u = a$, $u = b$ gemeinsame Punkte hat, soll diejenige ermittelt werden, welche bei vorgegebener Länge das Maximum des eingeschlossenen Inhalts aufweist.

Diese Aufgabe wird hier für $n = 2$ außer für $\varphi(u) = \cos\sqrt{K}\,u$ $(K \gtrless 0)$ noch für einige andere Rotationsmannigfaltigkeiten und ihre Überlagerungsflächen bewiesen. Allgemeine Aufgaben wie diejenige, die ERHARD SCHMIDT in seiner vorhin erwähnten Arbeit behandelt hat, werden von mir hier nicht untersucht werden, obwohl die hier angewandte Methode zum Teil auch dort ihre Kraft behält.

Für mehrdimensionale Räume konstanter Krümmung, nämlich für den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum, wird eine ähnliche ebenfalls von SCHMIDT stammende Aufgabe behandelt. Sie ist der vorherigen analog mit dem einzigen Unterschied, daß hier der Streifen durch denjenigen Zylinder ersetzt wird, den eine n-dimensionale geodätische Kugel des betreffenden Raumes beschreibt, wenn man ihren Mittelpunkt längs einer geeigneten Parameterlinie bewegt. Diese Formulierung wird allerdings an der richtigen Stelle präziser gefaßt werden.

Daß die Aufgabe zuerst nur für „Rotationskörper" gestellt werden kann, ist einleuchtend. Die hier eingeschlagene Methode würde allerdings ebenso mühelos den Fall eines Körpers behandeln, dessen Projektion längs einer Parameterlinie, der „Achse", eine $(n-1)$-dimensionale geodätische Kugel der Mannigfaltigkeit ausfüllt. In Anbetracht dessen, daß man jeden Körper durch SCHWARZsche Abrundung unter Beibehaltung des Volumens und ohne Vergrößerung der Oberfläche auf einen „Rotationskörper" zurückführen kann, wird hier auf diese komplizierteren Voraussetzungen verzichtet werden. Jedoch wird mit Absicht eine Anzahl von Rechnungen ohne Benutzung von Rotationseigenschaften durchgeführt, so daß der interessierte Leser die Beweise von dieser einschränkenden Voraussetzung schnell befreien kann. Die wichtige Übertragung der SCHWARZschen Abrundung auf

die hier untersuchten sphärischen und hyperbolischen Räume verdankt man Erhard Schmidt, dessen Arbeit demnächst erscheinen soll.

Der Hauptgedanke der vorliegenden Arbeit besteht darin, daß an Stelle von $\int ds$, erstreckt über eine zulässige Kurve C, das Integral $\int \cos(n, \bar{n})\, ds$ betrachtet wird, wobei n, $\bar{n}$ die äußeren Normalen von C und einer „Extremalen" bedeuten, genommen in geeignet zugeordneten Punkten. Analoges gilt für die Verallgemeinerung der Aufgabe auf höherdimensionale Räume.

Die Abänderung des Integrals bringt nicht nur große Vereinfachungen mit sich, sondern führt auch ohne Mühe zu einer Klassifikation der eintretenden Extremalen und Aufstellung mancher neuen Gleichungen bzw. Ungleichungen.

Die Extremalen, die hier eintreten, sind von zweierlei Art, und zwar Extremalkurven bzw. Körper von linsenförmigem Typus, und solche vom Kreis-Rechteck- bzw. Kugel-Zylinder-Typus. Sie besitzen immer eine Symmetrieachse im zweidimensionalen Fall und eine Hyperfläche im mehrdimensionalen. Der Kreis bzw. die Kugel ist in diesen Extremalen enthalten.

Ich behandle im ersten Teil den Fall der gewöhnlichen Ebene und dann denjenigen der gewöhnlichen Kugel und der hyperbolischen Ebene. In den beiden letzten Fällen wird die Krümmung $+1$ bzw. -1 genommen. Die Verallgemeinerung für beliebige Krümmung wird auf Grund der geometrischen Deutung der eintretenden Größen zum Schluß der Arbeit gegeben. Die Behandlung der allgemeinen Rotationsflächen wird gleich nach der hyperbolischen Ebene durchgeführt werden.

Im zweiten Teil soll die Schmidtsche Aufgabe für den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen n-dimensionalen Raum behandelt werden. Verallgemeinerungen auf „Rotationsräume" werde ich in dieser Arbeit nicht untersuchen.

Zum Schluß möchte ich noch auf folgende Tatsache aufmerksam machen: In allen drei Räumen, dem euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum, gilt für die hier behandelte Aufgabe eine und dieselbe isoperimetrische Gleichung bzw. Ungleichung. Diese enthält außer dem Inhalt und der Oberfläche des betrachteten Körpers und des „Extremalkörpers" noch zwei Parameter, von denen der eine von einem „Winkel" γ abhängt, während der zweite den geodätischen Krümmungsradius eines Kreises bzw. die mittlere Krümmung einer Kugel darstellt.

Als Folge der „linearen" Gleichungen bzw. Ungleichungen werden unter anderem auch die allgemeinen isoperimetrischen Ungleichungen für den n-dimensionalen sphärischen und hyperbolischen Raum aufgestellt, und zwar so, daß die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung für den euklidischen Raum als Grenzfall dieser allgemeinen Ungleichung für $K \to 0$ erscheint,

wenn K die Krümmung des betreffenden Raumes darstellt. Diese Ungleichung hängt im allgemeinen mit einem unvollständigen Eulerschen Integral erster Gattung zusammen und sieht folgendermaßen aus:

$$V \leqq n W_n \int_0^{\sqrt[n-1]{\frac{O}{n W_n}}} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1 - K x^2}}\, dx. \tag{1.1}$$

Dabei bedeuten V und O das Volumen bzw. die Oberfläche des betrachteten Körpers und nW_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel. Läßt man hier die Krümmung K gegen Null streben, so geht (1. 1) in die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung über. Das Gleichheitszeichen tritt in (1. 1) nur für die Kugel ein. Die Ungleichung (1. 1) faßt die isoperimetrischen Ungleichungen in eine einzige Ungleichung zusammen. Sie wurden zuerst von Erhard Schmidt in den vorhin erwähnten Arbeiten bewiesen. Sie besagen, daß das Volumen eines Körpers $\mathfrak{K}$ im sphärischen und hyperbolischen Raum im allgemeinen kleiner ist als das Volumen derjenigen Kugel (bzw. geodätischen Kugel), deren Oberfläche gleich der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ ist. (1. 1) hat den Vorteil, diesen Satz einheitlich in allen drei Räumen konstanter Krümmung auszudrücken, und zwar so, daß der Übergang von einem dieser Räume zu einem anderen nur durch stetige Variation der Krümmung geschieht.

Herrn Prof. Erhard Schmidt bin ich zu besonderem Dank verpflichtet, nicht nur für das Interesse, das er meinen Untersuchungen ständig entgegenbrachte, sondern auch für die Tatsache, daß er mir Einblick in das Manuskript seiner zuletzt erwähnten Arbeit gewährte.

Erster Teil.

Die isoperimetrische Aufgabe auf einigen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Kapitel I.

Das isoperimetrische Problem für die gewöhnliche Ebene.

2. *Eine lineare Gleichung.* Wir betrachten (Fig. 1) in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O\,x\,y$ und den in bezug auf $O\,y$ symmetrischen Streifen

$$-a \leqq x \leqq a. \tag{2.1}$$

Die Koordinaten x, y eines Punktes P auf einer in diesem Streifen eingeschriebenen Kurve C stellen wir als Funktionen der Bogenlänge s von C durch $x = x(s)$, $y = y(s)$ dar und nehmen an, daß sowohl $x(s)$ wie $y(s)$ totalstetige Funktionen sind. Außer C betrachten wir eine linsenförmige

Figur K_γ, welche zu zwei Kreisen vom Radius ϱ_γ durch $x = \pm a$, $y = 0$ gehören. Verlangt man, daß sowohl K_1 wie K_2 in $x = \pm a$, $y = 0$ mit der x-Achse den Winkel γ bilden, wie dies gerade in der Figur gezeigt wird, so ist dadurch der Radius ϱ_γ bestimmt, und zwar gilt

$$\varrho_\gamma = \frac{a}{\cos\gamma}. \tag{2.1'}$$

Es seien nun A' bzw. B' (Fig. 1) die Punkte von C auf den Geraden α bzw. α' mit der größten Ordinate. Durch A', B' wird C [3]) in einen „oberen" Teil C' und einen „unteren" C'' zerlegt, und man kann dann mit Hilfe von Parallelen zur y-Achse jeden Punkt von C' eindeutig und stetig auf die Punkte von K_1, und die Punkte von C'' eindeutig und stetig auf die Punkte von K_2 zuordnen.

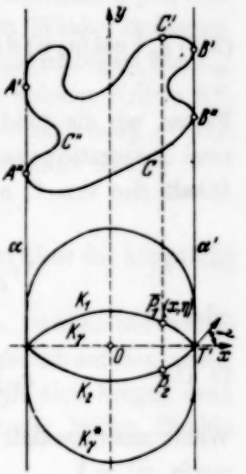

Fig. 1.

Es sei nun $(n, \bar{n})$ der Winkel der äußeren Normalen von C bzw. K_γ in entsprechenden Punkten [4]). Legt man das Lebesguesche Integral zugrunde, so existiert, da $(n, \bar{n})$ im höchstens abzählbaren Punkte nicht definiert ist, das Integral

$$\int_C \cos(n, \bar{n})\, ds \tag{2.2}$$

erstreckt im positiven Sinne. Führt man hier die Richtungskosinus der Normalen mit der x- bzw. y-Achse ein, so wird

$$\cos(n, \bar{n}) = \cos(n, x)\cos(\bar{n}, x) + \cos(n, y)\cos(\bar{n}, y). \tag{2.3}$$

Es sollen nun $\cos(\bar{n}, x)$ bzw. $\cos(\bar{n}, y)$ ausgewertet werden. Es seien x, y die Koordinaten eines Punktes P von C und x, η diejenigen des ihm zugeordneten Punktes $\bar{P}$ von K_γ. Die Gleichung von K_γ lautet nun

$$(\eta + a\,\mathrm{tg}\,\gamma)^2 + x^2 = \varrho_\gamma^2 \quad \text{für den Bogen } K_1, \quad \eta > 0 \tag{2.4}$$

und

$$(\eta - a\,\mathrm{tg}\,\gamma)^2 + x^2 = \varrho_\gamma^2 \quad \text{für den Bogen } K_2, \quad \eta < 0, \tag{2.5}$$

[3]) Es ist nicht notwendig, daß gerade diese Punkte die Teilung bewirken. Man kann auch zwei beliebige Punkte von C wählen, und zwar einen auf α und einen auf α'. In Fig. 1 sollte C'' am unteren Teil von C stehen.

[4]) Liegt der Punkt $\bar{P}$ von K_γ auf α bzw. α', so wird als Normale dort die Normale von K_1 bzw. von K_2 in diesen Punkten angenommen, je nachdem $\bar{P}$ auf C' bzw. C'' liegt. Es werden also diesen Punkten zwei verschiedenen Normalen zugeordnet. Diese Verabredung gilt auch für alle später zu behandelnden Fälle, ohne daß darauf nochmals hingewiesen wird. Entsprechende Annahme wird auch für räumlichen Fall gemacht.

wobei x zwischen $-a$ und $+a$ variiert. Daraus entnehmen wir leicht

(2. 6) $\varrho_\gamma \cos(\bar{n}, x) = x$ sowohl für K_1 wie für K_2,

und

(2. 7) $\varrho_\gamma \cos(\bar{n}, y) = (\eta + a \operatorname{tg}\gamma)$ für K_1 und $= (\eta - a \operatorname{tg}\gamma)$ für K_2.

Wählt man nun als positiven Durchlaufungssinn von C denjenigen, bei dem das Gebiet links vom Beobachter bleibt, so wird nach bekannten Formeln

$$(2.8) \qquad \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$$

und wir erhalten mit Rücksicht auf (2. 3)

$$(2.9) \quad \varrho_\gamma \int_C \cos(n, \bar{n})\, ds = \int_C x \frac{dy}{ds}\, ds - \int_C (\eta + a \operatorname{tg}\gamma) \frac{dx}{ds}\, ds + \int_{C'} (\eta - a \operatorname{tg}\gamma) \frac{dx}{ds}\, ds.$$

Fassen wir die beiden letzten Integrale in eins zusammen und führen x als neue Integrationsveränderliche ein, so wird, da das erste Integral rechts den Inhalt des von C eingeschlossenen Gebietes darstellt,

$$(2.10) \qquad \varrho_\gamma \int_C \cos(n, \bar{n})\, ds = J + 2 \int_{-a}^{+a} (\eta + a \operatorname{tg}\gamma)\, dx$$

oder

$$(2.11) \qquad \varrho_\gamma \int_C \cos(n, \bar{n})\, ds = J + 4 \int_0^a (\eta + a \operatorname{tg}\gamma)\, dx \qquad (\eta > 0).$$

Wählt man speziell als C die linsenförmige Figur K_γ selbst, so wird wegen $\cos(n, \bar{n}) = 1$

$$(2.12) \qquad \varrho_\gamma L_\gamma = J_\gamma + 4 \int_0^a (\eta + a \operatorname{tg}\gamma)\, dx,$$

wenn L_γ die Gesamtlänge von K_γ bedeutet.

Aus (2..11), (2. 12) folgt nun durch Subtraktion, wenn man noch $1 - 2 \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}$ an Stelle von $\cos(n, \bar{n})$ schreibt,

$$(2.13) \qquad (J - J_\gamma) \cos\gamma = a (L - L_\gamma) - 2a \int_C \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, ds.$$

Dabei ist L die Länge der willkürlichen Kurven C. Aus dieser wichtigen Gleichung (2. 13) können wir noch weitere Formeln erhalten, welche sich für das Spätere von großer Wichtigkeit erweisen werden.

Dazu setzen wir zuerst in (2. 13) $\gamma = 0$ ein, was dem Fall eines im Streifen eingeschriebenen Kreises vom Radius a entspricht, und bezeichnen allgemein das Restglied $\int_C$ mit $R(C)$. Dann wird

$$(2.14) \qquad J - J_0 = a (L - L_0) - 2a R(C)$$

oder, da $J_0 = \pi a^2$, $L_0 = 2\pi a$ ist,

$$J = La - \pi a^2 - 2aR(C), \tag{2.15}$$

was eine Verschärfung der bekannten Ungleichung

$$J \leqq La - \pi a^2 \tag{2.16}$$

liefert. Interessant ist in (2.15) die Tatsache, daß diese Gleichung für jede konvexe oder nicht konvexe Kurve gilt und daß das Restglied $R(C)$ eine anschauliche Bedeutung besitzt.

Nun ziehen wir die beiden Halbkreisbögen, aus denen der Kreis K_0 besteht, wie zwei Teile eines Teleskops auseinander und bezeichnen jetzt die so entstehende Kurve mit K_γ^*. Dabei soll hier γ keinen Winkel bedeuten, sondern die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Halbkreisbögen von K_0. Bezeichnet dann L_γ^*, J_γ^* die Länge bzw. den Inhalt einer solchen Kurve K_γ^*, so ist $L_\gamma^* = L_0 + 2\gamma$ und $J_\gamma^* = J_0 + 2a\gamma$, also $J_\gamma^* - aL_\gamma^* = J_0 - aL_0$. Wir erhalten demnach aus (2.12), da das Restglied invariant bleibt,

$$J - J_\gamma^* = a(L - L_\gamma^*) - 2aR(C). \tag{2.17}$$

Die Gleichungen (2.13) und (2.17) enthalten alles, was man über das klassische isoperimetrische Problem in der Ebene zu sagen hat.

Ehe wir zum Hauptsatz dieses Kapitels übergehen, wollen wir einige Bemerkungen über das Restglied $R(C)$ hinzufügen. Es scheint auf den ersten Blick, als ob diese Zuordnung ein willkürliches Element in sich berge; denn die Einteilung von C in zwei Teile C', C'' wurde durch die beiden Punkte A', B' mit den maximalen Ordinaten erreicht.

Man könnte die Teilung ebensogut durch andere Punkte bewirken, z. B. durch A'', B''. Das Resultat bleibt aber dabei unverändert; denn falls bei einer anderen Einteilung ein Teilbogen, dessen Endpunkte auf derselben Geraden α bzw. α' (z. B. Bogen $A'A''$) liegen, nicht K_1, sondern K_2 zugeordnet wird, so ist sein Beitrag zum Randintegral

$$\int_{A'A''} x\frac{dy}{ds}ds - \int_{A'A''} (\eta - a\operatorname{tg}\gamma)\frac{dx}{ds}ds. \tag{2.18}$$

Es ändert sich also nur das zweite Integral, was gerade hier gleich Null ist. Die Forderung, daß der obere Teil C' dem Bogen K_1 zugeordnet wird, und die entsprechende Forderung für C'' ist einleuchtend.

Wir fassen nun die gefundenen Gleichungen (2.13), (2.14) und (2.17) zusammen.

$$J - J_\gamma = \frac{a}{\cos\gamma}(L - L_\gamma) - \frac{2a}{\cos\gamma}R(C), \tag{2.19}$$

$$J = La - \pi a^2 - 2aR(C), \tag{2.20}$$

$$J - J_\gamma^* = a(L - L_\gamma^*) - 2aR(C). \tag{2.21}$$

Diese drei Gleichungen enthalten eine vollständige Lösung der im Anfang dieser Nummer gestellten Aufgabe nebst einer Beantwortung des allgemeinen isoperimetrischen Problems.

Wir nennen jetzt mit Rücksicht auf spätere Verallgemeinerungen die Doppellinse K_γ $\left(\text{also } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ eine linsenförmige Extremale und bezeichnen eine Kurve K_γ^* als eine Kreis-Rechteck-Extremale.

Die gestellte Aufgabe findet dann durch den nachstehenden Satz ihre Beantwortung:

Ist in der Ebene ein Parallelstreifen von der Breite $2a$ und ein Wert L gegeben, so wird das Maximum des von einer in diesem Streifen eingeschriebenen Kurve eingeschlossenen Inhalts entweder von einer linsenförmigen oder von einer Kreis-Rechteck-Extremale angenommen werden. Dabei ist in den letzteren auch der Kreis mitgerechnet worden, und zwar tritt für $4a < L < 2\pi a$ der erste Fall ein und für $2\pi a \leqq L$ der zweite Fall. Für $L \leqq 4a$ ist das Problem unlösbar.

Der Beweis dieses zuerst von Erhard Schmidt bewiesenen Satzes[5]) kann hier unmittelbar aus (2. 19), (2. 20), (2. 21) geschlossen werden, wenn man jedesmal eine Extremale mit vorgegebenem L konstruiert.

Wir erhalten dann

$$J - J_\gamma = -\frac{2a}{\cos\gamma} R(C), \tag{2. 22}$$

$$J - \pi a^2 = -2aR(C), \tag{2. 23}$$

$$J - J_\gamma^* = -2aR(C). \tag{2. 24}$$

Soll hier $J = J_\gamma$, $J = \pi a^2$, $J = J_\gamma^*$ werden, so muß $R(C) = 0$ sein, und das hat zur Folge, daß C bis auf Parallelverschiebung gleich K_γ oder K_0 oder K_γ^* wird, womit auch die Eindeutigkeit des Extremums bewiesen ist. Daß zu jedem zulässigen L genau eine und nur eine linsenförmige bzw. kreis-rechteckige Extremale konstruiert werden kann, leuchtet unmittelbar ein. Es wird bei der allgemeinen Behandlung der Aufgabe in Nr. 8 ausführlich gezeigt werden.

Wie nun aus (2. 20) die allgemeine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises folgt, wird hier nicht näher untersucht, da diese Tatsachen zur Genüge bekannt sind. Es wird nur darauf hingewiesen, daß man (2. 20) auch so schreiben kann:

$$4\pi J = L^2 - (L - 2\pi a)^2 - 8\pi a^2 R(C). \tag{2. 25}$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Vernachlässigung der negativen Glieder die isoperimetrische Ungleichung

$$4\pi J \leqq L^2, \tag{2. 26}$$

wo das Gleichheitszeichen nur für den Kreis eintritt.

---

[5]) Erhard Schmidt, I, S. 693.

Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß die hier erhaltenen Gleichungen translationsinvariant sind, also ist die Wahl eines symmetrischen Streifens unwesentlich.

Kapitel II.

Die isoperimetrische Aufgabe auf der gewöhnlichen Kugel.

3. *Eine lineare isoperimetrische Gleichung.* Wir betrachten im dreidimensionalen euklidischen Raum die Einheitskugel $\mathfrak{S}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3. 1}$$

und bezeichnen mit φ $(-\pi \leqq \varphi < \pi)$ und ϑ die geographische Länge bzw. Breite eines Punktes P von $\mathfrak{S}$. Unsere Aufgabe lautet: *Unter allen einfachen geschlossenen Kurven auf $\mathfrak{S}$ mit vorgegebener Länge L, welche im Streifen*

$$-a \leqq \vartheta \leqq a \tag{3. 2}$$

eingeschrieben werden können, soll diejenige ermittelt werden, welche das Maximum des eingeschlossenen Inhalts liefert.

Zur Lösung dieser Aufgabe verfahren wir wie in Nr. 2 und betrachten (Fig. 2) zwei in bezug auf die ϑ-Achse ($\varphi = 0$) symmetrische Kreisbögen (auf $\mathfrak{S}$) K_1 und K_2, welche ähnlich wie beim euklidischen Fall mit der ϑ-Achse den Winkel $\gamma\left(0 < \gamma \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ bilden. K_1, K_2 gehören dann zu zwei in bezug auf $\varphi = 0$ symmetrisch gelegenen geodätischen Kreisen, welche durch die Punkte $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ gehen. Wir werden bald in der von K_1, K_2 gebildeten Linse das Analogon unserer linsenförmigen Extremale K_γ wiedererkennen.

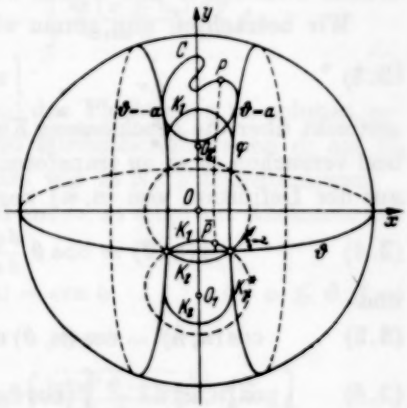

Fig. 2.

Es sei nun $P(\vartheta, \varphi)$ ein Punkt unserer geschlossenen Kurve C. Durch Parallelkreise können wir nun genau wie in der vorigen Nummer die Punkte von C eindeutig und stetig auf die Punkte von $K_\gamma = K_1 + K_2$ zuordnen, indem wir wieder C durch die Punkte mit maximalen φ (auf $\vartheta = -a$, $\vartheta = +a$) in zwei Teile C_1, C_2 zerlegen. Hat man so die beiden Kurven C_1, C_2 (C_1 entspricht dem früheren C', C_2 dem früheren C'') konstruiert, so ordnen wir die Punkte von C_1 dem Bogen K_1 und diejenigen von C_2 dem Bogen K_2 zu, indem wir einem Punkt ϑ, φ von C den Punkt ϑ, $\bar{\varphi}$ von K_1 oder

K_2 zuordnen, je nachdem P auf C_1 oder C_2 liegt. Bezeichnen dann $\vartheta = \vartheta(s)$, $\varphi = \varphi(s)$ die Gleichungen von C in Parameterdarstellung (wobei wieder vorausgesetzt wird, daß $\vartheta(s)$, $\varphi(s)$ totalstetige Funktionen der Bogenlänge s sind), so sind ϑ, $\bar{\varphi}$ wohlbestimmte Funktionen von s. Zur Definition des „inneren" Gebietes diene folgendes: Der Kurve C wird ein bestimmter Durchlaufungssinn (als positive Fortschreitungsrichtung) aufgeprägt. Ihr „Inneres" soll beim Durchlaufen der Kurve im positiven Sinne zur *Linken* bleiben. Diese Festlegung soll auch später gelten.

Wir bezeichnen nun mit $(n, \bar{n})$ den Winkel der äußeren Normalen von C und K_γ in den entsprechenden Punkten. Da es sich hier um Vektoren handelt, welche nicht notwendig durch einen Punkt gehen, ist eine Erklärung des Begriffes notwendig. Wir wählen eine feste Drehrichtung (z. B. die yOz-Richtung) für die Drehung von $\mathfrak{S}$ um die x-Achse und drehen $\mathfrak{S}$ solange, bis $\bar{P}$ mit P zusammenfällt. Dabei werden natürlich zwei ineinanderliegende Exemplare von $\mathfrak{S}$ konstruiert, von denen das eine fest gedacht und das andere um die x-Achse gedreht wird. Denkt man nun bei der Drehung den Vektor $\bar{n}$ mit der Kugel $\mathfrak{S}$ fest verbunden, so erhält dieser bei Zusammenfall von $\bar{P}$ mit P eine bestimmte Lage $\bar{n}'$. Der Winkel der beiden Vektoren n und $\bar{n}'$ wird nun als der Winkel zwischen den Vektoren n und $\bar{n}$ definiert. Dieser Winkel wird immer gemeint werden, wenn hier die Rede von dem Winkel zwischen n und $\bar{n}$ sein wird.

Wir betrachten nun genau wie in Nr. 2 das Integral

$$\int \cos(n, \bar{n})\, ds \tag{3. 3}$$

erstreckt über die geschlossene Kurve C in der üblichen positiven Richtung, und versuchen es so zu transformieren wie beim euklidischen Fall. Es folgt aus der Definition von $(n, \bar{n})$ wegen

$$\cos(n, \vartheta) = \cos\vartheta \frac{d\varphi}{ds}, \qquad \cos(n, \varphi) = -\frac{d\vartheta}{ds}, \tag{3. 4}$$

und

$$\cos(n, \bar{n}) = \cos(n, \vartheta)\cos(\bar{n}\ \vartheta) - \cos(n, \varphi)\cos(\bar{n}, \varphi), \tag{3. 5}$$

$$\int_C \cos(n, \bar{n})\, ds = \int_C \left\{\cos\vartheta \cos(\bar{n}, \vartheta)\frac{d\varphi}{ds} - \cos(\bar{n}, \varphi)\frac{d\vartheta}{ds}\right\} ds. \tag{3. 6}$$

Wir berechnen jetzt den sphärischen Radius b von K_1 bzw. K_2 und die $\cos(\bar{n}, \vartheta)$, $\cos(\bar{n}, \varphi)$ der äußeren Normalen $\bar{n}$ von K_γ. Wir erhalten zuerst aus dem Ansatz für K_1

$$\cos(\bar{\varphi} + \eta_0)\cos\vartheta = \cos b \quad (\bar{\varphi} \geqq 0,\ \eta_0 > 0,\ -a \leqq \vartheta \leqq a), \tag{3. 7}$$

und da dieser geodätische Kreisbogen durch $\vartheta = \pm a$ geht, ist

$$\cos\eta_0 \cos a = \cos b. \tag{3. 8}$$

Nun sind die Richtungskosinus der äußeren Normalen $\bar{n}$ von K_1 gleich [6])

$$(3.9)\qquad \cos(\bar{n},\vartheta) = \cot b \operatorname{tg}\vartheta, \qquad \cos(\bar{n},\varphi) = \cot b \frac{\operatorname{tg}(\bar{\varphi}+\eta_0)}{\cos\vartheta},$$

und wir erhalten für $\vartheta = a$ wegen $\cos(\bar{n},\vartheta) = \cos\gamma$

$$(3.10)\qquad \cos\gamma = \cot b \operatorname{tg} a.$$

Für die Komponenten der äußeren Normalen von K_2 finden wir (mit $\operatorname{tg}(\bar{\varphi}-\eta_0)$ an Stelle von $\operatorname{tg}(\bar{\varphi}+\eta_0)$) genau dieselben Werte (3.9) wieder.

Aus (3.10) folgt nun

$$(3.11)\qquad \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos\gamma},$$

eine Gleichung, welche das Analogon von (2.1′) darstellt. Setzt man hier $\varrho_\gamma = \operatorname{tg} b$, $\varrho_0 = \operatorname{tg} a$, so wird

$$(3.12)\qquad \varrho_\gamma = \frac{\varrho_0}{\cos\gamma}.$$

Die Größen $\operatorname{ctg} a$, $\operatorname{ctg} b$ sind allerdings nichts anderes als die geodätischen Krümmungen der geodätischen Kreise mit dem sphärischen Radius a bzw. b.

Wir führen jetzt die Werte (3.9) in (3.6) ein und erhalten zuerst

$$(3.13)\qquad \varrho_\gamma \int_C \cos(n,\bar{n})\,ds = \int_C \sin\vartheta \frac{d\varphi}{ds}\,ds - \int_C \frac{\operatorname{tg}(\bar{\varphi}\pm\eta_0)}{\cos\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}\,ds.$$

Dabei ist im letzten Integral für $\operatorname{tg}(\bar{\varphi}\pm\eta_0)$ das Pluszeichen zu nehmen, solange der Punkt $P(\vartheta,\varphi)$ auf C_1, und das Minuszeichen, wenn er auf C_2 läuft. Dieses Integral kann man nun genau wie in Nr. 2 transformieren.

Bezeichnet man nämlich dieses Integral mit ω, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung

$$(3.14)\qquad \cos\vartheta\cos(\bar{\varphi}\pm\eta_0) = \cos b \qquad (-a \leqq \vartheta \leqq a)$$

von K_1 bzw. K_2

$$(3.15)\qquad \omega = -\int_{C_1} \frac{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2 b}}{\cos\vartheta\cos b}\frac{d\vartheta}{ds}\,ds + \int_{C_2} \frac{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2 b}}{\cos\vartheta\cos b}\frac{d\vartheta}{ds}\,ds.$$

Diese Integrale sind nun offenbar von der speziellen Kurve C unabhängig und einander gleich. Man findet nach einfacher Rechnung

$$(3.16)\qquad \omega = \omega(a,b) = 4\int_0^a \sqrt{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2\vartheta}\,d\vartheta,$$

---

[6]) Für die Ausrechnungstechnik vgl. S. 712.

womit (3. 13) wird:

$$\varrho_\gamma \int_C \cos(n, \bar{n})\, ds = J + \omega(a, b), \tag{3. 17}$$

da ja das erste Integral dort den von C eingeschlossenen Inhalt darstellt[7]).

Um die Größe $\omega(a, b)$ auszurechnen, wählen wir nach dem Vorbild von Nr. 2 an Stelle von C die Doppellinse K_γ und wenden dasselbe Verfahren an.

Wir erhalten dann wegen $\cos(n, \bar{n}) = 1$

$$\varrho_\gamma L_\gamma = J_\gamma + \omega(a, b), \tag{3. 18}$$

es wird also

$$J - J_\gamma = \varrho_\gamma \int \cos(n, \bar{n})\, ds - \varrho_\gamma L_\gamma. \tag{3. 19}$$

Dabei bedeutet L_γ die Länge von K_γ und J_γ den von K_γ eingeschlossenen Inhalt. Führt man hier wieder $1 - 2\sin^2\frac{(n, \bar{n})}{2}$ an Stelle von $\cos(n, \bar{n})$ ein, so erhält man das vollkommene Analogon zu (2. 13)

$$J - J_\gamma = \varrho_\gamma (L - L_\gamma) - 2\varrho_\gamma R(C), \tag{3. 20}$$

wobei $R(C) \int_C \sin^2\frac{(n, \bar{n})}{2}\, ds$ darstellt.

Daß das Restglied genau wie im euklidischen Fall von der Einteilung von C in zwei Teile C_1, C_2 unabhängig ist, kann man auf ähnlichem Wege einsehen. Aus (3. 20) erhalten wir (da dieselben Rechnungen auch für $\gamma = 0$ gelten) wegen

$$J_0 = 2\pi(1 - \cos a), \quad L_0 = 2\pi \sin a, \quad \varrho_0 = \operatorname{tg} a \tag{3. 21}$$

die Gleichung

$$(2\pi - J)\cos a + L \sin a = 2\pi + 2 \sin a\, R(C). \tag{3. 22}$$

Daraus folgt unmittelbar die zuerst von Erhard Schmidt bewiesene Ungleichung[8])

$$2\pi \leqq L \sin a + (2\pi - J)\cos a. \tag{3. 23}$$

4 *Der allgemeine Satz.* Um nun weitere „Extremalen" zu konstruieren, ziehen wir die beiden Halbkreisbögen des Kreises K_0 wie zwei Teile eines

---

[7]) Es ist $J = \int \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta$, erstreckt über das Innere von C. Daraus folgt unmittelbar $J = \int \sin\vartheta \frac{d\varphi}{ds}\, ds$, erstreckt über den Rand von C in dem üblichen positiven Sinne.

[8]) Schmidt, II, S. 753. Daß daraus mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung auch die isoperimetrische Ungleichung $J(4\pi - J) \leqq L^2$ folgt, wurde ebenfalls von Schmidt bewiesen. Wie aus den Ausführungen von Erhard Schmidt folgt, kann man für die isoperimetrischen Probleme auf der Kugel die Annahme $L \leqq 2\pi$, $J \leqq 2\pi$ machen.

Teleskops auseinander. Bezeichnet γ die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Halbkreise, so entsteht daraus eine Figur, welche von den zwei Halbkreisbögen und zwei Bögen der Parallelkreise $\vartheta = \pm a$ begrenzt ist. Wir sprechen dann von einer „Kreis-Rechteck"-Extremale vom Typus K_γ^*. Ist $\gamma < 2\pi - 2a$, so überdeckt das von K_γ^* berandete Gebiet die Kugel einfach, und die maximale Extremale von diesem Typus hat die Gesamtlänge $L_{2\pi-2a}^* = 2\pi \sin a + 2(2\pi - 2a)\cos a$. Sie berandet ein Flächenstück mit dem Inhalt $J_{2\pi-2a}^* = 2(2\pi - 2a)\sin a + 2\pi(1 - \cos a)$. Im allgemeinen gilt

$$L_\gamma^* = 2\pi \sin a + 2\gamma \cos a \quad \text{und} \quad J_\gamma^* = 2\gamma \sin a + 2\pi(1 - \cos a),$$

wobei L_γ^* die Länge und J_γ^* den Inhalt von K_γ^* bedeutet. Da bei dieser Transformation $L_0 \operatorname{tg} a - J_0 = L_\gamma^* \operatorname{tg} a - J_\gamma^*$ bleibt und das Restglied $R(C)$ invariant ist, so erhalten wir zusammenfassend folgende Gleichungen:

$$(J - J_\gamma)\cos\gamma = \operatorname{tg} a\,(L - L_\gamma) - 2 \operatorname{tg} a\, R(C), \tag{4. 1}$$

$$(2\pi - J)\cos a + L \sin a = 2\pi + 2 \sin a\, R(C) \tag{4. 2}$$

und

$$J - J_\gamma^* = \operatorname{tg} a\,(L - L_\gamma^*) - 2 \operatorname{tg} a\, R(C), \tag{4. 3}$$

wobei das Restglied unter der Voraussetzung $L = L_\gamma$ bzw. $L = L_\gamma^*$ nur dann verschwindet, wenn C bis auf Verschiebung kongruent K_γ bzw. K_γ^* ist. Diese drei Gleichungen enthalten alles, was man über das isoperimetrische Problem auf der Kugel zu sagen hat. Wir fassen das Resultat im folgenden Satz zusammen:

Ist ein symmetrischer Streifen $-a \leqq \vartheta \leqq a \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$ *gegeben, so hat die isoperimetrische Aufgabe für*

$$4a < L < 2\pi \sin a \tag{4. 4}$$

eine Lösung. Die Extremale K_γ *ist eine solche von linsenförmigem Typus mit der Länge* $L_\gamma = L$. *Jede andere gleichlange Kurve* C, *welche* $\mathfrak{S}$ *schlicht überdeckt, umschließt ein Gebiet mit kleinerem Inhalt als* J_γ. *Ist ferner*

$$2\pi \sin a \leqq L < 2\pi \sin a + 2(2\pi - 2a)\cos a, \tag{4. 5}$$

so ist die gesuchte Extremale eine Kurve K_γ^* *vom „Kreis-Rechteck"-Typus mit* $L_\gamma^* = L$. *Für* $2\pi \sin a + 2(2\pi - 2a)\cos a \leqq L$ *gibt es keine schlichten Extremalen.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus (4. 1), (4. 2) und (4. 3) unmittelbar, wenn man zu dem vorgegebenen L diejenige Extremale K_γ oder K_γ^* konstruiert, welche dieses L als Gesamtlänge besitzt. Daß diese Extremalen eindeutig durch ihre Länge L_γ bzw. L_γ^* bestimmt sind, folgt aus der Monotonität dieser Größen als Funktionen von γ. Diese Tatsache ist für Extremalen vom Kreis-

Rechteck-Typus einleuchtend. Für die Gesamtlänge L_γ einer linsenförmigen Extremale K_γ findet man nun unter Zugrundelegung der entsprechenden Metrik und der Gleichung (3. 7)

$$L_\gamma = 4 \int_0^a \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}} \qquad \left(k_\gamma = \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} a}\right), \tag{4. 6}$$

woraus die behauptete Monotonität unmittelbar folgt.

Läßt man schließlich die Forderung der schlichten Überdeckung fallen, so hat man für jedes $4a < L$ eine Lösung, wenn man an Stelle des Streifens dessen universelle Überlagerungsfläche betrachtet. Auf weitere Einzelheiten wird hier nicht eingegangen.

Kapitel III.

Die isoperimetrische Aufgabe für die hyperbolische Geometrie.

5. Die Behandlung der isoperimetrischen Aufgabe in der hyperbolischen Ebene mit der Metrik

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \operatorname{ch}^2 \vartheta \, d\varphi^2 \text{ [9]} \tag{5. 1}$$

kann durch die Einführung der Weierstrassschen projektiven Koordinaten genau so geführt werden wie die entsprechende Aufgabe auf der Kugel. Sie ist sogar noch leichter zu behandeln, da hier keine Einschränkungen für L nach oben eintreten.

Wir betrachten den dreidimensionalen projektiven Raum R_3 und denken uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$. Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes des projektiven Raumes R_3 in bezug auf O, so definieren wir das Bogenelement in R_3 durch

$$ds^2 = -dz^2 + dy^2 + dx^2. \tag{5. 2}$$

Setzt man dann

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sh} \vartheta, \\ y &= \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh} \varphi, \\ z &= \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \tag{5. 3}$$

so erscheint die durch (5. 1) definierte Mannigfaltigkeit als eine „Fläche" in R_3, und zwar die Fläche mit der Gleichung

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1 \qquad (z > 1). \tag{5. 4}$$

[9]) sh, ch, tgh, coth bedeuten die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen. Für die hier benutzten Formeln und Begriffe vgl. man: H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. Zweite Aufl. Berlin 1912.

Wir wiederholen nun den Beweisgang von Nr. 2 in großen Linien, indem wir wieder den Fall eines symmetrischen Streifens

$$-a \leqq \vartheta \leqq a \tag{5. 5}$$

betrachten. Als K_γ nehmen wir zunächst den Durchschnitt der beiden hyperbolischen Kreise

$$\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{ch}(\bar{\varphi} \pm \eta_0) \leqq \operatorname{ch} b \quad [10] \qquad (\eta_0 > 0), \tag{5. 6}$$

wobei noch verlangt wird, daß die Kreise K_1,

$$\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{ch}(\bar{\varphi} + \eta_0) = \operatorname{ch} b, \tag{5. 6'}$$

und K_2,

$$\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{ch}(\bar{\varphi} - \eta_0) = \operatorname{ch} b, \tag{5. 7}$$

durch die Punkte $\vartheta = \pm a$, $\bar{\varphi} = 0$ gehen.

Es wird dann zuerst

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch}\eta_0 = \operatorname{ch} b. \tag{5. 8}$$

Für die Richtungskosinus der Normalen $\bar{n}$ von K_γ erhalten wir ähnlich wie vorhin

$$\cos(\bar{n}, \vartheta) = \operatorname{coth} b \operatorname{tgh}\vartheta, \qquad \cos(\bar{n}, \varphi) = \frac{\operatorname{coth} b \operatorname{tgh}(\bar{\varphi} \pm \eta_0)}{\operatorname{ch}\vartheta}, \tag{5. 9}$$

und zwar gilt Minus für den Bogen von K_2 und Plus für denjenigen von K_1. Fordert man nun, daß der Winkel, den die Normale von K_1 mit der ϑ-Achse bildet, bei $\vartheta = a$ gleich γ wird, so erhält man aus der ersten Gleichung (5. 9)

$$\cos\gamma = \operatorname{coth} b \operatorname{tgh} a, \tag{5. 10}$$

oder

$$\varrho_\gamma = \operatorname{tgh} b = \frac{\varrho_0}{\cos\gamma} = \frac{\operatorname{tgh} a}{\cos\gamma}. \tag{5. 11}$$

Genau wie in Nr. 2 bedeuten hier ϱ_γ bzw. ϱ_0 die geodätischen Krümmungsradien von K_γ bzw. K_0.

Für welche γ gibt es nun solche hyperbolische Kreise, die den Bedingungen (5. 6') und (5. 7) genügen? Die einzige Bedingung dafür wird uns durch (5. 11) gegeben, da ja für jedes endliche b gilt $\operatorname{tgh} b$ 1. Es muß also

$$\operatorname{tgh} a < \cos\gamma \tag{5. 12}$$

gelten und somit wird γ nach unten beschränkt. Es bleiben noch die übrigen Extremalen zu bestimmen, die größeren Winkeln γ entsprechen. Lassen wir

[10] Liebmann, S. 117.

den Grenzfall $b = \infty$ beiseite, so kann man sofort erkennen, daß die durch die beiden Abstandskurven oder Hyperkreisen (hypercycles) K_1, K_2

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{sh}(\bar{\varphi} + \eta_0) = \operatorname{sh} b && (\bar{\varphi} \geqq 0,\ \eta_0 > 0) \\ &\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{sh}(\bar{\varphi} - \eta_0) = -\operatorname{sh} b && (\bar{\varphi} \leqq 0,\ \eta_0 > 0) \end{aligned} \tag{5. 13}$$

begrenztes Gebiet ebenfalls ein Extremalgebiet darstellt. K_2 ist das Spiegelbild von K_1 in bezug auf $\varphi = 0$. Wählt man nun η_0 so, daß die Bedingung

$$\operatorname{ch} a \operatorname{sh}\eta_0 = \operatorname{sh} b \tag{5. 14}$$

erfüllt ist, so gehen die beiden Abstandskurven durch die Punkte $(\pm a, 0)$. Für die Richtungskosinus der äußeren Normale $\bar{n}$ der von den beiden Hyperkreisbögen begrenzten Figur finden wir

$$\cos(\bar{n}, \vartheta) = \operatorname{tgh} b \operatorname{tgh}\vartheta, \quad \cos(\bar{n}, \varphi) = \frac{\operatorname{tgh} b \coth(\bar{\varphi} \pm \eta_0)}{\operatorname{ch}\vartheta}, \tag{5. 15}$$

also das Analogon von (5. 9). Verlangt man nun, daß für $\vartheta = a$

$$\cos(\bar{n}, \vartheta) = \cos\gamma$$

wird, so folgt aus der ersten Formel (5. 15) das Gegenstück von (5. 10) bzw. (5. 11), nämlich die Bedingung

$$\cos\gamma = \operatorname{tgh} b \operatorname{tgh} a \tag{5. 16}$$

oder

$$\varrho_\gamma = \coth b = \frac{\varrho_0}{\cos\gamma} = \frac{\operatorname{tgh} a}{\cos\gamma}. \tag{5. 17}$$

Hier ist wieder $\varrho_\gamma\ (> 1)$ der geodätische Krümmungsradius der beiden Kreisbögen (5. 13). Wir bezeichnen das von ihnen begrenzte Gebiet wieder durch K_γ und nennen die so entstehenden Extremalgebiete wieder Gebiete von linsenförmigem Typus.

Wir wenden uns nun dem Fall $b = \infty$ zu. Die Extremale, welche diesem Fall entspricht, kann unmittelbar durch Grenzübergang aus einem hyperbolischen Kreis

$$\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{ch}(\bar{\varphi} + \eta_0) = \operatorname{ch} b \tag{5. 18}$$

oder aus einer Abstandskurve

$$\operatorname{ch}\vartheta \operatorname{sh}(\bar{\varphi} + \eta_0) = \operatorname{sh} b \tag{5. 19}$$

erhalten werden, wenn man $b \to \infty$ streben läßt unter Berücksichtigung von (5. 8) bzw. (5. 14). Man erhält sehr leicht einen sogenannten Grenzkreis (horicycle), dessen Gleichung

$$\operatorname{ch}\vartheta(\operatorname{ch}\bar{\varphi} + \operatorname{sh}\bar{\varphi}) = \operatorname{ch} a \quad (\bar{\varphi} \geqq 0,\ -a \leqq \vartheta \leqq a) \tag{5. 20}$$

lautet. Durch Spiegelung dieses Bogens an der Kurve $\varphi = 0$ entsteht ein Grenzgebiet K_a von linsenförmigem Typus, dessen Ränder den geodätischen

Krümmungsradius $\varrho_\gamma = 1$ besitzen. Der ihm entsprechende Neigungswinkel γ wird dann durch die Gleichung

$$\cos\gamma = \operatorname{tgh} a \tag{5. 21}$$

bestimmt.

Was die Richtungskosinus von K_a anbetrifft, so können diese aus (5. 9) oder (5. 15) berechnet werden. Man findet dann für $b \to \infty$

$$\cos(\bar{n}, \vartheta) = \operatorname{tgh}\vartheta, \quad \cos(\bar{n}, \varphi) = \pm\frac{1}{\operatorname{ch}\vartheta}, \tag{5. 22}$$

wobei das Pluszeichen dem oberen und das Minuszeichen dem unteren Bogen entspricht.

Ist nun C eine in (5. 5) eingeschriebene einfach geschlossene Kurve, so ordnen wir nach dem Vorgang von Nr. 2 jedem Punkt $P(\vartheta, \varphi)$ von C den Punkt $\bar{P}(\vartheta, \bar{\varphi})$ von K_γ zu, und zwar nach vorheriger Teilung von C durch die zwei Punkte $P_1(-a, \varphi_1)$ und $P_2(a, \varphi_2)$ in einen „oberen" Bogen C_1 und einen „unteren" C_2. C_1 wird K_1 zugeordnet und C_2 dem unteren Bogen K_2. Für die Funktionen $\vartheta(s)$, $\varphi(s)$, die C als Funktion ihrer Bogenlänge darstellen, setzten wir wie vorhin voraus, daß sowohl $\vartheta(s)$ wie $\varphi(s)$ totalstetige Funktionen von S sind. Ähnlich wie vorhin wird auch der Winkel der äußeren Normalen n von C und $\bar{n}$ von K_γ in den beiden einander zugeordneten Punkten definiert, entweder durch Drehung der Mannigfaltigkeit (5. 4) ähnlich wie im Falle der Kugel, oder direkt durch die Formel

$$\cos(n, \bar{n}) = \cos(n, \vartheta)\cos(\bar{n}, \vartheta) + \cos(n, \varphi)\cos(\bar{n}, \varphi). \tag{5. 23}$$

Wir betrachten nun wieder das Lebesguesche Integral

$$\int_C \cos(n, \bar{n})\, ds \tag{5. 24}$$

längs C und erhalten mit Rücksicht auf (5. 9), (5. 23) und

$$\cos(n, \vartheta) = \operatorname{ch}\vartheta\frac{d\varphi}{ds}, \qquad \cos(n, \varphi) = -\frac{d\vartheta}{ds} \tag{5. 25}$$

die Gleichung

$$\operatorname{tgh} b\int_C \cos(n, \bar{n})\, ds = \int_C \operatorname{sh}\vartheta\frac{d\varphi}{ds}\, ds - \int_C \frac{\operatorname{tgh}(\bar{\varphi} \pm \eta_0)}{\operatorname{ch}\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}\, ds. \tag{5. 26}$$

Dabei ist im letzten Integral für $\operatorname{tgh}(\bar{\varphi} \pm \eta_0)$ das Pluszeichen zu nehmen, solange $P(\vartheta, \varphi)$ auf C_1 läuft, und das Minuszeichen, solange er auf C_2 läuft. Mit Rücksicht auf die Gleichung des Randes von K_γ

$$\operatorname{ch}\vartheta\operatorname{ch}(\bar{\varphi} \pm \eta_0) = \operatorname{ch} b \tag{5. 27}$$

folgt nun leicht

$$(5.28)\qquad \omega = -\int_C \frac{\operatorname{tgh}(\overline{\varphi} \pm \eta_0)}{\operatorname{ch}\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}\,ds = -\int_{C_1}\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta - \operatorname{ch}^2 b}}{\operatorname{ch}\vartheta\operatorname{ch} b}\frac{d\vartheta}{ds}\,ds + \int_{C_2}\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta - \operatorname{ch}^2 b}}{\operatorname{ch}\vartheta\operatorname{ch} b}\frac{d\vartheta}{ds}\,ds,$$

oder wenn man ϑ als Veränderliche einführt,

$$(5.29)\qquad \omega = 4\int_0^a \sqrt{\operatorname{tg}^2\operatorname{h} b - \operatorname{tg}^2\operatorname{h}\vartheta}\,d\vartheta.$$

Wir erhalten also schließlich aus (5. 15) mit $\varrho_\gamma = \operatorname{tg} b$

$$(5.30)\qquad \varrho_\gamma\int_C \cos(n,\bar{n})\,ds = J + \omega(a,b),$$

da ja das erste Integral rechts in (5. 26) den von C eingeschlossenen Inhalt darstellt.

Die Größe $\omega(a,b)$ kann wieder durch Spezialisierung $C = K_\gamma$ bestimmt werden, also aus

$$(5.31)\qquad \varrho_\gamma L_\gamma = J_\gamma + \omega(a,b).$$

Man erhält dann durch Kombination von (5. 30) und (5. 31) und nach Ausführung einiger einfacher Umformungen

$$(5.32)\qquad J - J_\gamma = \varrho_\gamma(L - L_\gamma) - 2\varrho_\gamma\int_C \sin^2\frac{(n,\bar{n})}{2}\,ds.$$

Dabei ist L_γ die (hyperbolische) Länge von K_γ und J_γ der von ihr eingeschlossene (hyperbolische) Inhalt. K_γ wird ähnlich wie früher eine linsenförmige Extremale genannt.

Vollständig analog entwickeln sich die Rechnungen, wenn man von einer Abstandskurve ausgeht, d. h. wenn man die Formel (5. 15) bzw. (5. 22) an Stelle von (5. 9) benutzt. Man erhält wieder (5. 32), wobei dann ϱ_γ durch (5. 17) gegeben wird. Den Fall eines Grenzkreises $\varrho_\gamma = 1$ kann man am besten aus (5. 30) durch Grenzübergang $b \to \infty$ erhalten, was auch $\operatorname{tgh} b = 1$ entspricht. Alle drei Fälle können in der allgemeinen Formel

$$(5.33)\qquad \varrho_\gamma\int_C \cos(n,\bar{n})\,ds = J_\gamma + 4\int_0^a \sqrt{\varrho_\gamma^2 - \operatorname{tg}^2 h\vartheta}\,d\vartheta$$

mit $\varrho_\gamma\cos\gamma = \operatorname{tgh} a$ zusammengefaßt werden. Daraus folgt dann für alle drei Fälle die Gleichung (5. 32) unmittelbar. Wir werden allerdings sehen, daß die hier gefundene Formel ein Spezialfall einer allgemeineren ist, die man erhält, wenn die Differentialgleichung der geodätischen Kreise zugrunde ge-

legt wird. Dort tritt auch die Bedeutung von ϱ_γ als geodätischer Krümmungsradius unmittelbar hervor.

Für $\gamma = 0$ wird K_0 der geodätische Kreis mit Radius a, welcher den Streifen (5. 5) berührt. Durch Auseinanderziehen der beiden Halbkreise K_1, K_2 aus denen K_0 besteht, längs des Streifens (5. 5), entstehen hier wieder die „Kreis-Rechteck"-Extremalen K_γ^*. γ ist dann die „Entfernung" der Mittelpunkte O_1, O_2 von K_1 bzw. K_2, also $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$, wenn $(0, \varphi_1)$, $(0, \varphi_2)$, $(\varphi_1 < \varphi_2)$ die Koordinaten von O_1, O_2 bedeuten.

Wir schreiben hier nur das Resultat an:

$$J - J_\gamma^* = \operatorname{tgh} a\,(L - L_\gamma^*) - 2\operatorname{tgh} a \int_C \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, ds. \tag{5.34}$$

Für $\gamma = 0$ ist bekanntlich

$$J_0 = 2\pi(\operatorname{ch} a - 1), \quad L_0 = 2\pi \operatorname{sh} a, \tag{5.35}$$

es wird also

$$(2\pi + J)\operatorname{ch} a - L \operatorname{sh} a = 2\pi - 2 \operatorname{sh} a\, R(C), \tag{5.36}$$

wobei mit $R(C)$ wieder das Restglied bezeichnet wird. Daraus folgt unmittelbar die Ungleichung von Erhard Schmidt [11])

$$(2\pi + J)\operatorname{ch} a - L \operatorname{sh} a \leqq 2\pi. \tag{5.37}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung besitzt ein positives Minimum, welches für $\operatorname{tgh} a = L : 2\pi + J$ erreicht wird. Man erhält somit die ebenfalls von Erhard Schmidt gegebene Ungleichung [12])

$$J(2\pi + J) \leqq L^2, \tag{5.38}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Kreis erreicht wird.

Wir fassen nun alle drei gefundenen isoperimetrischen Gleichungen zusammen:

$$(J - J_\gamma)\cos\gamma = \operatorname{tgh} a\,(L - L_\gamma) - 2\operatorname{tgh} a\, R(C), \tag{5.39}$$

$$(2\pi + J)\operatorname{ch} a - L \operatorname{sh} a = 2\pi - 2 \operatorname{sh} a\, R(C) \tag{5.40}$$

und

$$J - J_\gamma^* = \operatorname{tgh} a\,(L - L_\gamma^*) - 2 \operatorname{sh} a\, R(C), \tag{5.41}$$

und drücken den Inhalt dieser drei Gleichungen in folgendem Satz aus:

---

[11]) Schmidt, II, S. 209.

[12]) Schmidt, III, S. 753. Fußnote. Schmidt benutzt gewöhnliche trigonometrische Funktionen, doch kann durch eine leichte Transformation seine Ungleichung in die (5. 37) übergeführt werden.

Die Lösung der gestellten isoperimetrischen Aufgabe für den Streifen (5.5) *besitzt immer eine und nur eine Lösung. Die gesuchte Extremale ist für*

$$4a < L < 2\pi \operatorname{sh} a \tag{5.42}$$

eine linsenförmige Extremale K_γ *von der Länge* $L_\gamma = L$ *und für*

$$2\pi \operatorname{sh} a \leqq L \tag{5.43}$$

eine solche vom „Kreis-Rechteck"-Typus mit der Länge $L_\gamma^* = L$. *Für* $L \leqq 4a$ *ist die Aufgabe unlösbar.*

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort aus (5.39), (5.41), wenn man dort $L_\gamma = L$ bzw. $L_\gamma^* = L$ setzt und dazu bemerkt, daß das Restglied unter diesen Voraussetzungen dann und nur dann verschwindet, wenn $C = K_\gamma$ bzw. $C = K_\gamma^*$ wird.

Dabei ändert eine Parallelverschiebung von C im Streifen nichts am Sachverhalt.

Daß hier die linsenförmigen Extremalen K_γ wieder durch L_γ eindeutig bestimmt sind, folgt aus der leicht zu erhaltenden Gleichung

$$L_\gamma = 4\int_0^a \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_\gamma^2 \operatorname{tg}^2 h\vartheta}} \qquad \left(k_\gamma = \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{tg} a}\right), \tag{5.44}$$

welche in der nächsten Nummer ausführlich bewiesen wird. Da ferner die Monotonität von L_γ^* aus der Definition derselben folgt, so ist hiermit auch die eindeutige Bestimmung der Extremalen durch die Vorgabe ihrer Länge gesichert.

Hiermit ist das Wesentliche über die klassische isoperimetrische Aufgabe in den drei Geometrien konstanter Krümmung gesagt. Im nächsten Kapitel werden ähnliche Resultate unter allgemeineren Voraussetzungen erhalten.

Kapitel IV.

Die isoperimetrische Aufgabe für eine Klasse von „Rotationsmannigfaltigkeiten".

6. *Vorbereitende Tatsachen.* Wir betrachten in diesem Kapitel zweidimensionale Mannigfaltigkeiten mit einer Metrik von der Form

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2, \tag{6.1}$$

und setzen voraus, daß $\varphi(u)$ in einem Intervall

$$-A \leqq u \leqq +A \tag{6.2}$$

eine positive stetige differenzierbare Funktion von u ist. Es handelt sich also entweder um gewöhnliche Rotationsflächen im dreidimensionalen Raum oder

um Mannigfaltigkeiten mit der Metrik einer solchen. Für die ersteren kann man u und v als die gewöhnliche Breite und Länge deuten und wird v als eine periodische Funktion mit der Periode 2π voraussetzen. Betrachtet man außer der Fläche F (6. 1) noch ihre universelle Überlagerungsfläche $\tilde{F}$, so stellen die Punkte $P(u, v)$, $P'(u, v + 2\pi n)$ (n ganz) zwei verschiedene Punkte von $\tilde{F}$ dar, die einem einzigen „Projektionspunkt" von F entsprechen. Wir beschränken uns im folgenden auf solche Mannigfaltigkeiten mit der Metrik (6. 1), für welche $\varphi(u)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. $\varphi(u)$ ist eine gerade Funktion von u, es gilt also in (6. 2)

$$\varphi(-u) = \varphi(u). \tag{6. 3}$$

2. Bedeutet $\psi(u)$ das Integral

$$\psi(u) = \int_0^u \varphi(x)\, dx, \tag{6. 4}$$

so ist $\omega(x) = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)}$ eine in (6. 2) vollmonotone Funktion von u. Mit vollmonoton werden Konstanten ausgeschlossen.

Wir schicken nun folgende grundlegenden Tatsachen voraus[14]) und verweisen für ein tieferes Eindringen in die hier entwickelten Begriffsbildungen auf das bekannte Buch von Darboux[13]). Eine Linie K auf F heißt nach Darboux ein geodätischer Kreisbogen, wenn K konstante geodätische Krümmung besitzt. K braucht natürlich nicht immer geschlossen zu sein, und sie ist es auch im allgemeinen nicht, mit Ausnahme der drei vorhin untersuchten Geometrien. Im folgenden wird nur von offenen geodätischen Kreisbögen die Rede sein, oder wenigstens von solchen geschlossenen Kurven in (6. 2), die man durch Spiegelung am Meridian $v = 0$ erhält.

Sind nun u, η die Koordinaten eines Punktes von K, so lautet die Differentialgleichung des geodätischen Kreisbogens[14])

$$\varphi(u)\frac{d\eta}{du} + \frac{A + k\psi(u)}{\sqrt{\varphi^2 - (A + k\psi)^2}} = 0, \tag{6. 5}$$

wobei A eine willkürliche Konstante ist und k die (konstante) geodätische Krümmung von K bedeutet, also

$$k = \frac{1}{\varrho_g}. \tag{6. 6}$$

Führt man in (6. 5) die Bogenlänge s von K als neuen Parameter ein, so folgt leicht

$$\frac{du}{ds} = -\sqrt{1 - \left(\frac{A + k\psi}{\varphi}\right)^2}, \qquad \varphi(u)\frac{d\eta}{ds} = \frac{A + k\psi(u)}{\varphi(u)}. \tag{6. 7}$$

[13]) Darboux, Théorie générale des surfaces Bd. III, Paris, Gauthier Villars (1894), S. 140.

[14]) Darboux, l. c., S. 153.

Es sei nun unsere Aufgabe für einen Streifen

$$(6.8) \qquad -a \leqq u \leqq a \qquad (-A < -a < a < A)$$

vorgelegt. Wir suchen zuerst eine Lösung K'_γ von (6.5) derart, daß K'_γ den Meridian $v = 0$ unter einem Winkel γ $\left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ schneidet. Dabei soll γ derjenige Winkel sein, den die äußere Normale $\bar{n}$ von K'_γ mit dem nach den wachsenden u gerichteten Tangentenvektor von $v = 0$ bildet. Wir verlangen noch, daß K'_γ durch die Punkte $(-a, 0)$, $(a, 0)$ geht und daß sie oberhalb $(v > 0)$ von $v = 0$ verläuft. Wegen der vorausgesetzten Symmetrie ist die erste dieser Bedingungen immer erfüllbar, die zweite trivial und durch die Transformation $v' = -v$ immer zu erreichen.

Als Richtung der äußeren Normale wird hier diejenige Normalrichtung angenommen, die zu der festgesetzten Durchlaufungsrichtung so liegt wie die Richtung des wachsenden u zur Richtung des wachsenden v. Als Durchlaufungsrichtung wird allerdings im Anschluß an frühere Überlegungen diejenige Durchlaufungsrichtung angenommen, die vom Punkte $(+a, 0)$ über K'_γ zum Punkte $(-a, 0)$ führt.

Da offenbar (6.7) die Koordinaten des Tangentenvektors von K'_γ darstellen, so sind die Komponenten $\cos(\bar{n}, u)$, $\cos(\bar{n}, v)$ der äußeren Normale $\bar{n}$ von K'_γ im Punkte P

$$(6.9) \qquad \cos(\bar{n}, u) = \varphi(u)\frac{d\eta}{ds}, \qquad \cos(\bar{n}, v) = -\frac{du}{ds},$$

also

$$(6.9') \qquad \cos(\bar{n}, u) = \frac{A + k\,\psi(u)}{\varphi(u)}, \qquad \cos(\bar{n}, v) = \sqrt{1 - \left(\frac{A + k\,\psi}{\varphi}\right)^2}.$$

Mit Hilfe der ersten dieser Gleichungen (6.9') erhalten wir dann für $u = \pm a$

$$(6.10) \qquad \begin{aligned} A + k\,\psi(-a) &= -\varphi(a)\cos\gamma, \\ A + k\,\psi(a) &= \varphi(a)\cos\gamma, \end{aligned}$$

also wegen $\varphi(-a) = \varphi(a)$, $\psi(-a) = -\psi(a)$,

$$(6.11) \qquad A = 0, \qquad k = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\cos\gamma.$$

Damit haben wir die geodätische Krümmung von K'_γ durch unsere Forderungen vollständig bestimmt. Für ϱ_γ, nämlich den geodätischen Krümmungsradius von K'_γ, finden wir dann in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen

$$(6.12) \qquad \varrho_\gamma = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\varrho_0}{\cos\gamma}.$$

Hiermit wird die Gleichung von K_γ'

$$\eta + \int_{-a}^{u} \frac{k\,\varphi(x)}{\varphi\sqrt{\varphi^2 - k^2\,\psi^2}}\,dx = 0 \quad [15] \qquad (\eta > 0). \tag{6.13}$$

Für $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ existiert dieses Integral für jedes $-a \leqq u \leqq a$ und ist endlich. Nach der Annahme der Nr. 2 ist dies aber auch für $\gamma = 0$ der Fall.

7. *Eine allgemeine isoperimetrische Gleichung.* Es sei nun C eine auf der Fläche F und im Streifen (6.2) eingeschriebene einfache geschlossene Kurve und es sei $u = u(s)$, $v = v(s)$ ihre Parameterdarstellung mittels der Bogenlänge s von C. Wir setzen wieder voraus, daß sowohl $u(s)$ wie $v(s)$ totalstetige Funktionen von s sind. Wir konstruieren zuerst eine linsenförmige Extremale K_γ $\left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$, indem wir K_γ' an dem Meridian $v = 0$ spiegeln, d. h. indem wir die Kurve K_γ''

$$\eta - \int_{-a}^{u} \frac{k\,\varphi(x)}{\varphi\sqrt{\varphi^2 - k^2\,\psi^2}}\,dx = 0 \tag{7.1}$$

konstruieren. Wir teilen wieder C in zwei Teilbögen C_1 und C_2 mit Hilfe zweier Punkte von C, die auf $u = -a$ bzw. $u = +a$ liegen, und ordnen mit Hilfe von Parallelkreisen jedem Punkt $P(u, v)$ des „oberen" Bogens C_1 den Punkt $\bar{P}(u, \eta)$ von K_γ' und jedem Punkt $P(u, v)$ des „unteren" Bogens C_2 den Punkt $\bar{P}(u, \eta)$ von K_γ'' zu. Den Winkel $(n, \bar{n})$ zwischen den äußeren Normalen n, $\bar{n}$ in entsprechenden Punkten definieren wir genau so wie vorhin durch die Formel

$$\cos(n, \bar{n}) = \cos(n, u)\cos(\bar{n}, u) + \cos(n, v)\cos(\bar{n}, v). \tag{7.2}$$

Beachtet man nun, daß für C

$$\cos(n, u) = \varphi(u)\frac{dv}{ds}, \qquad \cos(n, v) = -\frac{du}{ds} \tag{7.3}$$

gilt, so erhält man mit Rücksicht auf (6.9′) und der entsprechenden Formel für den Bogen K_γ''

$$\int_C \cos(n, \bar{n})\,ds = k\int_C \psi(u)\frac{dv}{ds}\,ds - \int_C \pm\sqrt{1 - k^2\frac{\psi^2}{\varphi^2}}\,\frac{du}{ds}\,ds. \tag{7.4}$$

Dabei ist im letzten Integral bei der Integration über C_1 das $+$-Zeichen zu nehmen und bei der Integration über C_2 das $-$-Zeichen.

---

[15]) In dieser Form können, wie dies auch später erklärt wird, die Gleichungen aller unserer vorhin angegebenen Extremalen gebracht werden, und zwar einzig und allein durch die Wahl von φ und k.

Eine leichte Überlegung zeigt, daß genau wie in den früheren Fällen dieses Integral von der speziellen Kurve C unabhängig ist, und daß die Gleichung besteht

$$(7.5)\quad -\int_C \pm \sqrt{1 - k^2\,\omega^2(u)}\,\frac{du}{ds}\,ds = 4\int_0^a \sqrt{1 - k^2\,\omega^2(u)}\,du = F(a,\gamma).$$

Dabei wurde $\omega(u) = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)}$ gesetzt. Beachtet man nun, daß das erste Integral rechts in (7. 4) den von C eingeschlossenen Inhalt J darstellt[16]), so wird

$$(7.6)\quad \int_C \cos(n,\bar{n})\,ds = kJ + F(a,\gamma).$$

Wählt man hier $C = K_\gamma$, so wird $\cos(n,\bar{n}) = 1$, also

$$(7.7)\quad L_\gamma = kJ_\gamma + F(a,\gamma).$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen und Ausführung einer elementaren Umformung folgt nun die fundamentale Gleichung

$$(7.8)\quad (J - J_\gamma)\cos\gamma = \varrho_\gamma(L - L_\gamma) - 2\,\varrho_\gamma R(C),$$

wenn in Übereinstimmung mit unseren früheren Bezeichnungen

$$(7.9)\quad R(C) = \int_C \sin^2\frac{(n,\bar{n})}{2}\,ds$$

gesetzt wird.

8. *Fortsetzung. Anwendungen.* Wie steht es nun mit der schlichten Überdeckung von F durch das von C behandelte Gebiet?

Diese Frage liegt natürlich vor, wenn F eine gewöhnliche Rotationsfläche ist oder wenn v innerhalb bestimmter Grenzen variiert, so daß sein Zuwachs um eine Periode bei konstantem u zu demselben Punkt auf der Fläche führt. Man kann dann die Periode von v gleich 2π wählen. Wie aus (6. 13) folgt, erreicht η sein Maximum η_m für $u = 0$, und es wird

$$(8.1)\quad \eta_m = k\int_0^a \frac{\psi(x)\,dx}{\varphi\sqrt{\varphi^2 - k^2\,\psi^2}}.$$

---

[16]) Es ist $J = \int \varphi\,du\,dv$ erstreckt über das Innere von C. Daraus folgt

$$J = \int_C \psi\,\frac{dt}{ds}\,ds.$$

Man bestätigt leicht, daß dieses Maximum eine in $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ monoton abnehmende Funktion von γ ist und daß

$$\frac{d\eta_m}{d\gamma} = -k_0 \sin\gamma \int_0^a \frac{\varphi\psi\, dx}{(\varphi^2 - k_0^2 \cos^2\gamma\, \psi^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \tag{8.2}$$

gilt. Dabei ist k_0 an Stelle von $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ gesetzt worden. Benutzt man die Abkürzung $\omega(x)$ für $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, so kann man auch schreiben

$$\eta_m = k \int_0^a \frac{\omega(x)\, dx}{\varphi(x)\sqrt{1 - k_0^2\, \omega^2 \cos^2\gamma}}, \tag{8.3}$$

und man sieht sofort ein, daß (8.3) wegen der Voraussetzung der Monotonität [17]) von $\omega(x)$ in (6.2) auch für $\gamma = 0$ existiert und endlich ist.

Wir bezeichnen mit η_0 die Größe

$$\eta_0 = k_0 \int_0^a \frac{\omega(x)\, dx}{\varphi\sqrt{1 - k_0^2\, \omega^2}}. \tag{8.4}$$

Ist dann

$$2\eta_0 < 2\pi, \tag{8.5}$$

so ist unsere linsenförmige Extremale K_γ für jedes $0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$ schlicht, und das von ihr berandete Gebiet überdeckt die Fläche F schlicht. Ob hier Extremalen vom „Kreis-Rechteck"-Typus existieren, hängt von der Erfüllbarkeit von (8.5) ab. Gibt es dann eine positive Zahl γ, so daß auch

$$2\eta_0 + \gamma < 2\pi \tag{8.6}$$

ist, so kann man durch Auseinanderziehen der beiden symmetrischen Bögen K_0', K_0'' von K_0 eine Extremale K_γ^* vom „Kreis-Rechteck"-Typus konstruieren. γ wird dann durch die beiden Meridiane $v = v_1$, $v = v_2$ gemessen, welche durch die Berührungspunkte von K_0', K_0'' mit den Parallelkreisen $u = -a$, $u = +a$ gehen. Es ist $\gamma = v_1 - v_2$, falls K_0' der Meridian $v = v_1$ entspricht.

Berechnen wir nun die Länge L_0 von K_0 [18]). Es ist

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2 d\eta^2 = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - k_0^2\, \psi^2}\, du^2, \tag{8.7}$$

---

[17]) Es ist dann $\omega'(a) > 0$. Hier ist die einzige Stelle, wo die Differenzierbarkeit von $\omega(x)$ gebraucht wird.

[18]) Dies setzt voraus, daß (8.5) erfüllt ist. Sonst fallen diese Betrachtungen fort.

also

$$L_0 = 4 \int_0^a \frac{d u}{\sqrt{1 - k_0^2 \omega^2}}. \tag{8.8}$$

Die Länge einer „Kreis-Rechteck"-Extremalen vom Typus K_γ^*, für welche (8. 6) erfüllt ist, ist gleich

$$L_\gamma^* = L_0 + 2 \varphi(a) \gamma. \tag{8.9}$$

Bezeichnet ferner J_γ^* den Inhalt von K_γ, so ist

$$J_\gamma^* = J_0 + 2 \psi(a) \gamma, \tag{8.10}$$

der Ausdruck $J_\gamma^* - \varrho_0 L_\gamma^*$ ist gleich $J_0 - \varrho_0 L_0$, und wir können schreiben

$$J - J_\gamma^* = \varrho_0 (L - L_\gamma^*) - 2 \varrho_0 R(C), \tag{8.11}$$

welche mit (7. 10) zusammen die gestellte Aufgabe vollkommen beantworten.

Wir fassen nochmals die hier gefundenen Ergebnisse zusammen und schreiben noch $\omega(a)$ an Stelle von ϱ_0:

$$(J - J_\gamma) \cos \gamma = \omega(a) (L - L_\gamma) - 2 \omega(a) R(C), \tag{8.12}$$

$$J \varphi(a) = L \psi(a) - 4 \varphi(a) \int_0^a \sqrt{\omega^2(a) - \omega^2(x)}\, d x - 2 \psi(a) R(C) \tag{8.13}$$

und

$$J - J_\gamma^* = \omega(a) (L - L_\gamma^*) - 2 \omega(a) R(C). \tag{8.14}$$

Die Form der Gleichung (8. 13) kann man entweder durch Transformation mittels (7. 5) erhalten oder durch direkte Ausrechnung von $J_0 - \varrho_0 L_0$. Man findet in der Tat

$$J_0 - \varrho_0 L_0 = J_0 - \omega(a) L_0 = 4 \int_0^a \sqrt{\omega^2(a) - \omega^2(x)}\, d x. \tag{8.15}$$

Die Gleichungen (8. 12), (8. 13) und (8. 14) enthalten die vorhin angegebenen Ungleichungen für die euklidische und hyperbolische Ebene und die gewöhnliche Kugel als Spezialfall, und zwar für $\varphi(u) = 1$, $\varphi(u) = \operatorname{ch} u$ und $\varphi(u) = \cos u$. Man kann diese drei Fälle einheitlich zusammenfassen, wenn man noch eine veränderliche Krümmung K einführt ($K \gtrless 0$) und

$$\varphi(u) = \cos \sqrt{K}\, u \tag{8.16}$$

setzt. Wir erhalten dann mit ϑ, φ an Stelle von u, v

$$\psi(\vartheta) = \int_0^\vartheta \cos \sqrt{K} x\, d x = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}\, \vartheta \tag{8.17}$$

und

$$\omega(\vartheta) = \frac{\psi(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{K}\, \vartheta}{\sqrt{K}}. \tag{8.18}$$

Somit wird allgemein

$$(8.19)\qquad (J - J_\gamma)\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}\,(L - L_\gamma) - 2\,\frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}\,R(C),$$

$$(8.20)\qquad J = L\frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}} - 4\int_0^a \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{K}\,a - \operatorname{tg}^2\sqrt{K}\,\vartheta}{K}}\,d\vartheta - 2\,\frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}\,R(C)$$

und

$$(8.21)\qquad J - J_\gamma^* = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}\,(L - L_\gamma^*) - 2\,\frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}\,R(C).$$

Läßt man hier $K \to 0$ streben, so erhält man die Gleichungen (2. 17), (2. 18) und (2. 19) für die euklidische Ebene.

Fassen wir alle vorherigen Ergebnisse dieser Nummer zusammen, so können wir im Falle einer gewöhnlichen Rotationsfläche folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Wird die hier behandelte isoperimetrische Aufgabe für eine Rotationsfläche mit der Metrik (6. 1) *und im Streifen* (6. 8) *gestellt, so ist die Lösung für*

$$(8.22)\qquad 4a < L < 4\,\omega(a)\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\omega^2(a) - \omega^2(x)}} = L_0$$

eine linsenförmige Extremale K_γ von der Länge $L_\gamma = L$. Für die Schlichtheit wird noch dabei

$$(8.23)\qquad \eta_0 = \int_0^a \frac{\omega(x)\,dx}{\varphi(x)\sqrt{\omega^2(a) - \omega^2(x)}} < \pi$$

vorausgesetzt.

Für

$$(8.24)\qquad L_0 \leqq L < L_0 + 2\,(2\pi - 2\,\eta_0)\,\varphi(a)$$

ist die Lösung eine Kurve K_γ^* vom „Kreis-Rechteck"-Typus mit $L_\gamma^* = L$.

Für $L \leqq 4a$ hat die Aufgabe keine Lösung, und für $L_0 + 2(2\pi - 2\eta_0)\,\varphi(a) < L$ bedeckt das Extremalgebiet die Rotationsfläche nicht schlicht.

Die einschränkende Bedingung (8. 23) und folglich die rechte Seite von (8. 24) fallen fort, wenn man entweder die universelle Überlagerungsfläche von F betrachtet oder wenn v (wie im Falle der hyperbolischen Ebene) vom $-\infty$ bis $+\infty$ variiert.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus den vorhin aufgestellten Gleichungen (8. 12), (8. 14) unmittelbar, wenn man die Extremalen K_γ, K_γ^* mit $L_\gamma = L$ bzw. $L_\gamma^* = L$ konstruiert und dabei beachtet, daß $R(C)$ unter diesen Voraussetzungen nur für $C = K_\gamma$ bzw. $C = K_\gamma^*$ Null wird, wir brauchen nur zu zeigen, daß diese Extremalen durch L_γ bzw. L_γ^* eindeutig bestimmt sind. Dies trifft offenbar für die Kreis-Rechteck-Extremalen K_γ^* zu, und es ist aus (8. 9)

unmittelbar abzulesen. Um L_γ zu berechnen, gehen wir wie bei der Berechnung von L_0 vor, indem wir (6. 13) und (7. 3) zugrunde legen. Es folgt daraus leicht mit Rücksicht auf (6. 1)

$$(8.\,25) \qquad L_\gamma = 4\int_0^a \frac{du}{\sqrt{1-k_\gamma^2\,\omega^2(u)}} \qquad \left(k_\gamma = \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\omega(a)}\right),$$

was die Monotonität von L_γ unmittelbar zum Ausdruck bringt. Diese Länge nimmt von $4a$ bis L_0 monoton zu, es gibt also für jedes L, welches (8. 22) genügt, eine und nur eine Extremale K_γ mit $L = L_\gamma$. Damit ist auch ein ausführlicher Beweis für die vorhin aufgestellten Ausdrücke der L_γ für die Fälle $\varphi(u) = \cos\sqrt{K}u$ $(K \gtrless 0)$ gegeben.

Zweiter Teil.

Die isoperimetrische Aufgabe in einem n-dimensionalen Raum konstanter Krümmung.

Kapitel V.

Der Fall eines n-dimensionalen euklidischen Raumes.

9. *Eine lineare Gleichung für Rotationskörper.* Es sei $\mathfrak{K}$ ein im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n $(n \geqq 3)$ liegender Rotationskörper mit der Rotationsachse h, die wir als x_n-Achse eines kartesischen Koordinatensystems wählen.

Sind dann $x_n = x_n(s)$, $r = r(s)$ die laufenden rechtwinkligen Koordinaten einer einfachen Kurve C als Funktion ihrer Bogenlänge s, so kann $\mathfrak{K}$ durch die Gleichungen

$$(9.\,1) \qquad x_n = x_n(s), \quad x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = r^2(s)$$

dargestellt werden. Dabei wird noch angenommen, daß C ganz in der Halbebene $r \geqq 0$ verläuft, und daß sie die Rotationsachse in nur zwei Punkten trifft. Ferner werden die Ableitungen $x_n'(s)$, $r'(s)$ als bestimmt und stetig angenommen, mit höchstens endlich vielen Ausnahmestellen. Das Maximum von $r(s)$ wird mit a bezeichnet und die erste Stelle, wo dies angenommen wird, mit s_0. Wenn l die Länge von C bedeutet, so ist

$$(9.\,2) \qquad r(0) = 0, \quad r(s_0) = a, \quad r(l) = 0 \text{ und für } 0 < s < s_0,\ 0 < r(s) < a.$$

Unsere Aufgabe wird hier folgendermaßen definiert[19]): *Unter allen Rotationskörpern $\mathfrak{K}$, welche im Zylinder*

$$(9.\,3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = a^2$$

[19]) Vgl. Schmidt, I, S. 696.

eingeschrieben sind[20]*), soll derjenige bestimmt werden, der bei vorgegebener Oberfläche O das Maximum des Volumens erreicht.*

Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir die beiden sphärischen Kalotten K_1, K_2

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 + (\xi_n + a \operatorname{tg} \gamma)^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \gamma} = \varrho_\gamma^2 \qquad (\xi_n \geqq 0) \tag{9.4}$$

und

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 + (\bar{\xi}_n - a \operatorname{tg} \gamma)^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \gamma} = \varrho_\gamma^2 \qquad (\bar{\xi}_n \leqq 0) \tag{9.5}$$

mit $\varrho_\gamma \cos \gamma = a$.

Dabei wird noch $0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt.

Setzt man nun voraus

$$x_n(0) < x_n(l), \tag{9.6}$$

so wird durch s_0 der Rand $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{R}$ in zwei Teile $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ zerlegt. Wir nennen $\mathfrak{O}_1$ den oberen Teil und setzen voraus, daß er durch Rotation der Teilkurve C_1: $x_n = x_n(s)$, $r = r(s)$, $s_0 \leqq s \leqq l$ erzeugt wird. $\mathfrak{O}_2$ ist dann der untere Teil des Randes.

Wir ordnen nun jedem Punkt $P_1(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathfrak{O}_1$ den Punkt $\bar{P}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_n)$ von K_1 zu, und jedem Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathfrak{O}_2$ den Punkt $\bar{P}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{\xi}_n)$ von K_2. Bedeutet dann $(n, \bar{n})$ den Winkel, den die äußeren Normalen von $\mathfrak{R}$, K_1, K_2 in entsprechenden Punkten P, $\bar{P}$ bilden, so ist

$$\cos(n, \bar{n}) = \cos(\bar{n}, x_1) \cos(\bar{n}, x_1) + \cdots + \cos(n, x_n) \cos(\bar{n}, x_n), \tag{9.7}$$

es wird also in

$$\int_{\mathfrak{O}} \cos(n, \bar{n})\, dO, \tag{9.8}$$

wenn dabei dO das Oberflächenelement von $\mathfrak{O}$ bedeutet,

$$\int \cos(n, \bar{n})\, dO = \sum_1^n \int \cos(n, x_\nu) \cos(\bar{n}, x_\nu)\, dO. \tag{9.9}$$

Nun ist

$$\varrho_\gamma \cos(\bar{n}, x_i) = x_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9.10}$$

und

$$\varrho_\gamma \cos(\bar{n}, x_n) = \xi_n + a \operatorname{tg} \gamma \quad \text{oder gleich} \quad \bar{\xi}_n - a \operatorname{tg} \gamma, \tag{9.11}$$

je nachdem $\bar{n}$ eine äußere Normale von K_1 bzw. K_2 ist. Wir erhalten dann wegen (9.4) und der gemachten Zuordnung

$$\varrho_\gamma \int \cos(n, \bar{n})\, dO = \sum_1^{n-1} \int x_\nu \cos(n, x_\nu)\, dO + \int (\xi_n \pm a \operatorname{tg} \gamma) \cos(n, x_n)\, dO. \tag{9.12}$$

---

[20]) Also alle Rotationskörper $\mathfrak{R}$ mit $\operatorname{Max} r(s) = a$.

Hier ist bei der Integration über $\mathfrak{O}_1$ das Minuszeichen zu nehmen und bei der Integration über $\mathfrak{O}_2$ (mit $\bar{\xi}_n$ statt ξ_n) das Pluszeichen. Wir werten zuerst das letzte Integral aus. Wir erhalten wegen $\cos(n, x_n) = -\frac{dr}{ds}$, $dO = d\omega\, ds$, wobei $d\omega$ gleich dem Flächenelement der Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = r^2(s) \tag{9. 13}$$

wird,

$$\int_{\mathfrak{O}_1} (\xi_n + a \operatorname{tg}\gamma) \cos(n, x_n)\, dO = -E_{n-1} \int_{s_0}^{l} r^{n-2} (\xi_n + a \operatorname{tg}\gamma) \frac{dr}{ds}\, ds \tag{9. 14}$$

und

$$\int_{\mathfrak{O}_2} (\bar{\xi}_n - a \operatorname{tg}\gamma) \cos(n, x_n)\, dO = -E_{n-1} \int_{0}^{s_0} r^{n-2} (\bar{\xi}_n - a \operatorname{tg}\gamma) \frac{dr}{ds}\, ds. \tag{9. 15}$$

Dabei ist noch E_{n-1} die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel.

Nun ist, wie man leicht einsieht, $\bar{\xi}_n = -\xi_n$ und wir erhalten für die Summe der beiden Integralen links

$$\omega(a, \gamma) = \int_{\mathfrak{O}} (\xi_n \pm a \operatorname{tg}\gamma)\, dO = 2 E_{n-1} \int_0^{a} r^{n-2} (\xi_n + a \operatorname{tg}\gamma)\, dr. \tag{9. 16}$$

Dabei ist ξ_n als Funktion von r aus der Gleichung (9. 4) unter Berücksichtigung von (9. 13) zu entnehmen.

Um nun die Summe in (9. 12) auszurechnen, benutzen wir den Gaussschen Divergenzsatz[21]) im n-dimensionalen Raum

$$\int_{\mathfrak{R}} \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau = \sum_1^n \int_{\mathfrak{O}} A_\nu \cos(n, x_\nu)\, dO, \tag{9. 17}$$

wobei $A_1, \ldots, A_n$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ sind und wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \sum_1^n \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}. \tag{9. 18}$$

Setzt man hier $A_1 = x_1$, $A_2 = x_2$, $\ldots$, $A_{n-1} = x_{n-1}$, $A_n = 0$, so folgt unmittelbar

$$(n-1) \int_{\mathfrak{R}} d\tau = (n-1) V = \sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{O}} x_\nu \cos(n, x_\nu)\, dO, \tag{9. 19}$$

wo $\int_{\mathfrak{R}} d\tau$ links das Volumen von $\mathfrak{R}$ bedeutet.

Wir erhalten somit aus (9. 12) mit Rücksicht auf (9. 16)

$$(n-1) V = \varrho_\gamma \int \cos(n, \bar{n})\, dO - \omega(a, \gamma). \tag{9. 20}$$

---

[21]) Vgl. z. B. Schmidt, I, oder Duscheck-Mayer, Lehrbuch über Differentialgeometrie II. Leipzig und Berlin, 1930, S. 237.

Da nun $\omega(a, \gamma)$ von der speziellen Wahl von $\mathfrak{K}$ unabhängig ist, so setzen wir $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\gamma$, wobei $\mathfrak{K}_\gamma$ den aus den zwei Kalotten K_1, K_2 gebildeten Körper bedeutet. Mit Rücksicht auf die Beziehung $\cos(n, \bar{n}) = 1$ erhalten wir

$$(9.21) \qquad (n-1)V_\gamma = \varrho_\gamma O_\gamma - \omega(a, \gamma)$$

und durch Subtraktion nach vorheriger Substitution von $\cos(n, \bar{n})$ durch $1 - \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}$:

$$(9.22) \qquad (n-1)(V - V_\gamma) = \varrho_\gamma (O - O_\gamma) - 2\,\varrho_\gamma R_n(\mathfrak{K}).$$

O_γ, V_γ ist dann die Oberfläche bzw. das Volumen von $\mathfrak{K}_\gamma$, und $R_n(\mathfrak{K})$ die Größe

$$(9.23) \qquad R_n(\mathfrak{K}) = \int_O \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, dO = E_{n-1} \int_C r^{n-2} \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, ds.$$

Dieses Restglied verschwindet für $O = O_\gamma$ nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ durch Parallelverschiebung aus $\mathfrak{K}_\gamma$ entsteht.

Setzt man in (9.22) $\gamma = 0$, und bezeichnet man mit W_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, so wird wegen

$$(9.24) \qquad (n-1)V_0 - aO_0 = -W_n a^n$$

$$(9.25) \qquad (n-1)V = Oa - W_n a^n - 2\,a R_n(\mathfrak{K}).$$

Diese Gleichung verschärft die zuerst von SCHMIDT[22]) gegebene Ungleichung

$$(9.26) \qquad (n-1)V \leqq Oa - W_n a^n.$$

10. *Fortsetzung. Linsenförmige und Kugel-Zylinder-Extremalkörper.* Die Formel (9.22) gilt, wie schon erwähnt wurde, auch für $\gamma = 0$, und in diesem Falle sind die beiden Kalotten K_1, K_2 zwei in bezug auf $x_n = 0$ symmetrische Halbkugeln mit demselben Mittelpunkt O und Radius a. Ziehen wir nun K_1, K_2 wie zwei Teile eines Teleskops auseinander, so erhalten wir einen Körper $\mathfrak{K}^*_\gamma$, wobei hier γ die neue Entfernung der Mittelpunkte von K_1, K_2 bedeutet. Körper vom Bau von $\mathfrak{K}^*_\gamma$ werden wir im folgenden Extremalkörper vom Kugel-Zylinder-Typus nennen. Sie spielen hier dieselbe Rolle wie die Kreis-Rechteck-Extremalen für den Fall $n = 2$.

Bemerkt man nun, daß

$$(10.1) \qquad (n-1)V_0 - aO_0 = (n-1)V^*_\gamma - aO^*_\gamma$$

ist, so können wir auch

$$(10.2) \qquad (n-1)(V - V^*_\gamma) = a(O - O^*_\gamma) - 2\,a R_n(\mathfrak{K})$$

schreiben, wenn O^*_γ, V^*_γ die Oberfläche bzw. das Volumen von $\mathfrak{K}^*_\gamma$ darstellen.

---

[22]) SCHMIDT, I, S. 698.

Das Restglied $R_n(\mathfrak{K})$ bleibt bei diesem Prozeß invariant. Wir fassen unsere Resultate nochmals zusammen. Wir haben gefunden:

$$(n-1)(V-V_\gamma)\cos\gamma = a(O-O_\gamma) - 2aR_n(\mathfrak{K}), \tag{10.3}$$

$$(n-1)V = Oa - W_n a^n - 2aR_n(\mathfrak{K}), \tag{10.4}$$

$$(n-1)(V-V_\gamma^*) = a(O-O_\gamma^*) - 2aR_n(\mathfrak{K}), \tag{10.5}$$

und wir können den Inhalt dieser drei Gleichungen im folgenden Satz ausdrücken:

Die gestellte Aufgabe besitzt für

$$2W_{n-1}a^{n-1} < O \tag{10.6}$$

nur eine Lösung, wenn man zur Konkurrenz alle in (9.3) *eingeschriebenen Rotationskörper zuläßt. Und zwar ist für*

$$2W_{n-1}a^{n-1} < O < nW_n a^{n-1} \tag{10.7}$$

die Lösung ein linsenförmiger Körper mit $O_\gamma = O$, *und für*

$$nW_n a^{n-1} \leqq O \tag{10.8}$$

ein solcher vom Kugel-Zylinder-Typus. Für $O \leqq 2W_{n-1}a^{n-1}$ *ist die Aufgabe unlösbar.*

Der Beweis dieser Behauptungen folgt aus (10.3), (10.5) unmittelbar, wenn man die Körper $\mathfrak{K}_\gamma$, $\mathfrak{K}_\gamma^*$ mit $O_\gamma = O$ bzw. $O_\gamma^* = O$ konstruiert und dabei beachtet, daß dann $R_n(\mathfrak{K})$ nur für $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\gamma$ bzw. $\mathfrak{K}_\gamma^*$ verschwindet. Dabei werden Körper, welche auseinander durch Parallelverschiebung hervorgehen, als nicht verschieden betrachtet.

Ebenso wie im ebenen Fall braucht man die eindeutige Bestimmung der Extremalflächen durch ihre Oberfläche, nur für diejenigen vom linsenförmigen Typus zu führen, da diese Tatsache für die Extremalflächen vom Kugel-Zylinder-Typus trivial ist.

Nun findet man für die Oberfläche O_γ einer linsenförmigen Extremalfläche K_γ

$$O_\gamma = 2(n-1)W_{n-1}\int_0^a \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-k_\gamma^2 x^2}} \qquad \left(k_\gamma = \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\cos\gamma}{a}\right), \tag{10.9}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Diese Formel kann allerdings unmittelbar aus den allgemeinen Formeln über die Oberfläche eines Rotationskörpers abgeleitet werden, die Erhard Schmidt in der unter I zitierten Arbeit (s. S. 707) bewiesen hat.

Die vorhin erwähnten Ergebnisse wurden auf anderem Wege zuerst von Erhard Schmidt[23]) bewiesen.

---

[23]) Schmidt, I, S. 701.

Kapitel VI.

Die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen sphärischen Raum.

11. *Vorbereitende Tatsachen.* Wir betrachten jetzt die n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ mit der Metrik

$$(11.1)\quad ds^2 = d\vartheta_1^2 + \cos^2\vartheta_1\, d\vartheta_2^2 + \cos^2\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2\, d\vartheta_3^2 + \cdots + \cos^2\vartheta_1 \ldots \cos^2\vartheta_{n-1}\, d\vartheta_n^2$$

mit

$$(11.2)\quad -\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_i \leqq +\frac{\pi}{2} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ und } -\pi \leqq \vartheta_n < \pi,$$

welche bekanntlich im $(n+1)$-dimensionalen Raum R_{n+1} durch die Einheitskugel $\mathfrak{S}_{n+1}$

$$(11.3)\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$$

verwirklicht wird.

Der Übergang von (10. 3) zu der Metrik (10. 1) geschieht dann durch die Formeln

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sin\vartheta_1,\\
x_2 &= \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2,\\
x_3 &= \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \sin\vartheta_n,\\
x_{n+1} &= \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \cos\vartheta_n,
\end{aligned} \qquad (11.4)$$

wenn man in $\mathfrak{S}_{n+1}$ die Metrik

$$(11.5)\quad ds^2 = \sum_1^{n+1} dx_i^2$$

einführt. Als Rotationskörper $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{M}_n$[24]) werden wir denjenigen Körper von $\mathfrak{S}_{n+1}$ definieren, der bei allen Drehungen von (11. 3) um ihren Mittelpunkt, welche die Punkte eines Großkreises, der Rotationsachse, invariant lassen, in sich selbst übergeht.

Wählen wir hier die ϑ_n-Linie $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 0, \ldots, \vartheta_{n-1} = 0$ als Rotationsachse[25]), so läßt sich $\mathfrak{K}$ durch die beiden Gleichungen

$$(11.6)\quad \vartheta_n = \vartheta(t), \quad \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} = \cos\eta(t) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

mit $\eta(t) \geqq 0$ darstellen. Es wird vorausgesetzt, daß die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ mit der Rotationsachse zwei und nur zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat.

---

[24]) Vgl. SCHMIDT, II, S. 769.

[25]) Dies entspricht in (11. 4) dem zweidimensionalen Großkreis $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$.

In dem „Einbettungsraum" R_{n+1} lassen sich diese Voraussetzungen auch so ausdrücken[26]):

Es seien

$$x_n = x_n(t), \quad x_{n+1} = x_{n+1}(t), \quad \eta^*(t) \qquad (\eta^*(t) \geqq 0) \tag{11.7}$$

die laufenden Koordinaten der auf der dreidimensionalen Einheitskugel

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 + \eta^{*2} = 1 \tag{11.8}$$

liegenden „Meridiankurve" einer einfachen Kurve, die den größten Kreis $\eta^* = 0$ in zwei und nur zwei verschiedenen Punkten schneidet. Unter diesen Voraussetzungen wird die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ durch die Gleichungen

$$\sum_1^{n-1} x_\nu^2 = \eta^{*2}(t), \quad x_n = x_n(t), \quad x_{n+1} = x_{n+1}(t) \tag{11.9}$$

gegeben. Aus diesen Gleichungen kann man (11. 6) sofort erhalten, wenn man dazu (11. 4) benutzt. Dabei stellt die zweite Gleichung (11. 6) diejenige Kugel dar, die vom Körper $\mathfrak{K}$ auf dem zur Rotationsachse $\vartheta_n = \vartheta$, $\vartheta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ senkrechten sphärischen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum ausgeschnitten wird. Man braucht bloß $\sin \eta\,(t)$ an Stelle von η^* zu schreiben.

Die Gleichung

$$\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \ldots \cos \vartheta_{n-1} \geqq \cos a \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right) \tag{11.10}$$

stellt das Analogon des Zylinders (9. 3) dar. Die durch sie definierte Punktmannigfaltigkeit wird erhalten, wenn man eine $(n-1)$-dimensionale Kugel von $\mathfrak{M}_n$ vom sphärischen Radius a längs der Rotationsachse $\vartheta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ bewegt.

Es entsteht dann ein geschlossener Ringraum P_a. Wir sagen dann, $\mathfrak{K}$ ist in P_a eingeschrieben, wenn $\operatorname{Max} \eta(t) = a$ ist, wenn also die „Projektion" von $\mathfrak{K}$ auf $\vartheta_n = 0$ die eben erwähnte geodätische Kugel mit dem sphärischen Radius a ausfüllt. Mit „Projektion" des Punktes $P\,(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n)$ von $\mathfrak{S}_n$ auf $\vartheta_n = 0$ wird der Punkt $P^*\,(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, 0)$ gemeint.

Wir formulieren die Hauptaufgabe dieses Kapitels folgendermaßen:

Unter allen in P_a eingeschriebenen Rotationskörpern $\mathfrak{K}$ soll derjenige bestimmt werden, welcher bei vorgegebener Oberfläche das Maximum des Volumens erreicht.

Zur Lösung dieser Aufgabe von Erhard Schmidt mit Hilfe der hier entwickelten Methode werden wir wieder von dem Integral

$$\int \cos(n, \bar{n})\, dO \tag{11.11}$$

ausgehen. Ehe wir aber zur Umformung dieses Integrals schreiten, schicken wir einiges aus den n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten voraus.

---

[26]) Schmidt, II, S. 769.

12. *Fortsetzung.* Die durch (11. 1) definierte Mannigfaltigkeit wird, wie dies schon erwähnt wurde, durch die Hyperfläche (10. 3) in R_{n+1} verwirklicht. (11. 4) ist dann die Parameterdarstellung der Hyperfläche (11. 3), und die Tangentialvektoren $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ an den Parameterlinien oder ϑ_i-Linien mit den Koordinaten

$$\mathfrak{r}_i : \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_2}, \ldots, \frac{\partial x_i}{\partial \vartheta_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{12. 1}$$

bilden an der betrachteten Stelle $P(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem O_P. Den durch $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ definierten euklidischen Raum in P nennt man bekanntlich den Tangentialraum in P[27]). Ist nun $d\mathfrak{r}$ $(d\vartheta_1, \ldots, d\vartheta_n)$ ein infinitesimaler Vektor in O_P, so können wir schreiben

$$d\mathfrak{r} = \sum_i \mathfrak{r}_i \, d\vartheta_i , \tag{12. 2}$$

und wir erhalten daraus, wenn man die Vektoren $\mathfrak{r}_i$ zueinander orthogonal voraussetzt,

$$d\mathfrak{r}^2 = ds^2 = \sum_i \mathfrak{r}_i^2 \, d\vartheta_i^2 = \sum_i g_i^2 \, d\vartheta_i^2 . \tag{12. 3}$$

Für die $\mathfrak{r}_i$ erhalten wir durch Vergleich mit (11. 1) oder direkt durch Ausrechnen die Werte

$$\mathfrak{r}_1^2 = 1, \quad \mathfrak{r}_i^2 = \cos^2\vartheta_1 \ldots \cos^2\vartheta_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots, n). \tag{12. 4}$$

Das Quadrat der Länge eines Vektors $\mathfrak{x}$ $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ in O_P definieren wir jetzt durch

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_i g_i^2 \, \xi^i \xi^i \tag{12. 5}$$

und nennen $\xi^1, \ldots, \xi^n$ die kontravarianten Komponenten von $\mathfrak{x}$. Die kovarianten Komponenten von $\mathfrak{x}$ werden dann durch

$$\xi_i = \frac{\xi^i}{g_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12. 6}$$

definiert, so daß

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_i \xi_i \xi^i \tag{12. 7}$$

wird. Analog definieren wir das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{x}$ (ξ^i) und $\mathfrak{y}$ (η^i) in O_P durch

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i \xi^i \eta_i = \sum \xi_i \eta^i . \tag{12. 8}$$

---

[27]) Für ein tieferes Eindringen in die Begriffsbildungen dieser Nummer vgl. man entweder das vorhin erwähnte Buch von DUSCHECK-MAYER oder das ausgezeichnete Buch von CARTAN, Leçons sur la géométrie des espaces de RIEMANN, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

13. *Eine lineare isoperimetrische Gleichung.* Nach dieser Wiederholung bekannter Tatsachen kehren wir zu unserer Aufgabe zurück, betrachten die beiden geodätischen Kugeln[28]) $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$

$$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \cos(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0) = \cos b \tag{13.1}$$

und verlangen noch, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ mit der Großkugel $\vartheta_n = 0$ eine geodätische Kugel vom Radius a sei. Wir erhalten dann als Bedingung

$$\cos a \cos\eta_0 = \cos b. \tag{13.2}$$

Wir rechnen nun die Komponenten der äußeren Normalen n von $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ aus, und zwar im Gebiet $\vartheta_n \geqq 0$ für $\mathfrak{K}_1$ und $\vartheta_n \leqq 0$ für $\mathfrak{K}_2$. Wir werden ja später nur den Körper betrachten, der aus der Summe dieser beiden Gebiete besteht.

Setzt man hier der Kürze halber

$$\Phi = \cos b - \cos\vartheta_1 \ldots \cos(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0), \tag{13.3}$$

so werden die kovarianten Komponenten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ von $\bar{n}$ durch[29])

$$\eta_i = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_i}}{\sqrt{\sum_k \left(g^k \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_k}\right)^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.4}$$

gegeben, wobei

$$g^k = \frac{1}{g_k}$$

ist. Durch eine leichte Rechnung ergibt sich

$$\sum_1^n \left(g^k \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_k}\right)^2 = 1 - \cos^2 b = \sin^2 b, \tag{13.5}$$

wir erhalten also aus (13.4)

$$\begin{aligned} \eta_i &= \cot b \operatorname{tg}\vartheta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \eta_n &= \cot b \operatorname{tg}(\vartheta_n \pm \eta_0). \end{aligned} \tag{13.6}$$

---

[28]) Als geodätische Kugel bezeichnen wir die üblichen Kugeln im sphärischen Raum, und zwar den geometrischen Ort der Punkte, deren geodätische Entfernung von einem festen Punkt konstant (gleich dem sphärischen Radius) ist. Sie fallen hier mit den Flächen konstanter mittlerer Krümmung zusammen. Vgl. z. B. BAULE, Über Kreise und Kugeln im RIEMANNschen Raum. Math. Annalen **83** (1921), S. 286–310.

[29]) Für die Ableitung dieser Formel und im allgemeinen für das Vorzeichen von Φ vgl. man DUSCHECK-MAYER, l. c., S. 237.

Verlangt man nun, daß $(\bar{n}, \vartheta_1)$ in $\vartheta_1 = a$, $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \cdots = \vartheta_n = 0$ gleich $\gamma \left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ wird, so folgt daraus[30]) die Bedingung

$$\cos \gamma = \cot b \operatorname{tg} a \tag{13.7}$$

oder auch

$$\varrho_\gamma = \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos \gamma} = \frac{\varrho_0}{\cos \gamma}. \tag{13.8}$$

Den Durchschnitt der beiden Kugeln

$$\cos b - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \ldots \cos \vartheta_{n-1} \cos (\bar{\vartheta}_n \pm \gamma_0) \leqq 0 \tag{13.9}$$

bezeichnen wir in Übereinstimmung mit unseren früheren Bezeichnungen mit $\mathfrak{K}_\gamma$ und nennen die so entstandene Linse einen linsenförmigen Extremalkörper.

Nun sei $t = t_0$ ein Wert, für den $\eta(t)$ in (11.6) gleich a wird. Ist dann $\vartheta_n(t_1) < \vartheta_n(t_2)$, so bezeichnen wir denjenigen Teil des Randes von $\mathfrak{K}$, für den $t_0 \leqq t \leqq t_2$ ist, mit $\mathfrak{D}_1$, und den Teil, für den $t_1 \leqq t_2 \leqq t_0$ ist, mit $\mathfrak{D}_2$. $\mathfrak{D}_1$ ist gewissermaßen der „obere" Teil des Randes von $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{D}_2$ der „untere". Wir ordnen dann einem Punkt $P_1(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ von $\mathfrak{D}_1$ den Punkt $\bar{P}_1(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \bar{\vartheta}_n)$ von $\mathfrak{K}_1$ und einem Punkt $P_2(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n)$ von $\mathfrak{D}_2$ den Punkt $\bar{P}_2(\vartheta_1, \ldots, \bar{\vartheta}_n)$ von $\mathfrak{K}_2$ zu. Dies bedeutet also, daß bei der Zuordnung die $n-1$ ersten Koordinaten unverändert gelassen werden, während die ϑ_n mit Hilfe von (13.3) berechnet wird. Die Zuordnung ist das vollkommene Analogon des euklidischen Falles und entspricht der Zuordnung durch parallele Geraden zur x_n-Achse. Hier wird die Achse durch die ϑ_n-Parameterlinie ersetzt. Es bezeichne nun $(n, \bar{n})$ den Winkel der äußeren Normalen in zwei entsprechenden Punkten. Da $n, \bar{n}$ nicht durch einen Punkt gehen, so ist eine nähere Definition dieses Winkels notwendig. Es wird folgendes vereinbart: Für die Kugel (10.3) sei in R_{n+1} eine feste Drehrichtung in der x_n, x_{n+1}-Ebene festgelegt, also eine Bewegung von der Form

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i && (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \bar{x}_n &= x_n \cos \lambda - x_{n+1} \sin \lambda, \\ \bar{x}_{n+1} &= x_n \sin \lambda + x_{n+1} \cos \lambda. \end{aligned} \tag{13.10}$$

Wir können z. B. $\lambda > 0$ festsetzen. Wir wählen λ so, daß die neue Lage von $\bar{P}$ gleich der alten Lage des ihm entsprechenden Punktes P wird. Denkt man nun bei der Bewegung $\bar{n}$ fest mit der Kugel (11.3) verbunden, so wird $\bar{n}$ in der neuen Lage einen wohlbestimmten Winkel mit n (in der alten Lage gedacht) bilden. Diesen Winkel bezeichnen wir mit $(n, \bar{n})$.

---

[30]) ϑ_1 nimmt hier keine Sonderstellung ein. Man könnte ebenfalls $\vartheta_i = a$ $(i \neq n)$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_{i-1} = \vartheta_{i+1} = \cdots = \vartheta_{n-1} = 0$ betrachten. i kann dann irgendeinen Wert außer $i = n$ haben.

Es ist dann leicht zu sehen, daß bei dieser Drehung die Komponenten von $\bar{n}$ in bezug auf den Tangentialraum sich nicht ändern, so daß man schreiben kann

$$\cos(n, \bar{n}) = \sum_1^n \xi^k \eta_k, \tag{13.11}$$

wobei die η_k durch (13.6) gegeben werden.

Um jetzt eine isoperimetrische Gleichung zu erhalten, gehen wir aus vom Integral

$$\int_{\mathfrak{O}} \cos(n, \bar{n})\, dO, \tag{13.12}$$

erstreckt über die ganze Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$, aus und ersetzen $\cos(n, \bar{n})$ mit Hilfe von (13.11). Es wird dann mit Rücksicht auf (13.6)

$$\operatorname{tg} b \int \cos(n, \bar{n})\, dO = \sum_1^{n-1} \int \xi^i \operatorname{tg} \vartheta_i\, dO + \int \xi^n \operatorname{tg}(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0)\, dO. \tag{13.13}$$

Beim letzten Integral muß für alle Randpunkte von $\mathfrak{O}_1$ das $+$-Zeichen genommen werden und für diejenigen von $\mathfrak{O}_2$ das $-$-Zeichen. Wir werden später zeigen, daß dieses Integral von $\mathfrak{K}$ unabhängig ist.

Zuerst wird behauptet: Es gilt

$$\sum_1^{n-1} \int \xi^i \operatorname{tg} \vartheta_i\, dO = (n-1)V, \tag{13.14}$$

wenn V das Volumen von $\mathfrak{K}$ bedeutet.

Um dies zu beweisen, benutzen wir das Analogon des Gaussschen Divergenzsatzes in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, den wir hier ohne Beweis angeben[31]). Es sei $\Phi(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) = 0$ die Gleichung einer geschlossenen Hyperfläche, welche einen im Endlichen liegenden Bereich $\Phi \leqq 0$ begrenzt. Sind λ^i die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$, und Φ_i die kovarianten Komponenten der äußeren Normalen von $\Phi = 0$[32]), so gilt, wenn dO das Flächenelement von $\Phi = 0$ bedeutet,

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau = \int_{\Phi = 0} \sum_i \Phi_i \lambda^i\, dO. \tag{13.15}$$

---

[31]) Vgl. Duscheck-Mayer, l. c., S. 237.

[32]) Es ist bei allgemeiner Metrik $ds^2 = \sum g_{ik}\, d\vartheta^i\, d\vartheta^k$,

$$\Phi_i = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i}}{\sqrt{\sum_{i,k} g^{ik} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_i} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_k}}}.$$

Dabei ist das erste Integral über das Innere von $\Phi = 0$ zu erstrecken. Ferner ist $d\tau$ das Volumenelement des durch $\Phi = 0$ begrenzten Gebietes und für die Metrik (12. 3) gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{g} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} (g \lambda^i) \tag{13. 16}$$

mit

$$g = g_1 g_2 \dots g_n .$$

Da nun $\xi_i = g_i^2 \xi^i$ ist, so wird die zu beweisende Identität

$$\sum_1^{n-1} \int \xi_i \Big(\frac{\operatorname{tg} \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} \Big) d\, O = (n-1)\, V. \tag{13. 17}$$

Um dies mit Hilfe des Gaussschen Divergenzsatzes zu transformieren, setzen wir

$$\lambda^i = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots n-1, \quad \lambda^n = 0, \tag{13. 18}$$

und wir merken, daß

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \Big(\frac{g \operatorname{tg} \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} \Big) = \frac{\{1 - (n-i-1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_i\}}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} \tag{13. 19}$$

ist. Es genügt also, für das Bestehen von (13. 14) die Identität

$$\sum_1^{n-1} \frac{1 - (n-i-1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} = (n-1) \tag{13. 20}$$

zu beweisen. Diese Identität ist ein Spezialfall der Identität

$$\sum_k^{n-1} \frac{1 - (n-i-1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} = \frac{(n-k)}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{k-1}} . \tag{13. 21}$$

Diese Identität gilt zweifellos für $k = n-1$. Wenn sie richtig ist für ein beliebiges $k < n-1$, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k-1}^{n-1} \frac{1 - (n-i-1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} &= \frac{1 - (n-k) \operatorname{tg}^2 \vartheta_{k-1}}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{k-2}} + \sum_k^{n-1} \frac{1 - (n-i-1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_i}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{i-1}} \\ &= \frac{1 - (n-k) \operatorname{tg}^2 \vartheta_{k-1}}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{k-2}} + \frac{(n-k)}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{k-1}} . \end{aligned} \tag{13. 22}$$

Diese Summe ist aber gleich

$$\frac{n-k+1}{\cos^2 \vartheta_1 \dots \cos^2 \vartheta_{k-2}} ,$$

womit auch (13. 21) und (13. 20) bewiesen worden ist.

Der letzte wichtige Schritt zur Erhaltung der isoperimetrischen Gleichung ist nun der Nachweis, daß in (13. 13) das letzte Integral von der speziellen Wahl des Körpers $\mathfrak{K}$ unabhängig ist.

Zuerst erhalten wir aus (13. 1)

$$\operatorname{tg}(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0) = \pm \sqrt{\frac{\cos^2\eta - \cos^2 b}{\cos^2 b}}, \tag{13. 23}$$

wobei das Pluszeichen für den „oberen" Teil und das Minuszeichen für den „unteren" Teil zu nehmen ist. Wir berechnen jetzt die Bogenlänge der Kurve C, aus der durch „Rotation" der Körper $\mathfrak{K}$ entsteht. Wir befriedigen (11. 8) durch

$$\eta^* = \sin\eta\,(t), \quad x_n = \cos\eta\,(t)\sin\vartheta_n(t), \quad x_{n+1} = \cos\eta\,(t)\cos\vartheta_n(t), \tag{13. 24}$$

und erhalten für das Bogenelement ds^2 von C

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \cos^2\eta\left(\frac{d\vartheta_n}{dt}\right)^2, \tag{13. 25}$$

eine Formel, die wir auch aus (11. 6) leicht erhalten könnten. Wir führen jetzt die Bogenlänge s von C als neuen Parameter an Stelle von t ein und erhalten unter Beibehaltung der Bezeichnungen für die neuen Funktionen:

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} x_\nu^2 &= \sin^2\eta\,(s), \\ x_n &= \cos\eta\,(s)\sin\vartheta_n(s), \\ x_{n+1} &= \cos\eta\,(s)\cos\vartheta_n(s). \end{aligned} \tag{13. 26}$$

Ist einmal diese Darstellung gewonnen, so gilt für das Oberflächenelement dO von $\mathfrak{K}$, wenn $d\omega_{n-1}$ das Oberflächenelement von

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1$$

bedeutet,

$$dO = \sin^{n-2}\eta\,(s)\,d\omega_{n-1}\,ds. \tag{13. 27}$$

Nimmt man hier $\vartheta_n(0) < \vartheta_n(l)$ (l = Gesamtlänge von C) an, so wird

$$\cos(n, \vartheta_n) = -\frac{d\eta}{ds}, \tag{13. 28}$$

also in Verbindung mit (13. 23) und mit Rücksicht auf die Tatsache, daß

$$\xi^n = \frac{\cos(n, \vartheta_n)}{\cos\eta} \tag{13. 29}$$

ist,

$$\omega = \int \xi^n \operatorname{tg}(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0)\,dO = \mp \int \sin^{n-2}\eta\,(s)\sqrt{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2\eta}\,\frac{d\eta}{ds}\,d\omega_{n-1}\,ds. \tag{13. 30}$$

Integriert man nun über (13. 27) und führt man η als neuen Parameter ein, so erhält man

$$\omega = 2(n-1)\,W_{n-1}\int_0^a \sin^{n-2}\eta\,\sqrt{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2\eta}\,d\eta. \tag{13. 31}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Faßt man nun die Gleichungen (13. 13), (13. 14) und (13. 31) zusammen, so erhält man die Gleichung

$$(n-1)V = \operatorname{tg} b \int \cos(n, \bar{n})\, dO - \omega(a, \gamma), \tag{13. 32}$$

oder, wenn man noch $1 - 2\sin^2\frac{(n, \bar{n})}{2}$ an Stelle von $\cos(n, \bar{n})$ schreibt und das Integral

$$\int \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, dO$$

mit $R_n(\mathfrak{R})$ bezeichnet,

$$(n-1)V = \operatorname{tg} b\, O - \omega(a, \gamma) - 2 \operatorname{tg} b\, R_n(\mathfrak{R}). \tag{13. 33}$$

Daraus folgt weiter für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\gamma$ wegen $(n, \bar{n}) = 0$

$$(n-1)V_\gamma = \operatorname{tg} b\, O_\gamma - \omega(a, \gamma) \tag{13. 34}$$

und schließlich durch Subtraktion

$$(n-1)(V - V_\gamma) = \varrho_\gamma (O - O_\gamma) - 2\varrho_\gamma R_n(\mathfrak{R}). \tag{13. 35}$$

Dabei sind V_γ und O_γ das Volumen bzw. die Oberfläche des linsenförmigen Extremalkörpers $\mathfrak{R}_\gamma$ und $\varrho_\gamma = \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos\gamma}$. Das Restglied verschwindet, wenn man noch $O = O_\gamma$ verlangt, dann und nur dann, wenn $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_\gamma$ kongruent ist. Für die Ableitung dieser Gleichung haben wir vorausgesetzt, daß $\mathfrak{R}$ ein Rotationskörper auf $\mathfrak{S}$ ist. Ich möchte hier betonen, daß diese Voraussetzung bei unserem Verfahren nicht unbedingt nötig ist und nur bei der Auswertung des Restgliedes gebraucht wurde [33]). Deswegen wurde auch bei der Transformation der Flächenintegrale mittels des Gaussschen Satzes der Beweis so durchgeführt, ohne daß dabei die Voraussetzung, $\mathfrak{R}$ sei ein Rotationskörper, benutzt wird, obwohl dies in manchen Punkten die Rechnungen abkürzen würde. Ich möchte hier ohne Beweis anführen, daß dasselbe Verfahren auf alle Körper anwendbar ist, welche in (11. 10) eingeschrieben werden können, so daß sie auf dem Rand von (11. 10) einen zusammenhängenden Randteil besitzen. Diesen Teil kann man dann zur Teilung der Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{R}$ in zwei Teilen $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ benutzen. Hierauf wird indessen nicht näher eingegangen.

Nun setzen wir in (13. 35) $\gamma = 0$ ein. Wir erhalten dann wegen [34])

$$\begin{aligned} V_0 &= nW_n \int_0^a \sin^{n-1} x\, dx \\ O_0 &= nW_n \sin^{n-1} a, \end{aligned} \tag{13. 36}$$

[33]) Dasselbe gilt auch für den vorhin behandelten euklidischen und den nachfolgenden hyperbolischen Fall.

[34]) Vgl. z. B. Schmidt, II, S. 770.

wobei nW_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel im euklidischen Raum bedeutet,

$$(13.37)\quad (n-1)V = O\operatorname{tg} a - nW_n\left(\operatorname{tg} a \sin^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \sin^{n-1} x\,dx\right) - 2\operatorname{tg} a\, R(\mathfrak{K}).$$

Daraus folgt durch Vernachlässigung des Restgliedes die zuerst von Erhard Schmidt angegebene Ungleichung[35])

$$(13.38)\quad (n-1)V \leqq \operatorname{tg} a O - nW_n\left(\operatorname{tg} a \sin^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \sin^{n-1} x\,dx\right).$$

14. *Die isoperimetrische Ungleichung im n-dimensionalen sphärischen Raum.* Wir wollen zuerst die rechte Seite von (13.38) umformen. Dazu setzen wir

$$(14.1)\qquad \Phi(a) = \operatorname{tg} a \sin^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \sin^{n-1} x\,dx$$

und bilden $\Phi'(a)$.

Es wird

$$(14.2)\qquad \Phi'(a) = \frac{\sin^{n-1} a}{\cos^2 a},$$

also wegen $\Phi(0) = 0$

$$(14.3)\qquad \Phi(a) = \int_0^a \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^2 x}\,dx,$$

und wir erhalten an Stelle von (13.38) die Ungleichung

$$(14.4)\qquad (n-1)V \leqq O\operatorname{tg} a - nW_n \int_0^a \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Wir betrachten nun die rechte Seite dieser Ungleichung als Funktion von a (bei festem O) und bestimmen ihr Maximum. Bezeichnet man die rechte Seite von (14.4) mit $F(a)$, so wird

$$(14.5)\qquad \frac{dF}{da} = \frac{O - nW_n \sin^{n-1} a}{\cos^2 a}.$$

Daraus folgt, daß das Maximum von F für

$$(14.6)\qquad \sin^{n-1} a = \frac{O}{nW_n}$$

---

[35]) Schmidt, II, S. 792.

erreicht wird. Da man nun von vornherein ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$O < n W_n \tag{14.7}$$

annehmen darf [36]), so wird dieses Maximum tatsächlich erreicht. Setzt man dann der Kürze wegen

$$Q^{n-1} = \frac{O}{n W_n}, \tag{14.8}$$

so erhält man aus (14. 4) die von a freie Ungleichung

$$(n-1)\,V \leqq \frac{Q}{\sqrt{1-Q^2}} O - n W_n \int_0^{\arcsin Q} \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^2 x}\, dx,$$

oder auch

$$\frac{(n-1)\,V}{n W_n} \leqq \frac{Q^n}{\sqrt{1-Q^2}} - \int_0^{\arcsin Q} \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^2 x}\, dx. \tag{14.9}$$

Diese Ungleichung wurde hier zuerst für einen Rotationskörper bewiesen. Hier soll nur folgende Bemerkung angeknüpft werden. Wie in der Einleitung erwähnt wurde, hat ERHARD SCHMIDT bewiesen (aber nicht veröffentlicht), daß das SCHWARZsche Abrundungsverfahren im Kugelraum (und im hyperbolischen) genau so durchführbar ist wie im euklidischen und dabei seine Eigenschaften der Nichtvergrößerung der Oberfläche und die Erhaltung des Volumens behält. Liegt also in (10. 1) ein beliebiger Körper vor, so konstruieren wir nach diesem SCHWARZ-SCHMIDTschen Verfahren einen Rotationskörper $\bar{\mathfrak{R}}$ mit Volumen $\bar{V}$ und Oberfläche $\bar{O}$, wobei

$$V = \bar{V}, \quad \bar{O} \leqq O \tag{14.10}$$

ist. Setzt man dann

$$\bar{Q}^{n-1} = \frac{\bar{O}}{n W_n}, \tag{14.11}$$

so gilt nach (14. 9) wegen $V = \bar{V}$

$$\frac{(n-1)\,V}{n W_n} \leqq \frac{\bar{Q}^n}{\sqrt{1-\bar{Q}^2}} - \int_0^{\arcsin \bar{Q}} \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^2 x}\, dx, \tag{14.12}$$

und wegen $\bar{Q} \leqq Q < 1$ [37]) ist die rechte Seite endlich.

---

[36]) SCHMIDT, II, S. 771. Wir schließen zuerst den Fall $O = n W_n$ bzw. $2V = (n+1) W_{n+1}$ aus. Es wurde hier stillschweigend angenommen, daß ein Rotationskörper, dessen Oberfläche (14. 7) genügt, immer in einem „Zylinder" (11. 10) eingeschrieben werden kann. Das ist in der Tat richtig und wurde zuerst von ERHARD SCHMIDT in der vorhin erwähnten Arbeit bewiesen (SCHMIDT, II, S. 789).

[37]) Vgl. Fußnote 36.

Wir zeigen jetzt: Es gilt

$$(14.13)\quad \frac{Q^n}{\sqrt{1-\bar{Q}^2}} - \int_0^{\arcsin \bar{Q}} \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^3 x}\, dx \leqq \frac{Q^n}{\sqrt{1-Q^2}} - \int_0^{\arcsin Q} \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^3 x}\, dx.$$

Es genügt dafür zu zeigen, daß die Funktion $F(x)$

$$(14.14)\quad F(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^{\arcsin x} \frac{\sin^{n-1} t}{\cos^3 t}\, dt$$

eine nicht abnehmende Funktion von x ist. Nun geht aber durch die Transformation $\sin t = u$ das letzte Integral in das Integral

$$(14.15)\quad \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\, du$$

über und wir erhalten aus

$$(14.16)\quad F(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^x \frac{t^{n-1}}{\sqrt{(1-t^2)^3}}\, dt$$

$$(14.17)\quad F'(x) = (n-1)\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Damit ist wegen $F(0) = 0$ die Behauptung bewiesen, und wir können sogar an Stelle von (14.14) schreiben:

$$(14.18)\quad \frac{F(x)}{(n-1)} = \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hiermit wird unsere isoperimetrische Ungleichung (14.12)

$$(14.19)\quad V \leqq n W_n \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Diese Ungleichung gilt für jeden Körper in (10.1) und stellt die isoperimetrische Ungleichung für den n-dimensionalen sphärischen Raum dar. Q wird, wie dies schon erwähnt wurde, durch die Gleichung

$$(14.20)\quad Q = \sqrt[n-1]{\frac{O}{n W_n}}$$

definiert. Diese Ungleichung gilt auch für $Q = 1$. Wir behaupten zuerst

$$(14.21)\quad V \leqq \frac{n+1}{2} W_{n+1}.$$

Um dies zu beweisen, werten wir das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

aus. Durch Substitution $x^2 = y$ wird hier

$$(14.22)\qquad \int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right),$$

wobei allgemein $B(p, q)$ das Eulersche Integral erster Gattung bedeutet. Nun ist nach bekannten Formeln

$$(14.23)\qquad B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

und es wird wegen [38])

$$(14.24)\qquad n\,W_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},\qquad (n+1)\,W_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$(14.25)\qquad \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(n+1)\,W_{n+1}}{n\,W_n},$$

womit (14.21) bewiesen ist. Dies ist aber in der Tat richtig. Wie aus den Ausführungen von Erhard Schmidt folgt[39]), gilt in diesem Falle sogar das Gleichheitszeichen. Man könnte dieses Resultat hier direkt ableiten, indem man (14.9) auf das „komplementäre" Gebiet $\mathfrak{S}_{n+1} - \mathfrak{K}$ anwendet. Jedoch wird hier auf solche Einzelheiten nicht eingegangen, da dieser Fall von Erhard Schmidt ausführlich behandelt worden ist.

Auf die isoperimetrische Ungleichung (14.19) kommen wir zum Schluß der Arbeit nochmals zurück, nach der Aufstellung der entsprechenden Ungleichung für den hyperbolischen Raum. Wir werden zeigen, daß die drei isoperimetrischen Ungleichungen für die drei Räume konstanter Krümmung auf das engste verknüpft sind und durch stetige Transformation der Krümmung ineinander übergehen.

Wir haben hier die isoperimetrische Ungleichung (14.19) bewiesen, indem wir von der linearen ausgingen. Man kann sie aber auch aus einem allgemeinen Satz ableiten, den Erhard Schmidt in seiner hier unter II zitierten

[38]) Vgl. z. B. Borel, Introduction géométrique à quelques théories physiques. Paris, 1914.

[39]) Für Näheres vgl. man Schmidt, II, S. 769 und 790.

Arbeit bewiesen hat, wonach das Volumen eines Rotationskörpers $\mathfrak{K}$ im sphärischen Raum im allgemeinen kleiner ist als das Volumen derjenigen geodätischen Kugel, welche dieselbe Oberfläche wie $\mathfrak{K}$ besitzt.

15. *Der Hauptsatz für den sphärischen Raum.* Wir kehren jetzt zu den Ausführungen von Nr. 13 zurück und betrachten den Fall $\gamma = 0$. $\mathfrak{K}_0$ besteht dann aus zwei zu einer Kugel zusammengesetzten Halbkugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$. Zieht man diese Halbkugeln innerhalb des Zylinders (11. 10) auseinander, so entsteht dadurch ein Körper $\mathfrak{K}_\gamma^*$, den wir im folgenden als Extremalkörper vom „Kugel-Zylinder"-Typus bezeichnen werden. γ soll in diesem Falle keinen Winkel, sondern die sphärische Entfernung der Mittelpunkte der beiden Halbkugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ auf $\mathfrak{S}_{n+1}$ darstellen. Bezeichnet dann V_γ^*, O_γ^* das Volumen bzw. die Oberfläche von $\mathfrak{K}_\gamma^*$, so gilt

$$(15.1) \qquad (n-1)(V - V_\gamma^*) = \varrho_0 (O - O_\gamma^*) - 2\varrho_0 \int \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, dO.$$

Den Beweis dieser Gleichung kann man entweder direkt geben wie im Falle eines linsenförmigen Extremalkörpers $\mathfrak{K}_\gamma$, oder einfach aus (13. 35) für $\gamma = 0$ folgern, wenn man dort die Gleichung

$$(15.2) \qquad (n-1) V_\gamma^* - \varrho_0 O_\gamma^* = (n-1) V_0 - \varrho_0 O_0$$

berücksichtigt. Offenbar bleibt beim Übergang von $\mathfrak{K}_0$ zu $\mathfrak{K}_\gamma^*$ das Restglied invariant. Wann bedeckt $\mathfrak{K}_\gamma^*$ die Mannigfaltigkeit schlicht? Die Bedingung dafür lautet wie im Zweidimensionalfall

$$(15.3) \qquad \gamma + 2\alpha < 2\pi$$

und man kann ohne weiteres sehen, daß sie auch hinreichend ist. Für das Maximalvolumen $V_{2\pi-2\alpha}^*$ und die Maximaloberfläche $O_{2\pi-2\alpha}^*$ finden wir

$$(15.4) \qquad V_{2\pi-2\alpha}^* = V_0 + 2(\pi - \alpha) W_{n-1} \sin^{n-1}\alpha$$

und

$$(15.5) \qquad O_{2\pi-2\alpha}^* = O_0 + 2(\pi - \alpha)(n-1) W_{n-1} \sin^{n-2}\alpha \cos\alpha,$$

wobei W_{n-1} das Volumen und $(n-1) W_{n-1}$ die Oberfläche einer $(n-1)$-dimensionalen $(n \geqq 3)$-Einheitskugel bedeutet.

Wir beweisen allgemein:

$$(15.6) \qquad V_\gamma^* = V_0 + \gamma W_{n-1} \sin^{n-1}\alpha$$

und

$$(15.7) \qquad O_\gamma^* = O_0 + \gamma (n-1) W_{n-1} \sin^{n-2}\alpha \cos\alpha.$$

In der Tat ist nach Definition von V_γ^*

$$(15.8) \qquad V_\gamma^* = V_0 + \int \cos^{n-1}\vartheta_1 \cos^{n-2}\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n,$$

erstreckt über das Gebiet

$$(15.9)\qquad \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \geqq \cos a, \quad -\frac{\gamma}{2} \leqq \vartheta_n \leqq \frac{\gamma}{2},$$

wenn man $\mathfrak{K}_\gamma^*$ symmetrisch zu $\vartheta_n = 0$ nimmt. Bezeichnen wir dann das Integral mit $J(a)$, so wird zuerst

$$(15.10)\qquad J(a) = \gamma \int \cos^{n-1}\vartheta_1 \ldots \cos\vartheta_{n-1}\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{n-1},$$

erstreckt über

$$(15.11)\qquad \cos\vartheta_1 \ldots \cos\vartheta_{n-1} \geqq \cos a, \quad \vartheta_n = 0.$$

Am einfachsten berechnet man dieses Integral, indem man $J(a + da)$ bildet und dann mit Rücksicht auf (15.10), durch Grenzübergang, die Ableitung

$$(15.12)\qquad J'(a) = \gamma \int \cos^{n-1}\vartheta_1 \ldots \cos\vartheta_{n-1}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1}$$

berechnet, wobei das Integral über

$$(15.13)\qquad \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} = \cos a, \quad \vartheta_n = 0.$$

erstreckt wird. Wegen dieser Beziehung wird aber

$$(15.14)\qquad J'(a) = \gamma \cos a \int \cos^{n-2}\vartheta_1 \cos^{n-3}\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-2}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1},$$

erstreckt über (15.3). Das letzte Integral ist aber gerade $(n-1)W_{n-1}\sin^{n-2}a$; denn es stellt die Oberfläche einer geodätischen Kugel vom sphärischen Radius a, nämlich von (15.13)[40]) dar. Es ist also

$$(15.15)\qquad J'(a) = \gamma \cos a\,(n-1)W_{n-1}\sin^{n-2}a,$$

und es folgt durch Integration von 0 bis a wegen $J(0) = 0$

$$(15.16)\qquad J(a) = W_{n-1}\sin^{n-1}a.$$

Hiermit ist (15.6) bewiesen. Ähnlich beweist man (15.7), am einfachsten durch Differentiation von (15.6) nach a.

Wir fassen nun die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen und schreiben die hier gefundenen Gleichungen nochmals. Es gilt

$$(15.17)\qquad (n-1)\,(V - V_\gamma)\cos\gamma = \operatorname{tg} a\,(O - O_\gamma) - 2\operatorname{tg} a\, R_n(\mathfrak{K}),$$

$$(15.18)\qquad (n-1)\,V = O\operatorname{tg} a - n\,W_n \int_0^a \frac{\sin^{n-1}x}{\cos^2 x}\,dx - 2\operatorname{tg} a\, R_n(\mathfrak{K})$$

und

$$(15.19)\qquad (n-1)\,(V - V_\gamma^*) = \operatorname{tg} a\,(O - O_\gamma^*) - 2\operatorname{tg} a\, R_n(\mathfrak{K}).$$

[40]) Vgl. z. B. Schmidt, II, S. 770.

In allen drei Gleichungen bedeutet $R_n(\mathfrak{R})$ das schon öfters explizit aufgeschriebene Restglied.

Wir fassen noch den Inhalt dieser Gleichungen im folgenden Satz zusammen, dessen Beweis daraus unmittelbar folgt:

Unter allen Rotationskörpern, welche in

$$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \dots \cos\vartheta_{n-1} \geqq \cos a \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right) \tag{15.20}$$

eingeschrieben werden können, gibt es unter vorgegebener Oberfläche O nur einen solchen, welcher das Maximum des Volumens erreicht. Der Extremalkörper ist entweder ein linsenförmiger Körper $\mathfrak{R}_\gamma$, oder ein solcher vom Kugel-Zylinder-Typus. Der erste Fall tritt ein für

$$2(n-1)W_{n-1}\int_0^a \sin^{n-2} x\,dx < O < nW_n \sin^{n-1} a, \tag{15.21}$$

und der zweite für

$$nW_n \sin^{n-1} a \leqq O < nW_n \sin^{n-1} a + (n-1)(2\pi - 2a)W_{n-1}\sin^{n-2} a \cos a. \tag{15.22}$$

Für $nW_n \sin^{n-1} a + (n-1)(2\pi - 2a)W_{n-1}\sin^{n-2} a \cos a \leqq O$ gibt es keinen Extremalkörper, der $\mathfrak{S}_{n+1}$ schlicht bedeckt.

Diese Grenze kann man allerdings durch Aufhebung der Forderung der schlichten Überdeckung streichen. Für

$$O \leqq 2(n-1)\,W_{n-1}\int_0^a \sin^{n-2} x\,dx$$

ist die Aufgabe unlösbar.

Daß die Gestalt der Extremalflächen hier durch die Vorgabe ihrer Oberfläche eindeutig bestimmt ist, braucht nur für die linsenförmigen Extremalflächen nachgewiesen zu werden, da die gleiche Tatsache für diejenigen Extremalflächen vom Kugel-Zylinder-Typus aus (15. 6) unmittelbar folgt.

Nun ergibt sich, wenn man (13. 27) zugrunde legt und ds aus entsprechendem Fall für $n = 2$ entnimmt,

$$O_\gamma = 2(n-1)\,W_{n-1}\int_0^a \frac{\sin^{n-2}\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{1-k_\gamma^2 \operatorname{tg}^2\vartheta}} \qquad \left(k_\gamma = \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{tg} a}\right), \tag{15.23}$$

woraus dann wegen der Monotonität von O_γ die eindeutige Bestimmung von K_γ durch O_γ folgt. Der Beweis des vorigen Satzes ergibt sich dann aus (15.17) und (15.19), wenn man zu jedem zulässigen O genau wie in den früheren Fällen die dadurch eindeutig bestimmten Extremalflächen konstruiert.

Kapitel VII.

Die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen hyperbolischen Raum.

16. Die Geometrie des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes von der Krümmung -1 ist identisch mit der Geometrie auf der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n+1}$

$$x_{n+1}^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 1 \tag{16. 1}$$

eines $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raumes $\mathfrak{H}_{n+1}$, mit der Metrik

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2. \tag{16. 2}$$

Bekanntlich[41]) heißen die Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n+1}$ die Weierstrassschen Koordinaten. x_{n+1} wird dabei positiv vorausgesetzt[42]).

Eine Parameterdarstellung unseres Hyperbolischen Raumes erhalten wir dann, wenn wir

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{sh} \vartheta_1, \\ x_2 &= \operatorname{ch} \vartheta_1 \operatorname{sh} \vartheta_2, \\ x_3 &= \operatorname{ch} \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2 \operatorname{sh} \vartheta_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \operatorname{ch} \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2 \operatorname{ch} \vartheta_3 \ldots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1} \operatorname{sh} \vartheta_n, \\ x_{n+1} &= \operatorname{ch} \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2 \operatorname{ch} \vartheta_3 \ldots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1} \operatorname{ch} \vartheta_n \end{aligned} \tag{16. 3}$$

setzen. Das Bogenelement von $\mathfrak{H}_{n+1}$ lautet dann

$$ds^2 = d\vartheta_1^2 + \operatorname{ch}^2 \vartheta_1 \, d\vartheta_2^2 + \cdots + \operatorname{ch}^2 \vartheta_1 \operatorname{ch}^2 \vartheta_2 \ldots \operatorname{ch}^2 \vartheta_{n-1} \, d\vartheta_n^2. \tag{16. 4}$$

Unter einer geodätischen Kugel des hyperbolischen Raumes mit der Krümmung -1 oder eines Unterraumes desselben verstehen wir hier im allgemeinen eine Hyperfläche konstanter mittlerer Krümmung. Ist diese mittlere Krümmung $k_g > 1$, so handelt es sich dabei um eine gewöhnliche hyperbolische Kugel. Andernfalls haben wir für $k_g < 1$ den Fall einer Hyperkugel (hypersphère) und für $k_g = 1$ den Fall einer Grenzkugel (horisphère).

Wir begnügen uns hier mit dieser kurzen Andeutung und verweisen für weitere Einzelheiten auf die vorhin erwähnte Abhandlung von Baule. Im folgenden werden wir unsere „Extremalen" durch Rotation der vorhin erklärten Extremalkurven des zweidimensionalen Falles erzeugen, womit dann auch die Größe $\frac{1}{k_g}$ mit dem Krümmungsradius ϱ_g des entsprechenden geodätischen Kreises übereinstimmen würde.

---

[41]) Außer den schon erwähnten Büchern von Cartan und Liebmann kann man über damit zusammenhängende Fragen noch das Buch von Killing, Grundlagen der Geometrie I, Paderborn 1893, nachlesen. Vgl. auch Fußnote 18.

[42]) Cartan, l. c., S. 164.

Gewöhnliche hyperbolische Kugeln können auch als geometrischer Ort der Punkte definiert werden, deren Entfernung von einem festen Punkt kleiner oder gleich a ist. Diese Kugeln können entweder n-dimensional sein oder in einer der Mannigfaltigkeiten

$$\vartheta_n = 0, \ldots, \vartheta_{n-p} = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-2)$$

liegen.

Die Gleichung

$$\text{ch}\,\vartheta_1 \,\text{ch}\,\vartheta_2 \ldots \text{ch}\,\vartheta_{n-1} \leqq \text{ch}\,a \tag{16. 5}$$

stellt in $\mathfrak{H}_{n+1}$ einen „Zylinder" dar, dessen Schnitt mit $\vartheta_n = 0$ eine hyperbolische Kugel vom Radius a ist.

Wir sagen, ein Körper $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{H}_{n+1}$ sei dort ein Rotationskörper mit der Rotationsachse ϑ_n, wenn er bei allen Bewegungen des $\mathfrak{H}_{n+1}$, welche die ϑ_n-Linie festlassen, und bei denen (16. 1) invariant bleibt, in sich übergeht.

Für die Oberfläche eines solchen Körpers ist dann folgende Parameterdarstellung möglich

$$\vartheta_n = \vartheta_n(t), \quad \text{ch}\,\vartheta_1 \,\text{ch}\,\vartheta_2 \ldots \text{ch}\,\vartheta_{n-1} = \text{ch}\,\iota_i(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2). \tag{16. 6}$$

Wir werden voraussetzen, daß die nicht negative Funktion $\iota_i(t)$ differenzierbar ist und, bis auf endlich viele Stellen, eine stetige Ableitung hat.

Die zur Aufstellung der isoperimetrischen Gleichung nötigen Rechnungen in $\mathfrak{H}_{n+1}$ verlaufen nun denjenigen des n-dimensionalen sphärischen Raumes vollkommen analog. Wir wiederholen sie in großen Zügen und verweisen zugleich auf die Zusammenfassung am Schluß dieser Arbeit, wo die Aufgabe für alle drei Geometrien unabhängig von der Dimension einheitlich behandelt wird.

Betrachten wir zuerst den Fall der gewöhnlichen hyperbolischen Kugeln: Der Durchschnitt $\mathfrak{K}_\gamma$ der beiden geodätischen Kugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$

$$\text{ch}\,\vartheta_1 \,\text{ch}\,\vartheta_2 \ldots \text{ch}\,\vartheta_{n-1} \,\text{ch}\,(\vartheta_n \pm \iota_{i0}) \leqq \text{ch}\,b \qquad (\iota_{i0} > 0,\ a < b) \tag{16. 7}$$

wird als Ausgangsextremalkörper genommen. Wir verlangen zuerst, daß der Schnitt dieser Kugeln mit der Ebene $\vartheta_n = 0$ eine Kugel vom Radius a wird. Daraus ergibt sich wegen $\text{ch}\,\vartheta_1 \ldots \text{ch}\,\vartheta_{n-1} = \text{ch}\,a$

$$\text{ch}\,a \,\text{ch}\,\iota_{i0} = \text{ch}\,b. \tag{16. 8}$$

Nun findet man für die kovarianten Komponenten der äußeren Normalen n von (16. 7) nach den Formeln von 13.

$$\begin{aligned} \iota_{i1} &= \coth b\,\text{tgh}\,\vartheta_1, \\ \iota_{i2} &= \coth b\,\text{tgh}\,\vartheta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \iota_{in-1} &= \coth b\,\text{tgh}\,\vartheta_{n-1}, \\ \iota_{in} &= \coth b\,\text{tgh}\,(\vartheta_n \pm \iota_{i0}). \end{aligned} \tag{16. 9}$$

Wir können also setzen

$$\cos(\bar{n}, \vartheta_i) = \cot b \frac{\operatorname{tgh} \vartheta_i}{\operatorname{ch} \vartheta_1 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1) \tag{16.10}$$

und

$$\cos(n, \vartheta_n) = \cot b \frac{\operatorname{tgh}(\vartheta_n \pm \eta_0)}{\operatorname{ch} \vartheta_1 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1}}. \tag{16.11}$$

Verlangt man nun, daß der Winkel $(\bar{n}, \vartheta_1)$ für $\vartheta_1 = a$ und $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \dots = \vartheta_n = 0$ gleich γ $\left(0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ wird, so erhält man noch die Bedingung

$$\cos \gamma = \operatorname{coth} b \operatorname{tgh} a \tag{16.12}$$

oder

$$\varrho_\gamma = \operatorname{tgh} b = \frac{\operatorname{tgh} a}{\cos \gamma} = \frac{\varrho_0}{\cos \gamma}, \tag{16.13}$$

wodurch alle beiden Größen ϱ_γ und η_0 völlig bestimmt sind.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichung von weiteren Extremalgebieten aufzustellen, und zwar diejenige für welche

$$\cos \gamma \geqq \operatorname{tgh} a \tag{16.14}$$

gilt. Dazu betrachten wir die Flächenschar

$$\operatorname{ch} \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1} \operatorname{sh}(\vartheta_n + \eta_0) = \operatorname{sh} b \qquad (\eta_0 > 0) \tag{16.15}$$

und verlangen zuerst, daß der Schnitt von (16.15) mit $\vartheta_n = 0$ eine hyperbolische Kugel von hyperbolischem Radius a ist. Wir erhalten dann wie vorhin als erste Bedingung

$$\operatorname{ch} a \operatorname{sh} \eta_0 = \operatorname{sh} b. \tag{16.16}$$

Nun finden wir in Analogie mit (16.9) für die kovarianten Komponenten der Normalen $\bar{n}$ von (16.15)

$$\begin{aligned} \eta_i &= \operatorname{tgh} b \operatorname{tgh} \vartheta_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \eta_n &= \operatorname{tgh} b \operatorname{coth}(\vartheta_n + \eta_0), \end{aligned} \tag{16.17}$$

es wird also

$$\begin{aligned} \cos(\bar{n}, \vartheta_i) &= \operatorname{tgh} b \frac{\operatorname{tgh} \vartheta_i}{\operatorname{ch} \vartheta_1 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \cos(\bar{n}, \vartheta_n) &= \operatorname{tgh} b \frac{\operatorname{coth}(\vartheta_n + \eta_0)}{\operatorname{ch} \vartheta_1 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1}}. \end{aligned} \tag{16.18}$$

Wenn wir nun verlangen, daß der Winkel $(\bar{n}, \vartheta_1)$ bei $\vartheta_1 = a$, $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \dots = \vartheta_n = 0$ gleich γ werden soll, so erhalten wir das Analogon von (16.12)

$$\cos \gamma = \operatorname{tgh} b \operatorname{tgh} a, \tag{16.19}$$

oder

$$\varrho_\gamma = \operatorname{coth} b = \frac{\operatorname{tgh} a}{\cos \gamma} = \frac{\varrho_0}{\cos \gamma}. \tag{16.20}$$

Der Grenzfall $b = \infty$ (also auch $\eta_0 = \infty$) kann wieder wie in der ebenen hyperbolischen Geometrie behandelt werden. Wir finden dann von (16. 15) ausgehend als Gleichung der Grenzkugel

$$\operatorname{ch}\vartheta_1 \operatorname{ch}\vartheta_2 \ldots \operatorname{ch}\vartheta_{n-1}(\operatorname{ch}\vartheta_n + \operatorname{sh}\vartheta_n) = \operatorname{ch} a. \tag{16. 21}$$

Ähnlich wie vorhin erhalten wir schließlich durch Betrachtung der an der Hyperfläche $\vartheta_n = 0$ gespiegelten Extremalflächen (16. 15) und (16. 21) die Extremalgebiete, für welche (16. 20) gilt. Sie werden dann als Durchschnitt der beiden Gebiete $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\vartheta_1 \operatorname{ch}\vartheta_2 \ldots \operatorname{ch}\vartheta_{n-1} \operatorname{sh}(\vartheta_n + \eta_0) &\leqq \operatorname{sh} b, \\ -\operatorname{ch}\vartheta_1 \operatorname{ch}\vartheta_2 \ldots \operatorname{ch}\vartheta_{n-1} \operatorname{sh}(\vartheta_n - \eta_0) &\leqq \operatorname{sh} b \end{aligned} \qquad (\eta_0 > 0) \tag{16. 22}$$

mit einem endlichen oder unendlichen b gegeben. Wir bezeichnen sie ebenfalls mit $\mathfrak{R}_\gamma$ und nennen sie in Übereinstimmung mit unseren früheren Bezeichnungen linsenförmige Extremalgebiete.

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so kann man mit Rücksicht auf (16. 9) für die kovarianten Komponenten der normalen $\bar{\mathfrak{n}}$ eines linsenförmigen Gebietes $\mathfrak{R}_\gamma$ folgende allgemeine Formeln angeben

$$\varrho_\gamma \eta_i = \operatorname{tgh}\bar{\vartheta}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{16. 23}$$

und

$$\begin{aligned} \varrho_\gamma \eta_n &= \operatorname{tgh}(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0) && \text{für } \varrho_\gamma < 1 \\ \varrho_\gamma \eta_n &= \operatorname{coth}(\bar{\vartheta}_n \pm \eta_0) && \text{für } \varrho_\gamma > 1 \\ \varrho_\gamma \eta_n &= \pm 1 && \text{für } \varrho_\gamma = 1. \end{aligned} \tag{16. 24}$$

Dabei wird ϱ_γ ständig durch

$$\varrho_\gamma = \frac{\operatorname{tgh} a}{\cos\gamma} \tag{16. 25}$$

gegeben.

Wir betrachten nun einen im Zylinder (16. 5) eingeschriebenen Rotationskörper $\mathfrak{K}$, setzen also voraus, daß mindestens ein t-Wert existiert, für welchen die Funktion $\eta(t)$ ihr Maximum a erreicht. Ist t_0 der erste dieser Werte, so zerlegen wir nach dem Muster des vorigen Kapitels den Rand $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ in zwei Teile, den „oberen" $\mathfrak{O}_1$ und den „unteren" $\mathfrak{O}_2$, und ordnen genau wie vorhin jedem Punkt P von $\mathfrak{O}_1$ (bzw. $\mathfrak{O}_2$) denjenigen Punkt $\bar{P}$ von $\mathfrak{R}_1$ (bzw. $\mathfrak{R}_2$) zu, in dem die durch P gehende ϑ_n-Linie den Rand von $\mathfrak{R}_1$ (bzw. $\mathfrak{R}_2$) schneidet.

Entsprechend dem Verfahren von Nr. 13 wird auch der Winkel zwischen den äußeren Normalen $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ von $\mathfrak{R}_\gamma$ in zwei einander zugeordneten

Punkten definiert, so daß, wenn ξ^i die kontravarianten Komponenten von $\boldsymbol{n}$ in O_P sind und η_i die kovarianten Komponenten von $\bar{\boldsymbol{n}}$ $O_{\bar{P}}$,

$$\cos(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{n}}) = \sum_1^n \xi^i \eta_i \tag{16.26}$$

wird.

Wir gehen nun wieder vom Integral

$$J = \int \cos(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{n}})\, dO \tag{16.27}$$

aus und haben zuerst mit Rücksicht auf (16.26) und (16.9)

$$J = \coth b \sum_1^{n-1} \int \xi^i \operatorname{tgh} \vartheta_i\, dO + \coth b \int \xi^n \operatorname{tgh}(\vartheta_n \pm \eta_0)\, dO. \tag{16.28}$$

Dabei wird beim letzten Integral das Pluszeichen bei der Integration über $\mathfrak{O}_1$ genommen und das Minuszeichen bei der Integration über $\mathfrak{O}_2$.

Durch Einführung der kovarianten Komponenten von $\boldsymbol{n}$ in die Summe rechts mit Hilfe von

$$\xi_i = \frac{\xi_i}{\operatorname{ch}^2 \vartheta_1 \dots \operatorname{ch}^2 \vartheta_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1) \tag{16.29}$$

geht nun die Summe (16.28) in die Summe

$$J_1 = \sum_1^{n-1} \int \xi_i \left(\frac{\operatorname{tgh} \vartheta_i}{\operatorname{ch}^2 \vartheta_1 \dots \operatorname{ch}^2 \vartheta_{i-1}} \right) dO \tag{16.30}$$

über, die wir wieder mit Hilfe des Gaussschen Divergenzsatzes transformieren können. Man braucht nur

$$\lambda^i = \frac{\operatorname{tgh} \vartheta_i}{\operatorname{ch}^2 \vartheta_1 \dots \operatorname{ch}^2 \vartheta_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1), \tag{16.31}$$
$$\lambda^n = 0$$

zu setzen, und die Identität

$$\frac{1}{g} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{g \operatorname{tgh} \vartheta_i}{\operatorname{ch}^2 \vartheta_1 \dots \operatorname{ch}^2 \vartheta_{i-1}} \right) = (n-1) \tag{16.32}$$

zu berücksichtigen. Hier ist

$$g = \operatorname{ch}^{n-1} \vartheta_1 \operatorname{ch}^{n-2} \vartheta_2 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1}. \tag{16.33}$$

Der Beweis von (16.32) verläuft genau wie der Beweis von (13.20) von dem vorigen Kapitel.

Wir erhalten dann mit Rücksicht auf (16.28)

$$\operatorname{tgh} b \int \cos(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{n}})\, dO = (n-1)V + \int \xi^n \operatorname{tgh}(\vartheta_n \pm \eta_0)\, dO. \tag{16.34}$$

Für das letzte Integral erhalten wir nun zuerst wegen (16.6) und der Beziehung

$$\operatorname{ch} \vartheta_1 \dots \operatorname{ch} \vartheta_{n-1}\, \xi^n = \cos(\boldsymbol{n}, \vartheta_n), \tag{16.35}$$

$$\int \xi^n \operatorname{tg}(\vartheta_n \pm \eta_0)\, dO = \pm \int \sqrt{\operatorname{tgh}^2 b - \operatorname{tgh}^2 \eta}\, \cos(\boldsymbol{n}, \vartheta_n)\, dO, \tag{16.36}$$

wobei das Pluszeichen bei der Integration über $\mathfrak{O}_1$ und das Minuszeichen bei der Integration über $\mathfrak{O}_2$ genommen wird. Nun kann $\mathfrak{K}$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} x_\nu^2 &= \operatorname{sh}^2 \eta_j(t), \\ x_n &= \operatorname{ch} \eta_j(t) \operatorname{sh} \vartheta_n(t), \\ x_{n+1} &= \operatorname{ch} \eta_j(t) \operatorname{ch} \vartheta_n(t) \end{aligned} \tag{16. 37}$$

dargestellt werden und wir können genau wie in 13. die Bogenlänge s der „Rotationskurve" C

$$\begin{aligned} r &= \operatorname{sh} \eta_j(t), \\ x_n &= \operatorname{ch} \eta_j(t) \operatorname{sh} \vartheta_n(t), \\ x_{n+1} &= \operatorname{ch} \eta_j(t) \operatorname{ch} \vartheta_n(t) \end{aligned} \tag{16. 38}$$

an Stelle von t einführen. s wird durch der Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\eta'^2 + \operatorname{ch}^2 \eta(t)\, \vartheta_n'^2(t)} \tag{16. 39}$$

bestimmt. Wählt man noch die willkürliche Konstante so, daß den beiden Achsenpunkten die Werte $s = 0$ und $s = l$, wo l die Gesamtlänge von C bedeutet, entsprechen, so entsteht durch Rotation des Teilbogens C_1

$$0 \leqq s \leqq s_0 \tag{16. 40}$$

der untere Teil der Oberfläche von $\mathfrak{K}$, und durch Rotation von C_2

$$s_0 \leqq s \leqq l \tag{16. 41}$$

der obere Teil. s_0 ist ein solcher Wert von s mit $\eta_j(t(s_0)) = a$. Ähnlich wie im sphärischen Fall wird $\vartheta_n(0) < \vartheta_n(l)$ genommen.

Mit Hilfe der Darstellung (16. 37) für $\mathfrak{K}_1$ erhalten wir nun unter Beibehaltung der Bezeichnungen für die Funktion $\eta_j(t(s)) = \eta_j(s)$

$$dO = \operatorname{sh}^{n-2} \eta_j(s)\, d\omega_{n-1} ds. \tag{16. 42}$$

Beachtet man noch die Beziehung

$$\cos(n, \vartheta_n) = -\frac{d\eta}{ds}, \tag{16. 43}$$

so erhält man nach Integration über die Kugel

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 \tag{16. 44}$$

und Ausführung einfacher Rechnungen

$$\begin{aligned} \pm \int \cos(n, \vartheta_n) \sqrt{\operatorname{tgh}^2 b - \operatorname{tgh}^2 \eta_j}\, dO \\ = 2(n-1) W_{n-1} \int_0^a \operatorname{sh}^{n-2} \eta \sqrt{\operatorname{tgh}^2 b - \operatorname{tgh}^2 \eta}\, d\eta. \end{aligned} \tag{16. 45}$$

Somit wird, wenn man dieses Integral mit $\omega(a, \gamma)$ bezeichnet,

$$\text{(16. 46)} \qquad \operatorname{tgh} b \int \cos(n, \bar{n})\, dO = (n-1)V + \omega(a, \gamma).$$

Durch Spezialisierung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\gamma$ erhält man wegen $\cos(n, \bar{n}) = 1$ den Wert von $\omega(a, \gamma)$, den man in (16. 34) einführen kann. Die Rechnungen laufen genau wie in Nr. 13 und geben für einen linsenförmigen Extremalkörper $\mathfrak{K}_\gamma$

$$\text{(16. 47)} \qquad (n-1)(V - V_\gamma) = \varrho_\gamma (O - O_\gamma) - 2\varrho_\gamma \int \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, dO$$

oder noch

$$\text{(16. 48)} \qquad (n-1)(V - V_\gamma)\cos\gamma = \operatorname{tgh} a\,(O - O_\gamma) - 2 \operatorname{tgh} a\, R_n(\mathfrak{K}).$$

Für $\gamma = 0$ erhält man wegen[43])

$$\text{(16. 49)} \qquad V_0 = nW_n \int_0^a \operatorname{sh}^{n-1} x\, dx$$

und

$$\text{(16. 50)} \qquad O_0 = nW_n \operatorname{sh}^{n-1} a.$$

$$\text{(16. 51)} \qquad (n-1)V = \operatorname{tgh} a\, O - nW_n\Big(\operatorname{tgh} a \operatorname{sh}^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \operatorname{sh}^{n-1} x\, dx\Big) - 2 \operatorname{tgh} a\, R_n(\mathfrak{K}),$$

woraus dann durch Weglassen des Restgliedes R_n die Ungleichung

$$\text{(16. 52)} \qquad (n-1)V \leqq \operatorname{tgh} a\, O - nW_n\Big(\operatorname{tgh} a \operatorname{sh}^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \operatorname{sh}^{n-1} x\, dx\Big)$$

folgt. Diese Ungleichung stimmt inhaltlich mit einer zuerst von Erhard Schmidt[44]) gegebenen Ungleichung überein. nW_n bedeutet hier wieder die Oberfläche der Einheitskugel $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Wir haben hier unseren Rechnungen den Fall einer gewöhnlichen hyperbolischen Kugel, also die Formeln (16. 9), zugrunde gelegt. Es zeigt sich aber, ohne daß wir dabei die einzelnen Rechnungen wiederholen, daß die Formeln (16. 23) und (16. 24), d. h. die Fälle einer Hyper- bzw. Grenzkugel, zu denselben Formeln (16. 48) und (16. 51) führen, wenn man ϱ_γ durch (16. 20) definiert. Somit kann auch die Gültigkeit von (16. 48) für jedes γ als begründet betrachtet werden.

Ich will zum Schluß ohne Beweis anführen, daß man genau wie im euklidischen und sphärischen Fall auch Extremalkörper $\mathfrak{K}_\gamma^*$ vom Kugel-Zylinder-Typus konstruieren kann. Die entsprechende Gleichung erhält man für $\gamma \to 0$ aus (16. 47), wenn man die beiden Halbkugeln $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ im Zylinder (16. 5) auseinander zieht. γ wird dann gleich $\varphi_1 - \varphi_2$, wenn $(0, \ldots, 0, \varphi_1)$,

---

[43]) Für eine Begründung vgl. S. 736.

[44]) Schmidt, II, S. 221.

$(0, \ldots, 0, \varphi_2)$, $(\varphi_1 > \varphi_2)$ die neuen Koordinaten der Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ bedeuten. Wir schreiben die drei Gleichungen zusammen:

$$(16.53)\quad (n-1)(V - V_\gamma)\cos\gamma = \operatorname{tgh} a\,(O - O_\gamma) - 2\operatorname{tg} a\, R_n(\mathfrak{K}),$$

$$(16.54)\quad (n-1)V = \operatorname{tg} a\, O - nW_n(\operatorname{tgh} a \operatorname{sh}^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \operatorname{sh}^{n-1} x\, dx) - 2\operatorname{tgh} a\, R_n(\mathfrak{K})$$

und

$$(16.55)\quad (n-1)(V - V_\gamma^*) = \operatorname{tgh} a\,(O - O_\gamma^*) - 2\operatorname{tgh} a\, R_n(\mathfrak{K}),$$

und fassen ihren Inhalt im folgenden Satz zusammen:

Unsere Aufgabe für den „Zylinder“ (16.5) *ist für Rotationskörper immer lösbar, und der Extremalkörper ist eindeutig bestimmt.*

Die Lösung ist für

$$(16.56)\quad 2(n-1)W_{n-1}\int_0^a \operatorname{sh}^{n-2} x\, dx < O < nW_n \operatorname{sh}^{n-1} a$$

ein linsenförmiger Körper $\mathfrak{K}_\gamma$ *mit* $O_\gamma = O$, *und für* O

$$(16.57)\quad nW_n \operatorname{sh}^{n-1} a \leqq O$$

ein solcher $\mathfrak{K}_\gamma^*$ *vom Kugel-Zylinder-Typus mit* $O_\gamma = O$. *Für*

$$(16.58)\quad O \leqq 2(n-1)W_{n-1}\int_0^a \operatorname{sh}^{n-2} x\, dx$$

ist die Aufgabe unlösbar.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus den Gleichungen (16.53), (16.55) unmittelbar. Die eindeutige Bestimmung von K_γ^* folgt hier mittels der ähnlich wie im sphärischen Fall zu beweisenden Formel

$$(16.59)\quad O_\gamma^* = O_0 + \gamma(n-1)W_{n-1}\operatorname{sh}^{n-2} a \operatorname{ch} a,$$

während für die Extremalflächen vom linsenförmigen Typus $\mathfrak{K}_\gamma$ diese Tatsache aus der mit Rücksicht auf (16.42) leicht zu beweisenden Darstellung für O_γ.

$$(16.60)\quad O_\gamma = 2(n-1)W_{n-1}\int_0^a \frac{\operatorname{sh}^{n-2} x\, dx}{\sqrt{1 - k_\gamma^2 \operatorname{tgh}^2 x}} \qquad \left(k_\gamma = \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{tgh} a}\right)$$

unmittelbar folgt.

17. *Die isoperimetrische Ungleichung im n-dimensionalen hyperbolischen Raum.* Wir formen zuerst die Ungleichung (16.52) um. Setzt man nämlich

$$(17.1)\quad \Phi(a) = \operatorname{tgh} a \operatorname{sh}^{n-1} a - (n-1)\int_0^a \operatorname{sh}^{n-1} x\, dx,$$

so wird

$$\Phi'(a) = \frac{\mathrm{sh}^{n-1} a}{\mathrm{ch}^2 a}, \tag{17.2}$$

und wegen $\Phi(0) = 0$ wird

$$\Phi(a) = \int_0^a \frac{\mathrm{sh}^{n-1} x}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx, \tag{17.3}$$

also erhält man an Stelle von (16.32)

$$(n-1)\, V \leqq \mathrm{tgh}\, a\, O - n\, W_n \int_0^a \frac{\mathrm{sh}^{n-1} x}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx. \tag{17.4}$$

Wir bezeichnen nun mit $F(a)$ die rechte Seite dieser Ungleichung und bestimmen das Maximum von $F(a)$. Aus

$$F'(a) = \frac{O - n\, W_n \mathrm{sh}^{n-1} a}{\mathrm{ch}^2 a} = 0 \tag{17.5}$$

erhält man dann den Extremalwert von $F(a)$. Es folgt dann

$$Q^{n-1} = \mathrm{sh}^{n-1} a = \frac{O}{n\, W_n} \tag{17.6}$$

$$\frac{(n-1)\, V}{n\, W_n} \leqq \frac{Q^n}{\sqrt{1+Q^2}} - \int_0^{Ar\,\mathrm{sh}\, Q} \frac{\mathrm{sh}^{n-1} x}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx. \tag{17.7}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung kann nun genau so umgeformt werden, wie ihre entsprechende (14.9) vom vorigen Kapitel. Denn das Integral ist hier, wie man durch eine einfache Transformation einsieht, gleich

$$\int_0^Q \frac{x^{n-1}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx, \tag{17.8}$$

und wir erhalten schließlich nach einigen Rechnungen

$$V \leqq n\, W_n \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{17.9}$$

Diese Ungleichung stellt das Analogon von (14.19) dar. Sie ist zwar zuerst nur für Rotationskörper bewiesen, jedoch kann sie mit Hilfe der Schwarz-Schmidtschen Abrundung für beliebige Körper nachgewiesen werden.

Ist nämlich $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper, so kann, wie Erhard Schmidt in einer noch unveröffentlichten Arbeit bewiesen hat, ein Rotationskörper $\bar{\mathfrak{K}}$ konstruiert werden mit gleichem Volumen wie $\mathfrak{K}$ und nicht größerer Oberfläche als die Oberfläche von $\mathfrak{K}$. Bezeichnet man dann diese Oberfläche mit $\bar{O}$ und den entsprechenden Wert von Q mit $\bar{Q}$, so wird

$$\bar{Q} \leqq Q, \tag{17.10}$$

also

$$V \leqq n\, W_n \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1+x^2}} \leqq n\, W_n \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{17.11}$$

Hiermit gilt (17. 9) für einen beliebigen Körper $\mathfrak{K}$ des hyperbolischen Raumes und stellt dort die isoperimetrische Ungleichung dar. Wie man sofort einsieht, besonders durch Betrachtung der Gleichung (16. 54), tritt in (17. 9) das Gleichheitszeichen nur für die Kugel ein.

Die Ungleichung (17. 9) zeigt eine auffallende Analogie mit (14. 9). Führt man die Krümmung des betrachteten Raumes $K = \pm 1$ ein, so kann man beide Ungleichungen in der einzigen Ungleichung

$$V \leqq n\, W_n \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1-K\,x^2}} \tag{17.12}$$

zusammenfassen. Wir werden sogar in der nächsten Nummer folgendes zeigen: Ist die Krümmung K des betrachteten Raumes gleich K, so gilt

$$V \leqq n\, W_n \int_0^Q \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{1-K\,x^2}} \tag{17.13}$$

mit

$$Q = \sqrt[n-1]{\frac{O}{n\, W_n}}. \tag{17.14}$$

Daraus folgt für $K \to 0$ die gewöhnliche isoperimetrische Ungleichung

$$V \leqq W_n \left(\frac{O}{n\, W_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{17.15}$$

womit auch diese Ungleichung als Grenzfall der entsprechenden Ungleichungen für den sphärischen bzw. hyperbolischen Raum erscheint.

Wie die isoperimetrische Ungleichung für den sphärischen Raum, kann diese Ungleichung auch mittels eines allgemeinen Satzes von Erhard Schmidt[45]) erhalten werden.

18. *Verallgemeinerungen.* Wir geben zuerst in dieser letzten Nummer eine Zusammenfassung und Verallgemeinerung unserer Ergebnisse mit Hilfe der Weierstrassschen projektiven Koordinaten, unabhängig von der Dimensionszahl unserer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung. Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die projektiven Koordinaten eines Punktes P

[45]) Schmidt, III.

unserer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\mathfrak{M}_n$. Dabei wird noch den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n+1}$ die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \frac{1}{K} x_{n+1}^2 = \frac{1}{K} \tag{18.1}$$

auferlegt, wenn K die Krümmung von $\mathfrak{M}_n$ bedeutet[46]).

Für das Bogenelement ds^2 gilt dann

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 + \frac{1}{K} dx_{n+1}^2. \tag{18.2}$$

Unabhängig von dem Vorzeichen der Krümmung kann man für $\mathfrak{M}_n$ eine Parameterdarstellung angeben, und zwar durch die Formeln

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}\, \vartheta_1, \\
x_2 &= \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}\, \vartheta_1 \sin \sqrt{K}\, \vartheta_2, \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}\, \vartheta_1 \cos \sqrt{K}\, \vartheta_2 \sin \sqrt{K}\, \vartheta_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}\, \vartheta_1 \cos \sqrt{K}\, \vartheta_2 \cos \sqrt{K}\, \vartheta_3 \ldots \sin \sqrt{K}\, \vartheta_n, \\
x_{n+1} &= \cos \sqrt{K}\, \vartheta_1 \cos \sqrt{K}\, \vartheta_2 \cos \sqrt{K}\, \vartheta_3 \ldots \cos \sqrt{K}\, \vartheta_n,
\end{aligned} \tag{18.4}$$

wobei $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ reelle Parameter sind.

Wir behandeln nun die drei Fälle:

1. $K > 0$. Die ϑ_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) variieren von 0 bis π und ϑ_n von 0 bis 2π. Wir haben hier, wenn man noch $x_{n+1} = \sqrt{K} x'_{n+1}$ setzt, eine Darstellung der durch zwei diametral liegende Punkte punktierten n-dimensionalen Kugel.

2. $K < 0$. Die x_i werden ausgedrückt mit Hilfe hyperbolischer Funktionen. Wir haben den hyperbolischen Raum.

3. $K = 0$. Diesen Fall betrachten wir als Grenzfall $K \to 0$. Wir erhalten dann $x_i = \vartheta_i$, und haben den gewöhnlichen euklidischen Raum.

Rechnet man das ds^2 mit Hilfe von (18.4) um, so erhält man

$$\begin{aligned}
ds^2 = d\vartheta_1^2 + \cos^2 \sqrt{K}\, \vartheta_1\, d\vartheta_2^2 + \cos^2 \sqrt{K}\, \vartheta_1 \cos^2 \sqrt{K}\, \vartheta_2\, d\vartheta_3^2 + \\
+ \cdots + \cos^2 \sqrt{K}\, \vartheta_1 \ldots \cos^2 \sqrt{K}\, \vartheta_{n-1}\, d\vartheta_n^2,
\end{aligned} \tag{18.5}$$

das für $K = \pm 1$ in (11.1) und (16.1) übergeht.

---

[46]) Hier kann nur das wiederholt werden, was in dieser Nummer gebraucht wird. Für ein tieferes Eindringen vgl. man entweder das Buch von CARTAN oder dasjenige von KILLING, wo diese Koordinaten ausführlich behandelt werden.

Wir formulieren nun unsere Aufgabe für alle drei Geometrien einheitlich:

Es soll unter allen Rotationskörpern, welche dem „Zylinder"

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq \frac{1}{K} \sin^2 \sqrt{K}\, a \qquad (a > 0) \tag{18. 6}$$

in dem vorhin erklärten Sinne einbeschrieben sind, derjenige bestimmt werden, welcher unter gegebener Oberfläche das Maximum des Volumens erreicht.

Für $K > 0$ entspricht die vorherige Formulierung der Problemstellung für den sphärischen Fall und für $K < 0$ für den hyperbolischen. Für den sphärischen Fall muß man allerdings $2\sqrt{K}a < \pi$ voraussetzen. Der euklidische Fall $K = 0$ ist in (18. 6) als Grenzfall $K \to 0$ enthalten.

Für $n = 2$ ist, wie uns bekannt ist, die Einschränkung der Symmetrie (was hier der Rotationssymmetrie entspricht) nicht notwendig und wird hier auch nicht weiter verfolgt werden.

Um die isoperimetrischen Gleichungen bzw. Ungleichungen für ein beliebiges K aufzustellen, könnten wir die Rechnungen der vorigen Kapitel wiederholen unter Zugrundelegung der allgemeinen Metrik (18. 5) und der Formeln (18. 4). Dies ist aber nicht nötig, da ja unsere Gleichungen nur geometrische Größen enthalten, die man sofort auf die allgemeine Metrik (18. 5) übertragen kann.

Verabreden wir, für $n = 2$ an Stelle von V, O, V_γ, O_γ usw. J, L, J_γ, L_γ usw. zu schreiben, so kann man dann die allgemeinen Gleichungen

$$(n-1)(V - V_\gamma)\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}(O - O_\gamma) - \frac{2\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}} R_n(\mathfrak{R}) \tag{18. 7}$$

und

$$(n-1)(V - V_\gamma^*) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}}(O - O_\gamma^*) - \frac{2\operatorname{tg}\sqrt{K}\,a}{\sqrt{K}} R_n(\mathfrak{R}) \tag{18. 8}$$

erhalten.

Wir verbinden den Spezialfall $\gamma = 0$ mit der Ausrechnung des Volumens bzw. der Oberfläche einer geodätischen Kugel vom Radius a. Sucht man z. B. die Oberfläche O_0 und das Volumen V_0 von (18. 6), so folgt aus ihrer Definition unmittelbar

$$O_0 = n\, W_n \frac{\sin^{n-1}\sqrt{K}\,a}{K^{\frac{n-1}{2}}} \tag{18. 9}$$

und wegen

$$\frac{dV_0}{da} = O_0 \tag{18. 10}$$

$$V_0 = \frac{n\, W_n}{K^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^a \sin^{n-1}\sqrt{K}\,x\, dx. \tag{18. 11}$$

Dabei bedeutet nW_n die Oberfläche der Einheitskugel

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1. \tag{18. 12}$$

Setzt man nun in (18. 8) $\gamma = 0$ ein, so folgt mit Rücksicht auf (18. 9), (18. 11)

$$(n-1)V = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}a}{\sqrt{K}}\,O - \frac{n\,W_n}{K^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^a \frac{\sin^{n-1}\sqrt{K}x}{\cos^2\sqrt{K}x}\,dx - 2\,\frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}a}{\sqrt{K}}\,R_n(\mathfrak{R}). \tag{18. 13}$$

Diese Gleichung gilt für jedes $n \geqq 2$ (für $n = 2$ mit J, L an Stelle von V, O) und für alle drei hier betrachteten Geometrien.

Aus (18. 13) kann man allerdings durch Umformungen, welche denjenigen von Nr. 14 bzw. Nr. 17 analog laufen, folgende allgemeine isoperimetrische Ungleichung aufstellen:

$$V \leqq n\,W_n \int_0^{\sqrt[n-1]{\frac{O}{n\,W_n}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{1-Kx^2}}, \tag{18. 14}$$

welche einheitlich in den drei hier betrachteten Räumen gilt.

In einer späteren Arbeit wird unter anderem gezeigt, daß die gleiche Ungleichung auch im elliptischen Raum gilt, wenn man dort den durch eine geschlossene Hyperfläche begrenzten Körper geeignet definiert.

(Eingegangen am 3. Juli 1941.)

Maßkegelschnitt und Trigonometrie.

Von

Karl Kommerell in Tübingen.

Wenn man nach dem Vorgange von F. Klein die hyperbolische und die elliptische Geometrie durch die Cayleysche Maßbestimmung in bezug auf eine nichtzerfallende reelle oder imaginäre (nullteilige) Kurve zweiter Ordnung gründet, dann ist es ein wichtiges Problem, aus der Maßbestimmung heraus die Beziehungen zu finden, die zwischen den Seiten a, b c und den Winkeln α, β, γ eines Nichteuklidischen Dreiecks ABC bestehen. In seiner berühmten Arbeit „Über die sogenannte Nichteuklidische Geometrie" (= gesammelte math. Abhandl. Bd. 1 (1921), S. 254–305) leitet Klein die trigonometrischen Formeln für den hyperbolischen Fall aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ab unter Berufung auf „das Prinzip der analytischen Permanenz", ebenso auch in seinen „Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie", Springer, 1928, S. 196. Bei dieser Art der Ableitung, die gewiß die kürzeste ist, muß man aber aus den Ebenen, in der die Maßkegelschnitte liegen, in den euklidischen Raum herausgehen. Da außerdem für den jungen Mathematiker dieser Gedankengang nicht leicht zu erfassen ist, so entsteht die Aufgabe, in unmittelbarem Anschluß an den jeweiligen Kegelschnitt, die trigonometrischen Formeln herzuleiten. Dieses Bedürfnis hat sich mir besonders stark bei der Herausgabe meiner „Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene" (K. F. Köhler, 1941) aufgedrängt; man vgl. dort S. 197. Da mir nun keine derartige Ableitung der trigonometrischen Formeln bekannt ist, so möge in den folgenden Zeilen für den hyperbolischen Fall eine solche gegeben werden. Für den Fall der elliptischen Geometrie kann man ebenso verfahren, ja man kann, wenn man will, beide Fälle zugleich behandeln.

Wir legen für das Folgende als Maßkegelschnitt den Einheitskreis zugrunde, dessen Gleichung in homogenen rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, t und in homogenen Linienkoordinaten u, v, w

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad u^2 + v^2 - w^2 = 0 \tag{1}$$

ist. Die Ecken des Dreiecks ABC mögen die Koordinaten x_k, y_k, t_k $(k = 1, 2, 3)$ besitzen, und die entsprechenden Seiten die Koordinaten u_k, v_k, w_k $(k = 1, 2, 3)$. Zwischen ihnen bestehen die Beziehungen

$$\begin{array}{lll} y_2t_3 - y_3t_2 = s_1u_1, & x_3t_2 - x_2t_3 = s_1v_1, & x_2y_3 - x_3y_2 = s_1w_1, \\ y_3t_1 - y_1t_3 = s_2u_2, & x_1t_3 - x_3t_1 = s_2v_2, & x_3y_1 - x_1y_3 = s_2w_2, \\ y_1t_2 - y_2t_1 = s_3u_3, & x_2t_1 - x_1t_2 = s_3v_3, & x_1y_2 - x_2y_1 = s_3w_3. \end{array} \tag{2}$$

und

$$
\begin{array}{lll}
v_2w_3 - v_3w_2 = \sigma_1 x_1, & u_3w_2 - u_2w_3 = \sigma_1 y_1, & u_2v_3 - u_3v_2 = \sigma_1 t_1, \\
v_3w_1 - v_1w_3 = \sigma_2 x_2, & u_1w_3 - u_3w_1 = \sigma_2 y_2, & u_3v_1 - u_1v_3 = \sigma_2 t_2, \\
v_1w_2 - v_2w_1 = \sigma_3 x_3, & u_2w_1 - u_1w_2 = \sigma_3 y_3, & u_1v_2 - u_2v_1 = \sigma_3 t_3.
\end{array} \tag{3}
$$

Dabei sind s_1, s_2, s_3 und σ_1, σ_2, σ_3 sechs von Null verschiedene Proportionalitätsfaktoren: zwischen ihnen bestehen wichtige Beziehungen, die wir jetzt ableiten wollen. Entnimmt man aus den Gleichungen (2) die Werte von u_1, v_2, u_2, v_1 und setzt sie in die letzte Gleichung (3) ein, so erhält man

$$s_1 s_2 \sigma_3 t_3 = (y_2 t_3 - y_3 t_2)(x_1 t_3 - x_3 t_1) - (y_3 t_1 - y_1 t_3)(x_3 t_2 - x_2 t_3)$$

und nach leichter Rechnung, wegen $t_3 \neq 0$,

$$s_1 s_2 \sigma_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

und endlich durch zyklische Vertauschung der Indizes

$$s_1 s_2 \sigma_3 = s_2 s_3 \sigma_1 = s_3 s_1 \sigma_2. \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{s_1}{\sigma_1} = \frac{s_2}{\sigma_2} = \frac{s_3}{\sigma_3}. \tag{6}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$f_{kl} = x_k x_l + y_k y_l - t_k t_l = f_{lk}, \tag{7}$$

$$\varphi_{kl} = u_k u_l + v_k v_l - w_k w_l = \varphi_{lk}, \tag{8}$$

wo k, l die Zahlen 1, 2 oder 3 sein können; f_{kk} und φ_{kk} sind von Null verschieden, weil keine Ecke des Dreiecks auf dem Fundamentalkreis liegt, und weil keine Seite des Dreiecks den Kreis berührt. Im folgenden spielen die Determinanten

$$f = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

sowie ihre Unterdeterminanten eine Rolle. Die Unterdeterminante von f_{kl} in f heiße F_{kl}, und Φ_{kl} die Unterdeterminante von φ_{kl} in φ, dann hat man für die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC die Formeln[1])

$$\text{ch}\,\frac{a}{r} = \frac{f_{23}}{\sqrt{f_{22} f_{33}}}, \quad \text{sh}\,\frac{a}{r} = \sqrt{\frac{-F_{11}}{f_{22} f_{33}}}, \quad \cos\alpha = \frac{\varphi_{23}}{\sqrt{\varphi_{22} \varphi_{33}}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{\Phi_{11}}{\varphi_{22} \varphi_{33}}}, \tag{10}$$

$$\text{ch}\,\frac{b}{r} = \frac{f_{31}}{\sqrt{f_{33} f_{11}}}, \quad \text{sh}\,\frac{b}{r} = \sqrt{\frac{-F_{22}}{f_{33} f_{11}}}, \quad \cos\beta = \frac{\varphi_{31}}{\sqrt{\varphi_{33} \varphi_{11}}}, \quad \sin\beta = \sqrt{\frac{\Phi_{22}}{\varphi_{33} \varphi_{11}}}, \tag{11}$$

$$\text{ch}\,\frac{c}{r} = \frac{f_{12}}{\sqrt{f_{11} f_{22}}}, \quad \text{sh}\,\frac{c}{r} = \sqrt{\frac{-F_{33}}{f_{11} f_{22}}}, \quad \cos\gamma = \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{\varphi_{11} \varphi_{22}}}, \quad \sin\gamma = \sqrt{\frac{\Phi_{33}}{\varphi_{11} \varphi_{22}}}. \tag{12}$$

[1]) Vgl. z. B. Salmon-Fiedler-Kommerell, „Analytische Geometrie des Raumes", 5. Aufl., 1922, § 172, (11b) und (14).

Dabei sind die Vorzeichen so zu bestimmen, daß die Hyperbelfunktionen und $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ positive Werte annehmen; die Vorzeichen in den Formeln für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bleiben noch unbestimmt, da die Maßbestimmung für den Winkel zweier Geraden es noch offen läßt, ob man den spitzen oder den stumpfen Winkel wählt; r ist die spezifische Konstante für die Maßbestimmung der Strecken.

Zwischen den Unterdeterminanten der Determinanten f und φ in (9) bestehen die wichtigen Beziehungen

$$F_{kl} = -s_k s_l \cdot \varphi_{kl}, \quad \Phi_{kl} = -\sigma_k \sigma_l \cdot f_{kl}, \qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{13}$$

die wir jetzt beweisen wollen. Nach einem bekannten Determinantensatz hat man nämlich z. B.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & it_1 \\ x_3 & y_3 & it_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & it_2 \\ x_3 & y_3 & it_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = -F_{21} = -F_{12}$$

$$= (x_1 y_3 - x_3 y_1)(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 t_3 - x_3 t_1)(x_2 t_3 - x_3 t_2) - (y_1 t_3 - y_3 t_1)(y_2 t_3 - y_3 t_2)$$

$$= -s_2 w_2 \cdot s_1 w_1 - s_2 v_2 \cdot (-s_1 v_1) - (-s_2 u_2) \cdot s_1 u_1 = s_1 s_2 \varphi_{12},$$

also

$$F_{12} = -s_1 s_2 \cdot \varphi_{12}.$$

Ganz entsprechend beweist man die anderen in (13) enthaltenen Beziehungen. Die Gleichungen (13), die den Übergang von den Punktkoordinaten zu den Linienkoordinaten und umgekehrt vermitteln, enthalten den Schlüssel zur Lösung des Problems: es ist nämlich jetzt ein leichtes, die trigonometrischen Formeln abzuleiten.

Der Cosinussatz.

Aus den Gleichungen (13) erhält man

$$F_{12} = -s_1 s_2 \cdot \varphi_{12}, \quad F_{11} = -s_1^2 \cdot \varphi_{11}, \quad F_{22} = -s_2^2 \cdot \varphi_{22}$$

und nun durch Eliminieren der Größen s_1 und s_2

$$\frac{F_{12}^2}{F_{11} F_{22}} = \frac{\varphi_{12}^2}{\varphi_{11} \varphi_{22}}, \quad \text{oder} \quad F_{12} = \pm \sqrt{-F_{11}} \sqrt{-F_{22}} \cdot \cos\gamma,$$

wobei noch (12) benutzt wurde. Man hat also

$$f_{31} f_{23} - f_{21} f_{33} = \pm \sqrt{-F_{11}} \sqrt{-F_{22}} \cdot \cos\gamma$$

und nun nach den Gleichungen (10) bis (12)

$$\operatorname{ch}\frac{b}{r} \cdot \sqrt{f_{33} f_{11}} \cdot \operatorname{ch}\frac{a}{r} \cdot \sqrt{f_{22} f_{33}} - \operatorname{ch}\frac{c}{r} \cdot \sqrt{f_{11} f_{22}} \cdot f_{33} = \operatorname{sh}\frac{a}{r} \cdot \sqrt{f_{22} f_{33}} \cdot \operatorname{sh}\frac{b}{r} \cdot \sqrt{f_{33} f_{11}} \cdot \cos\gamma.$$

Hier sind die Vorzeichen vor den Wurzeln noch unbestimmt: fordert man, daß für $\gamma = \pi$ man $c = a + b$ erhält, so fließt aus der vorhergehenden Gleichung der *Cosinussatz*

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{ch}\frac{c}{r} = \operatorname{ch}\frac{a}{r}\operatorname{ch}\frac{b}{r} - \operatorname{sh}\frac{a}{r}\operatorname{sh}\frac{b}{r}\cos\gamma,$$

sowie die durch zyklische Vertauschung hieraus hervorgehenden Gleichungen. In der Tat ergibt sich nach dem Additionstheorem für die Hyperbelfunktionen aus (14) mit $\gamma = \pi$ die Beziehung $c = a + b$. Durch die soeben getroffene Wahl der Vorzeichen bei den Wurzeln sind nun die Dreieckswinkel *eindeutig* definiert. Da bekanntlich aus dem Cosinussatz alle Formeln der Trigonometrie rein algebraisch abgeleitet werden können, so kann nun das Problem als erledigt gelten. Der Vollständigkeit wegen wollen wir aber doch die beiden anderen Sätze herleiten, zumal als dies nicht viel Raum erfordert. Wir bemerken aber zuvor, daß man algebraisch oder auf dualistischem Wege die der Formel (14) entsprechende Formel

$$\text{(15)} \qquad \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch}\frac{c}{r}$$

erhält. Aus ihr folgt

$$\text{(16)} \qquad \cos(\pi - \gamma) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch}\frac{c}{r}.$$

Da nun für ein eigentliches Dreieck, in dem also die drei Ecken nicht auf einer Geraden liegen, die Winkel α, β, γ weder den Wert Null noch den Wert π besitzen. und, weil dann $\operatorname{ch}(c : r) > 1$ ist, so ergibt sich aus (16)

$$\pi - \gamma > \alpha + \beta \quad \text{oder} \quad \alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Entsprechend schließt man im elliptischen oder Euklidischen Falle ($r \to \infty$).

Der Sinussatz.

Aus den Gleichungen (11) erhält man unter Benutzung von (13)

$$\operatorname{sh}\frac{b}{r} : \sin\beta = \sqrt{\frac{-F_{22}}{f_{33}f_{11}}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi_{33}\varphi_{11}}{\Phi_{2,}}} = \frac{\pm\varepsilon_2\sqrt{\varphi_{22}}}{\sqrt{f_{11}f_{33}}} \cdot \frac{\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{33}}}{\sigma_2\sqrt{-f_{22}}}$$

oder

$$\operatorname{sh}\frac{b}{r} : \sin\beta = \left|\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}}}{\sigma_2\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{33}}}\right|,$$

wo rechts das positive Zeichen zu wählen war, weil links lauter positive Größen stehen. Da nun wegen (6) der Wert der auf der rechten Seite stehenden Funktion bei zyklischer Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3 sich nicht ändert, so hat man

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{sh}\frac{a}{r} : \operatorname{sh}\frac{b}{r} : \operatorname{sh}\frac{c}{r} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

also den *Sinussatz*.

Der Sinus-Cosinussatz.

Wir gehen aus von der Identität

$$f_{31} F_{11} + f_{32} F_{12} + f_{33} F_{13} = 0$$

und benutzen die Gleichungen (13), worauf sich ergibt:

$$f_{31} s_1^2 \varphi_{11} + f_{32} s_1 s_2 \varphi_{12} + f_{33} s_1 s_3 \varphi_{13} = 0$$

oder nach den Gleichungen (11) und (12)

$$f_{31} s_1 \varphi_{11} \pm f_{32} s_2 \sqrt{\varphi_{11} \varphi_{22}} \cdot \cos\gamma \pm f_{33} s_3 \sqrt{\varphi_{11} \varphi_{33}} \cdot \cos\beta = 0$$

oder

$$f_{31} s_1 \sqrt{\varphi_{11}} \pm f_{32} s_2 \sqrt{\varphi_{22}} \cdot \cos\gamma \pm f_{33} s_3 \sqrt{\varphi_{33}} \cdot \cos\beta = 0.$$

Ersetzt man nach (13) die φ_{kk} durch die F_{kk}, so erhält man

$$f_{31} \sqrt{-F_{11}} \pm f_{32} \sqrt{-F_{22}} \cdot \cos\gamma \pm f_{33} \sqrt{-F_{33}} \cos\beta = 0$$

und nun nach den Gleichungen (10) bis (12)

$$\operatorname{ch}\frac{b}{r} \sqrt{f_{11} f_{33}} \cdot \operatorname{sh}\frac{a}{r} \sqrt{f_{22} f_{33}} \pm \operatorname{ch}\frac{a}{r} \sqrt{f_{22} f_{33}} \cdot \operatorname{sh}\frac{b}{r} \sqrt{f_{11} f_{33}} \cdot \cos\gamma$$
$$\pm f_{33} \operatorname{sh}\frac{c}{r} \sqrt{f_{11} f_{22}} \cdot \cos\beta = 0.$$

Hieraus folgt endlich

$$\operatorname{sh}\frac{c}{r} \cos\beta = \operatorname{ch}\frac{b}{r} \operatorname{sh}\frac{a}{r} - \operatorname{sh}\frac{b}{r} \operatorname{ch}\frac{a}{r} \cos\gamma, \tag{18}$$

also der *Sinus-Cosinussatz*. Die Zeichen wurden richtig gewählt, weil mit $\beta = 0$ und $\gamma = \pi$ nach dem Additionstheorem der Hyperbelfunktionen sich $c = a + b$ ergibt, wie es sein muß.

Nach der Definition des Strecken- und Winkelmaßes mit Hilfe der Cayleyschen Maßbestimmung steht man nun nach der Ableitung der trigonometrischen Formeln mitten im Gebäude der Nichteuklidischen Geometrie.

(Eingegangen am 14. Oktober 1941.)

Differentialgeometrie des isotropen Raumes. II.

Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$.

Von

Karl Strubecker in Wien.

Einleitung.

Die Integralflächen der Differentialgleichung

$$(*) \qquad rt - s^2 = K \neq 0$$

sind, entsprechend ihrer Bedeutung in vielen Zweigen der Geometrie, schon oft studiert worden. G. Darboux hat für sie eine elegante integralfreie Darstellung angegeben. Erst die von mir entwickelte Differentialgeometrie des isotropen Raumes aber gestattet, für diese Flächen eine einfache und durchsichtige geometrische Erzeugungsweise anzugeben und damit den eigentlichen geometrischen Sinn ihrer Darbouxschen Darstellung aufzudecken. *Im isotropen Raume nämlich fallen diese Flächen mit jenen der festen Relativkrümmung*

$$(**) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = K \neq 0$$

zusammen, und lassen sich (ähnlich wie L. Bianchi für die entsprechenden Flächen des elliptischen Raumes fand) in einfacher kinematischer Weise durch Cliffordsche Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander erzeugen. Diese Asymptotenlinien sind dabei im isotropen Raume von konstanter Torsion

$$(***) \qquad \tau = \pm\sqrt{-K}$$

und darum in gewissen involutorischen Gewinden enthalten.

Eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften der Flächen (*) ist von verschiedenen Autoren entdeckt worden. Auch sie finden in unserer Auffassung der Flächen als Angehörige eines isotropen Raumes ihren organischen Platz. Z. B. ist der Satz von G. Scheffers, daß die Flächen (*), und nur sie, als Grundrisse ihrer Asymptotenlinien ein Schiebnetz (= ebenes Tschebyscheff-Netz) haben, das genaue Analogon des bekannten Theorems von J. N. Hazzidakis bzw. L. Bianchi, daß im euklidischen bzw. elliptischen Raume die Flächen konstanter Krümmung K, und nur sie, ein Tschebyscheffnetz aus Asymptotenlinien tragen. Ähnlich folgt der Satz von W. Blaschke, daß die Flächen (*), und (bis auf Affinitäten) nur sie, sogenannte uneigentliche Affinsphären sind, d. h. parallele Affinnormalen haben, sofort

daraus, daß ihre Lieschen Oskulationsflächen zweiter Ordnung Cliffordsche Flächen des isotropen Raumes sind, nämlich durch Cliffordsche Schiebungen der Schmiegtangenten aneinander erzeugbar sind.

Als interessante Beispiele werden neben den windschiefen vor allem die Dreh- und Schraubflächen mit fester Relativkrümmung behandelt. Diese ergeben sich, wie man überaus einfach zeigen kann, durch Cliffordsche Schiebung von allgemeinen bzw. symmetrischen Schraublinien des isotropen Raumes von entgegengesetzt gleichen Torsionen aneinander.

Um die in einer größeren Reihe erscheinende Arbeit für sich lesbar zu gestalten, sind zu Anfang in Kürze einige Hauptpunkte der Metrik und Kinematik sowie der Kurventheorie des isotropen Raumes zusammengestellt worden. Die benötigten Resultate der Flächentheorie, über die ich noch nichts veröffentlicht habe, werden in der Arbeit selbst entwickelt.

I. Metrik und Kinematik des isotropen Raumes[1].

1. Als isotrop wird ein Raum (x, y, z) bezeichnet, dessen Bogenelementquadrat durch die singuläre quadratische Form

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

definiert ist. In ihm können die Längenverhältnisse an Kurven und Flächen direkt aus dem „Grundrisse" auf die (x, y)-Ebene entnommen werden. Ein Gleiches gilt für die Winkelmetrik. Danach ist auch die Krümmung einer Kurve als Quotient von Kontingenzwinkel der Tangente und Bogenelement gleich der gewöhnlichen Krümmung ihres Grundrisses.

Die zur z-Achse parallelen Geraden haben identisch verschwindende Längen und sollen vollisotrop heißen. Sie sind zu allen anderen Geraden und darum auch zu allen Ebenen in trivialer Weise normal. Denn ihr Grundriß ist der Nullvektor, der zu allen Grundrißvektoren normal ist.

2. Man kann die Geometrie des isotropen Raumes im Sinne Felix Kleins auf die folgende sechsgliedrige Gruppe G_6 stützen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z \end{aligned}\right\} G_6. \tag{2}$$

Ihre Transformationen lassen das Bogenelement (1) invariant und sollen als Bewegungen des isotropen Raumes, kürzer gerne als „isotrope Bewegungen" bezeichnet werden. Sie wirken sich im Grundrisse als gewöhnliche ebene Bewegungen aus.

---

[1] K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I. Theorie der Raumkurven. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, **150** (1941), S. 1–53.

3. Die drehungsfreien ($\varphi = 0$) unter den isotropen Bewegungen (2) bilden in G_6 eine fünfgliedrige invariante Untergruppe G_5

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad + y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z \end{aligned}\right\} G_5, \tag{3}$$

die wir als die Gruppe der Grenzbewegungen des isotropen Raumes bezeichnen. Ihr Grundrißbild besteht aus den Translationen der (x, y)-Ebene.

4. Wie ich schon bei früheren Gelegenheiten[2]) zeigen konnte, ist es diese wichtige Grenzgruppe G_5, welche den isotropen Raum als einen letzten Grenzfall des elliptischen Raumes erkennen läßt, wobei der quasielliptische Raum von W. Blaschke[3]) ein Übergangsglied bildet.

Ähnlich wie deren sechsgliedrige Bewegungsgruppen kann nämlich auch die Grenzbewegungsgruppe G_5 des isotropen Raumes dargestellt werden als kommutatives Produkt zweier dreigliedriger einfach-transitiver Untergruppen S_3^r und S_3^l:

$$G_5 = S_3^r \cdot S_3^l = S_3^l \cdot S_3^r, \tag{4}$$

die wir wegen der Geradlinigkeit der Bahnen ihrer eingliedrigen Untergruppen als Cliffordsche Schiebungen des isotropen Raumes bezeichnen. Ausführlicher sind es die *Rechtsschiebungen* S_3^r:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad + y \\ z' &= c + bx - ay + z \end{aligned}\right\} S_3^r \tag{5}$$

und die *Linksschiebungen* S_3^l:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha + x \\ y' &= \beta \quad + y \\ z' &= \gamma - \beta x + \alpha y + z \end{aligned}\right\} S_3^l. \tag{6}$$

Diese beiden Gruppen durchdringen sich für $a = b = 0$ bzw. $\alpha = \beta = 0$ in der eingliedrigen Gruppe der (gewöhnlichen) Schiebungen in vollisotroper Richtung.

5. Diese Zerlegung (4) der Grenzbewegungen in Schiebungen ist aber nur eine von unendlich vielen möglichen. In der Tat, auch die dreigliedrigen Gruppen

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad + y \\ z' &= \mathfrak{c} + Cbx - Cay + z \end{aligned}\right\} C_3^r \tag{7}$$

---

[2]) K. Strubecker, Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. Journ. f. reine u. angew. Math. 178 (1938), S. 135—173; insbes. Kap. III.

[3]) W. Blaschke, Ebene Kinematik. § 5. Leipzig-Berlin 1938.

und

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} x' &= \alpha + x \\ y' &= \beta \qquad\quad + y \\ z' &= \gamma - C\beta x + C\alpha y + z \end{aligned}\right\} C_3^l$$

liefern für jeden von Null verschiedenen Wert des Parameters C, den wir uns im reellen Falle positiv denken wollen, unsere Grenzgruppe G_5 als ihr kommutatives Produkt. Auch ihre Bahnen eingliedriger Untergruppen sind geradlinig, weshalb wir die Gruppen C_3^r und C_3^l als *rechts-* und *linksseitige C-Schiebungen* bezeichnen wollen. Für $C = 1$ erhält man die (nur terminologisch ausgezeichneten) gewöhnlichen Rechtsschiebungen S_3^r und Linksschiebungen S_3^l.

6. Man kann die Geometrie, insonderheit die Differentialgeometrie des isotropen Raumes als die Invariantentheorie der Bewegungsgruppe G_6 (2) aufbauen, wie ich es etwa für die Metrik und die Kurventheorie in Veröffentlichungen[1]), für die Flächentheorie in einer Reihe von Vorträgen in Hamburg, Wien und Jena ausgeführt habe. Es ist nötig, über einiges davon in Kürze zu berichten.

Ich beginne mit einem Bericht über die eigenartigen metrischen Verhältnisse des isotropen Raumes.

Diese Metrik ist zunächst in sich dual, d. h. es steht der *Entfernung d zweier Punkte* $P_a(x_a, y_a, z_a)$, definiert durch

$$(9)\qquad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

eine duale Formel für den *Winkel* δ *zweier Ebenen* gegenüber, nämlich, wenn die Gleichungen der Ebenen π_a lauten

$$(10)\qquad z = u_a x + v_a y + w_a,$$

der *Winkel*

$$(11)\qquad \delta^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2.$$

So wie die Punkte dabei als eigentlich vorausgesetzt waren, dürfen (*dual*) die Ebenen (10) natürlich nicht *isotrop*, d. h. z-parallel sein.

7. Diese Invarianten können verschwinden, ohne daß die Punkte oder Ebenen identisch wären, nämlich dann, wenn die Punkte und Ebenen *parallel* sind, d. h. wenn für die Koordinaten

$$(12)\qquad x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

bzw. dual

$$(13)\qquad u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad v_1 = v_2$$

gilt. Die Grundrisse der Punkte decken sich dann und die Ebenen sind im üblichen Sinne parallel.

Als *Ersatz* existieren dann andere (rationale) Invarianten, nämlich für die parallelen Punkte ihre *Spanne*

$$l = z_2 - z_1 \tag{14}$$

und für die parallelen Ebenen ihre *Distanz*

$$\lambda = w_2 - w_1. \tag{15}$$

8. Wie der Abstand zweier Punkte, so kann auch der *Winkel φ zweier Vektoren*

$$\mathfrak{x}_a = (x_a, y_a, z_a) \tag{16}$$

aus ihren Grundrissen

$$\bar{\mathfrak{x}}_a = (x_a, y_a) \tag{17}$$

direkt abgelesen werden. Falls die Vektoren bereits im Sinne von (9) Einheitsvektoren sind, gilt nämlich

$$\begin{cases} \cos\varphi = (\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ \sin\varphi = [\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{cases} \tag{18}$$

9. Auch diese Invariante φ kann verschwinden, ohne daß die beiden Vektoren identisch wären, nämlich dann, wenn

$$[\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = 0 \tag{19}$$

ist, d. h. wenn die Vektoren eine *isotrope*, d. i. z-parallele *Ebene* aufspannen. Auch dann gibt es wieder eine *Ersatzinvariante*, nämlich die *Neigung* oder *Sperrung* der beiden Vektoren. Sie ist definiert durch

$$\nu = z_2 - z_1, \tag{20}$$

wenn wir annehmen, daß die parallelen Einheitsvektoren des Grundrisses (17) auch gleichorientiert sind.

10. Bemerken wir noch, daß nach (18) die *vollisotropen Vektoren*

$$\mathfrak{l} = (0, 0, l) \tag{21}$$

zu allen anderen Vektoren und damit auch zu allen Ebenen *normal* sind. Es werden also im isotropen Raume alle zu den Schmiegebenen einer Kurve normalen Binormalen und ebenso alle Normalen einer Fläche zueinander parallel, nämlich vollisotrop sein.

II. Elemente der Kurventheorie des isotropen Raumes[1]).

11. Es sei

$$\mathfrak{x}(s) = \{x(s),\ y(s),\ z(s)\} \tag{22}$$

eine bereits laut (1) auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve und

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \{x(s),\ y(s)\} \tag{23}$$

ihr „Grundrißvektor".

Die Raumkurve hat dann hinsichtlich der Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes zwei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, nämlich ihre Krümmung $\varkappa$, die nach einer bekannten Verabredung sogar rational ausgedrückt werden kann

$$\varkappa = [\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{24}$$

und, wie schon in Ziffer 1 erwähnt, mit der euklidischen Krümmung ihres Grundrisses übereinstimmt, sowie ihre Windung oder Torsion τ

$$\tau = \frac{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}''']}{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}. \tag{25}$$

12. Man kann mit jeder Raumkurve (22) invariant gegen Bewegungen des isotropen Raumes ein begleitendes Dreibein verbinden, bestehend aus

1) dem *Tangentenvektor* $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{26}$$

der — im Sinne von (9) — ein Einheitsvektor ist,

2) dem dazu normalen und in der Schmiegebene enthaltenen *Hauptnormalenvektor* $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}''(s), \tag{27}$$

der gleichfalls ein Einheitsvektor ist, und

3) dem zu diesen beiden Vektoren normalen *Binormalenvektor* $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1), \tag{28}$$

der vollisotrop und von der Spanne eins ist.

Für sie gilt, als Analogon der Frenetschen Formeln, das folgende System von *Ableitungsgleichungen*:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \quad . \quad + \varkappa\mathfrak{h} \quad . \\ \mathfrak{h}' &= -\varkappa\mathfrak{t} \quad . \quad + \tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \quad . \quad 0 \quad . \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

13. Das begleitende Dreibein fehlt an solchen Kurvenstellen, wo $\varkappa = 0$ ist. Wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ist dies reell nur dadurch möglich, daß der Vektor $\mathfrak{x}''$, der Hauptnormalenrichtung hat, vollisotrop ist, also

$$\mathfrak{x}'' = z''\mathfrak{b} \tag{30}$$

ist. Liegt dann kein Wendepunkt vor, d. h. ist $z'' \neq 0$, so ist die Schmiegebene an dieser Stelle isotrop. Die Gleichung

$$\varkappa(s) \equiv 0 \tag{31}$$

kennzeichnet danach die *Kurven in isotropen Ebenen*. Bei ihnen tritt dann wieder an die Stelle der versagenden Krümmung $\varkappa$ eine *Ersatzinvariante*, nämlich die Größe

$$\varkappa^*(s) = z''(s), \tag{32}$$

die sich als Quotient der Neigung dv (20) zweier Nachbartangenten und des Bogenelementes ds erklären läßt und hier im Anschluß an H. Beck[4]) als Abweichung der Kurve unserer isotropen Ebene (von der geraden Richtung) bezeichnet wird. Ihren Reziprokwert

$$R = \frac{1}{\varkappa^*(s)} \tag{33}$$

wollen wir als den *Normalkrümmungsradius* der Kurve bezeichnen. Er wird nämlich in der Flächentheorie des isotropen Raumes an die Stelle der üblichen Normalschnittkrümmungsradien R der euklidischen Flächentheorie treten.

Kurvenstellen mit vollisotroper Tangentenrichtung sind auszuschließen.

14. Die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{34}$$

legen [falls $\varkappa(s)$ nicht identisch verschwindet] eine Raumkurve ihrer Gestalt nach, d. h. bis auf Bewegungen des isotropen Raumes fest. Dabei kennzeichnet

$$\tau(s) \equiv 0 \tag{35}$$

die in nichtisotropen Ebenen enthaltenen *ebenen Kurven*. Ist aber

$$\varkappa(s) \equiv 0, \tag{36}$$

so liegt die *Kurve* nach (31) *in einer isotropen Ebene*, und man benötigt zur Festlegung der Kurve (bis auf Bewegungen des isotropen Raumes) noch die *dritte natürliche Gleichung*

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s). \tag{37}$$

15. Als wichtige Anwendungen interessieren uns vor allem die verschiedenen Bahnkurven eingliedriger Bewegungsgruppen des isotropen Raumes. Sie haben *konstante Invarianten*. Das gibt vier Möglichkeiten:

1) Die *Schraublinien* des isotropen Raumes mit

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0. \tag{38}$$

Sie entstehen aus dem Musterfalle der euklidischen Schraublinien mit z-paralleler Achse durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes und sind *Bahnkurven* seiner *Schraubungen*. Ihre Grundrisse sind Kreise.

---

[4]) H. Beck, Zur Geometrie in der Minimalebene. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **12** (1912), S. 14–30.

2) Die *Kreise* des isotropen Raumes mit

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = 0. \tag{39}$$

Sie entstehen aus dem Musterfalle der euklidischen Kreise mit z-paralleler Achse durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes und sind *Bahnkurven* seiner *Drehungen um vollisotrope Achsen*. Sie sind Ellipsen mit kreisförmigem Grundriß.

3) Die *parabolischen Kreise* des isotropen Raumes mit

$$\varkappa = 0, \qquad \varkappa^* = \varkappa_0^* \neq 0. \tag{40}$$

Sie sind *Parabeln in isotropen Ebenen mit vollisotroper Durchmesserrichtung*. Als Musterfall diene die Parabel

$$\left| \begin{array}{l} z = \dfrac{\varkappa_0^*}{2} x^2 \\ y = 0, \end{array} \right. \tag{41}$$

aus der alle anderen durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes hervorgehen. Sie treten als *Bahnen von parabolischen Drehungen* (mit Ferngeraden als Achsen) auf.

4) Die (nicht vollisotropen) *geraden Linien*

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa^* = 0. \tag{42}$$

Sie treten als Bahnkurven von Cliffordschen Schiebungen des isotropen Raumes (vgl. Ziffer **4** und **5**) oder von gewöhnlichen Translationen auf.

16. Eine für uns besonders wichtige Gattung sind die Kurven konstanter Torsion

$$\tau = \tau_0 \neq 0. \tag{43}$$

Es gilt der für uns grundlegende *Satz*:

Alle Gewindekurven der Gewinde $\mathfrak{G}_{\tau_0}$ *des Bündels*

$$dz = A\,dx + B\,dy + \tau_0(x\,dy - y\,dx), \tag{44}$$

und nur sie, haben die konstante Torsion $\tau = \tau_0$.

Es ist im reellen Falle günstig, diese Gewinde je nach dem Vorzeichen der Torsion τ_0 ihrer Kurven zu unterscheiden. Darum sollen, unter C *eine (im reellen Falle) stets positive Konstante* verstanden, die Gewinde

$$\mathfrak{G}_C^r \ldots \quad dz = A\,dx + B\,dy + C(x\,dy - y\,dx), \tag{45}$$

deren Kurven die positiv-konstante Torsion C haben, als *rechtsgewundene C-Gewinde* $\mathfrak{G}_C^r$ bezeichnet werden und ähnlich die Gewinde

$$\mathfrak{G}_C^l \ldots \quad dz = A\,dx + B\,dy - C(x\,dy - y\,dx), \tag{46}$$

deren Kurven die negativ-konstante Torsion $-C$ besitzen, als *linksgewundene C-Gewinde* $\mathfrak{G}_C^l$. Gewinde (45) und (46), welche zu gleichen Werten des (reellen oder komplexen!) Parameters C gehören, liegen daher stets *involutorisch*.

17. Die Gewinde (44) gestatten nun im isotropen Raume sämtlich eine sogar *vier*gliedrige Gruppe von Bewegungen in sich, in der eine dreigliedrige Untergruppe von Grenzbewegungen enthalten ist. Es gilt nämlich, wenn wir die in Ziffer 5 geprägten Bezeichnungen auch für den komplexen Fall heranziehen, der für uns später grundlegende Satz:

Die rechtsgewundenen C-Gewinde $\mathfrak{G}_C^r$ (45) *gestatten an Grenzbewegungen alle linksseitigen C-Schiebungen* (8), *und nur sie. Ebenso gestatten die linksgewundenen C-Gewinde* $\mathfrak{G}_C^l$ (46) *an Grenzbewegungen alle rechtsseitigen C-Schiebungen* (7), *und nur sie.*

18. Seiner besonderen Einfachheit wegen heben wir noch den Fall der Kurven mit der festen Torsion $\tau = \pm 1$ und die zugehörigen Gewinde hervor, wobei wir auch die Terminologie ein wenig vereinfachen. Unsere späteren Überlegungen über Flächen fester Relativkrümmung werden sich nämlich hauptsächlich gerade auf diesen bequemsten Fall zu stützen haben. Wir fassen die Ergebnisse gleich in einem Satze zusammen:

Alle Gewindekurven der Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$,

$$\mathfrak{G}_r \ldots dz = A\,dx + B\,dy + (x\,dy - y\,dx), \tag{47}$$

und nur sie, haben die feste Torsion $\tau = +1$. *Ebenso haben alle Gewindekurven der Linksgewinde* $\mathfrak{G}_l$

$$\mathfrak{G}_l \ldots dz = A\,dx + B\,dy - (x\,dy - y\,dx), \tag{48}$$

und nur sie, die feste Torsion $\tau = -1$.

Die Rechts- und Linksgewinde liegen dabei involutorisch.

Die Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ (47) *gestatten an Grenzbewegungen alle Linksschiebungen* (6) *des isotropen Raumes und nur sie. Ebenso gestatten die Linksgewinde* $\mathfrak{G}_l$ (48) *an Grenzbewegungen alle Rechtsschiebungen* (5) *und nur sie. Ihre Flächenelemente werden dabei einfach transitiv vertauscht.*

III. Einige Elemente der Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes.

19. Die Differentialgeometrie des isotropen Raumes, von der wir nun einige Punkte der Flächentheorie *herleiten* müssen, betrachtet als *regulär* nur Flächen, die sich in der Form

$$z = z(x, y) \tag{49}$$

darstellen lassen. Zylinder mit vollisotroper Erzeugendenrichtung sind also ausgeschaltet, ebenso Flächenpunkte mit isotroper Tangentialebene. Von der

Funktion $z(x, y)$ setzen wir außer Eindeutigkeit nur zweimalige stetige Differenzierbarkeit voraus[5]).

Durch das Bogenelement (1) ist die *Längenmessung* jeder Fläche und durch das Flächenelement

$$df = dx \cdot dy \tag{50}$$

ihre *Flächenmessung* invariant gegen Bewegungen des isotropen Raumes festgelegt. Beides kann, ebenso wie die *Winkelmessung* auf der Fläche, direkt aus dem Grundrisse abgenommen werden.

20. Aus der Krümmungstheorie der Flächen (49) des isotropen Raumes genügen uns hier einige einfache Elemente. Studieren wir zunächst die *Normalschnitte* der Fläche in einem ihrer Punkte $(x_0, y_0, z_0 = z(x_0, y_0))$! Sie werden, da alle Flächennormalen nach Ziffer **10** vollisotrop sind, von isotropen, d. i. z-parallelen Ebenen ausgeschnitten. Es sei durch

$$dx : dy \tag{51}$$

eine Flächenrichtung bestimmt, und es sei α ihr Winkel gegen den x-parallelen Normalschnitt, so daß

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \tag{52}$$

ist. Dann läßt sich der *Normalschnitt* $\mathfrak{x}(s)$ der Richtung (51) mit Hilfe seines Bogens s als Parameter so darstellen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + s \cos \alpha \\ y &= y_0 + s \sin \alpha \\ z &= z(x_0 + s \cos \alpha,\ y_0 + s \sin \alpha) \end{aligned}\right\} \mathfrak{x}(s). \tag{53}$$

Die Abweichung $\varkappa^*$ dieses Normalschnittes soll nach Formel (32) berechnet werden, wobei wir aus Gründen der Analogie zur euklidischen Flächentheorie auch den Normalkrümmungsradius R nach (33) heranziehen!

Es ist zunächst

$$\varkappa^* = \frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{ds^2} = z'' \tag{54}$$

und mit Eulerschen Bezeichnungen

$$z' = p(x, y) \cdot \cos \alpha + q(x, y) \cdot \sin \alpha \tag{55}$$

also

$$z'' = \frac{1}{R} = r \cdot \cos^2 \alpha + 2s \cdot \sin \alpha \cos \alpha + t \cdot \sin^2 \alpha \tag{56}$$

---

[5]) Es genügt für den Zweck dieser Note, wenn wir die wenigen nötigen Resultate und Formeln nur für die explizite Darstellung (49) der Fläche herleiten. Die allgemeine isotrope Flächentheorie wird in einem weiteren Teile dieser Reihe begründet werden. Ich habe über sie und die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit am 4. März 1941 in Hamburg, am 16. Mai 1941 in Wien und am 24. Oktober 1941 vor der D. M. V. in Jena berichtet.

und endlich ist wegen (52)

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2}} \tag{57}$$

der gesuchte Wert $z^* = 1 : R$ der *Abweichung des Normalschnittes* bzw. des *Normalkrümmungsradius* R der Richtung $dx : dy$.

21. Die Abweichung verschwindet für die beiden *Asymptotenrichtungen*

$$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{58}$$

Für die beiden *Richtungen extremer Abweichung* bzw. der beiden *Extremwerte R_1 und R_2 des Normalkrümmungsradius* findet man aus (56) durch Differenzieren leicht

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2s}{r - t} \tag{59}$$

oder nach (52)

$$\boxed{s\,dx^2 + (t - r)\,dx\,dy - s\,dy^2 = 0}\,. \tag{60}$$

22. Diese Gleichung versagt in Flächenpunkten, wo

$$r = t \quad \text{und} \quad s = 0 \tag{61}$$

ist. Dort ist die Abweichung der Normalschnitte (57) in allen Richtungen dieselbe. Es sind dies die „*Nabelpunkte*" der Fläche (49) des isotropen Raumes.

Man stellt danach z. B. leicht fest, daß außer den (nichtisotropen) *Ebenen* lediglich die *Drehparaboloide* mit vollisotroper Durchmesserrichtung

$$z = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + c \tag{62}$$

lauter Nabelpunkte tragen. Sinngemäß sind diese Paraboloide als die Kugeln des isotropen Raumes aufzufassen. Der Parameter p ist für sie (ähnlich dem Radius einer gewöhnlichen Kugel) eine kennzeichnende Bewegungsinvariante. Alle ihre Normalschnitte sind kongruente parabolische Kreise und haben daher denselben Normalkrümmungsradius $R = p$. Sie treten an die Stelle der Kugelgroßkreise. Alle nichtisotropen ebenen Schnitte einer Kugel sind Kreise.

Jede Kugel (62) des isotropen Raumes gestattet eine Gruppe von isotropen Bewegungen mit drei Freiheitsgraden, nämlich die Drehungen um die Kugeldurchmesser.

23. Die Differentialgleichung (60) für die Richtungen der Normalschnitte extremer Abweichung kann man symmetrisch auch so schreiben

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ r\,dx + s\,dy & s\,dx + t\,dy \end{vmatrix} = 0. \tag{63}$$

Ihr Bestehen ist also auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden linearen homogenen Gleichungen

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y = 0, \tag{64}$$

$$r\,dx\,\delta x + s(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,dy\,\delta y = 0 \tag{65}$$

eine nichttriviale Lösung $\delta x : \delta y$ besitzen. Aus ihnen und ihrer Symmetrie folgt, daß *die beiden Richtungen extremer Abweichung* $dx : dy$ *untereinander zugleich normal* (64) *wie auch auf der Fläche konjugiert* (65) *sind.*

Wir bezeichnen diese beiden Richtungen aus Analogiegründen als die Hauptrichtungen des Flächenpunktes, ihre Normalschnitte als die Hauptnormalschnitte, deren extreme isotrope Krümmungsradien R_1 und R_2 als die beiden isotropen Hauptkrümmungsradien und die Integralkurven des Feldes der Hauptrichtungen als die Krümmungslinien der Fläche des isotropen Raumes. Dann gilt zusammenfassend der Satz:

Es gibt in jedem regulären Punkte der Fläche (49) *des isotropen Raumes, der kein Nabelpunkt ist, zwei Hauptrichtungen, deren Normalschnitte extreme Abweichungen bzw. Normalkrümmungsradien* R_1, R_2 *besitzen. Diese Hauptrichtungen und ihre Integralkurven, die Krümmungslinien der Fläche, sind durch die Differentialgleichung* (60) *bestimmt und durch die beiden Eigenschaften gekennzeichnet, zugleich normal und auf der Fläche konjugiert zu sein.*

Das Netz der Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes stimmt also mit jenem konjugierten Netze überein, das im Grundriß als Orthogonalnetz erscheint.

24. Zu diesen Linien kam Emil Müller, ohne die Idee des isotropen Raumes und seiner Krümmungstheorie zu fassen, auf einem anderen, von ihm vielfach dargelegten Wege [6]), in seiner — später insbesondere von W. Süss und seinen japanischen Schülern, vor allem J. Hirakawa in systematischer Weise ausgebauten — relativen Differentialgeometrie. E. Müller zeigte nämlich, daß die hier so genannten *Hauptkrümmungsrichtungen jene sind, in denen eine stationäre Berührung der Fläche mit Kugeln des isotropen Raumes* (62) *vorhanden ist.*

25. Um wenigstens ein einfaches Beispiel zu haben, nehmen wir das Plückersche Konoid

$$z = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}. \tag{66}$$

dessen Doppelgerade die vollisotrope z-Achse ist. Seine Krümmungslinien sind ebene Kurven, deren Ebenen sich auf zwei Büschel verteilen, deren Achsen die beiden Torsallinien der Fläche sind. *Die Krümmungslinien sind also Kreise, welche die Torsallinien in den Kuspidalpunkten der Fläche berühren.*

---

[6]) E. Müller, Relative Minimalflächen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921). S. 1–19; insbes. S. 7.

In der Tat wird das PLÜCKERsche Konoid längs jedes solchen Kreises von einer Kugel des isotropen Raumes berührt, ist also Hüllfläche zweier Kugelscharen, und die Berührungskreise sind seine Krümmungslinien.

Auch die Frage nach den Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung läßt sich sofort und vollständig beantworten[7]).

26. Auch die beiden isotropen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 lassen sich leicht ermitteln! Man kann die Gleichung (57) auch so schreiben:

$$(Rr - 1)\,dx^2 + 2\,Rs\,dx\,dy + (Rt - 1)\,dy^2 = 0. \tag{67}$$

Zu vorgegebenem Werte von R gibt es daraus zwei Richtungen, deren Normalschnitte dies R als Normalkrümmungsradius haben. Für die beiden Extremwerte R_1 und R_2 fallen diese beiden Richtungen zusammen, d. h. es verschwindet die Diskriminante von (67):

$$(Rr - 1)(Rt - 1) - R^2 s^2 = 0. \tag{68}$$

Somit sind die beiden isotropen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(rt - s^2)\,R^2 - (r + t)R + 1 = 0. \tag{69}$$

Wir errechnen daraus das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Hauptnormalkrümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$

$$\boxed{K = \frac{1}{R_1 R_2} = rt - s^2}, \tag{70}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}(r + t)}, \tag{71}$$

und bezeichnen im Anschlusse an die Terminologie, welche L. BIANCHI für den elliptischen Raum gebrauchte[8]), K als die relative Krümmung und H als die mittlere Krümmung der Fläche (49) des isotropen Raumes. Beide Größen kommen übrigens schon bei E. MÜLLER[9]) vor, der sie aus der auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ der Drehparaboloide (62) gegründeten Relativgeometrie herleitete und K als die $\mathfrak{P}$-Krümmung, H als die mittlere $\mathfrak{P}$-Krümmung der Fläche bezeichnete. Die Idee des isotropen Raumes ist, wie erwähnt, E. MÜLLER noch fremd, ebenso die hier entwickelte isotrope Krümmungstheorie der Flächen, insbesondere deren Hauptformel (57).

---

[7]) K. STRUBECKER, Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 48 (1938), S. 236–257; insbes. S. 250.

[8]) L. BIANCHI, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. LUKAT, Leipzig 1899, S. 625.

[9]) E. MÜLLER [6]) auf S. 18.

27. Die so definierte Relativkrümmung K einer Fläche des isotropen Raumes ist wohl zu unterscheiden von der Krümmung K_a, die der Fläche im Sinne Gaussens auf Grund ihres Bogenelementes (1) zukommt. In der Tat ist ja diese absolute Krümmung K_a identisch Null.

28. Man kann zu der Relativkrümmung K einer Fläche des isotropen Raumes ähnlich einem bekannten Gaussschen Vorgange auch durch eine geeignete sphärische Abbildung gelangen.

Wir bezeichnen die Kugel des isotropen Raumes

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{72}$$

als Einheitskugel und bilden die Fläche (49) auf sie vermöge paralleler Tangentialebenen ab. Dem Flächenpunkte $P(x, y, z(x, y))$ entspricht so auf (72) der sphärische Bildpunkt (X, Y, Z) mit

$$\begin{cases} X = p \\ Y = q \\ Z = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{cases} \tag{73}$$

und korrespondierende Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ auf der Fläche und der Kugel haben nach (50) die Flächeninhalte

$$F = \iint_{\mathfrak{B}} dx\,dy \tag{74}$$

und

$$F^* = \iint_{\mathfrak{B}^*} dX\,dY = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\,dx\,dy. \tag{75}$$

Als ihr Verhältnis $F^* : F$ ergibt sich beim Zusammenziehen des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf einen Punkt P der Fläche (49) der Wert

$$\lim_{\mathfrak{B} \to P} \frac{F^*}{F} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = K, \tag{76}$$

womit in der Tat eine zweite bewegungsinvariante Definition der Relativkrümmung K einer Fläche gewonnen ist.

29. Wieweit bei solcher Definition der Relativkrümmung K die Analogie zu bekannten Theoremen des euklidischen bzw. elliptischen Raumes reicht, soll uns ferner noch die folgende Übertragung des Satzes von Beltrami und Enneper über die Torsion der Asymptotenlinien einer Fläche zeigen:

Die sich in einem Flächenpunkte der Relativkrümmung K kreuzenden Asymptotenlinien haben die entgegengesetzt gleichen Torsionen

$$\tau_1 = +\sqrt{-K}, \quad \tau_2 = -\sqrt{-K}. \tag{77}$$

In der Tat, ist auf der Fläche $z = z(x, y)$ die Kurve

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(x, y) \end{aligned}\right\} \mathfrak{x}(t) \tag{78}$$

Asymptotenlinie, so erfüllt sie identisch in t die Differentialgleichung

$$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0, \tag{79}$$

oder je nach der Schar, der sie angehört, entweder die beiden [äquivalenten, durch Linearspaltung aus (79) entstehenden] Gleichungen

$$r\,dx + s\,dy = -\sqrt{-K}\,dy, \tag{80}$$

$$s\,dx + t\,dy = +\sqrt{-K}\,dx, \tag{81}$$

oder die daraus durch Vorzeichenänderung der Quadratwurzeln hervorgehenden Gleichungen. Für die Torsion der Asymptotenlinien (78) ergibt sich so nach (25) zunächst

$$\tau = \frac{[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}]}{[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}]^2} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & p\dot{x}+q\dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & p\ddot{x}+q\ddot{y}+(r\dot{x}^2+2s\dot{x}\dot{y}+t\dot{y}^2) \\ \dddot{x} & \dddot{y} & p\dddot{x}+q\dddot{y}+(r\dot{x}+s\dot{y})\ddot{x}+(s\dot{x}+t\dot{y})\ddot{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}, \tag{82}$$

also auf Grund der (für die dritte Zeile der Determinante schon teilweise beachteten) Identitäten in t (79) bis (81) wirklich für die eine (angeschriebene) Schar

$$\tau_1 = +\sqrt{-K} \tag{83}$$

und für die andere (durch Vorzeichenänderung der Wurzel entstehende) Schar

$$\tau_2 = -\sqrt{-K}, \tag{84}$$

womit der Satz von Beltrami und Enneper auf den isotropen Raum übertragen ist.

Der Satz gilt übrigens auch dann noch, wenn geradlinige Asymptotenlinien auftreten. Man hat dann als „Schmiegstreifen" der Geraden den Berührungsstreifen längs der Fläche zu nehmen und kann die Torsion τ der geradlinigen Asymptotenlinie, wie im allgemeinen Falle, als den Quotienten des Kontingenzwinkels der Tangentenebenen und des Bogenelements des Streifens definieren.

30. Wir schließen die Betrachtungen zur Krümmungstheorie der Flächen mit dem wichtigen Beispiele der Drehflächen des isotropen Raumes. Nach Ziffer **15** gehen sie aus dem Musterfalle der gewöhnlichen Dreh-

flächen mit vollisotroper, d. i. z-paralleler Drehachse durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes hervor. Es genügt daher als Normalform der Drehflächen diese Gleichung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) zu nehmen:

$$z = f(r). \tag{85}$$

Ihre Krümmungslinien sind auch im isotropen Raume wieder die Parallelkreise und Meridiane; denn diese bilden ein konjugiertes und im Grundrisse orthogonales Netz. Die Parallelkreis- und Meridiantangente liefern also die Hauptrichtungen der Fläche, und die zugehörigen isotropen Ebenen, deren eine die Meridianebene selbst ist, die beiden Hauptnormalschnitte. Um deren isotrope Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 zu bestimmen, kann man mittels der Formeln (70) und (71) die Relativkrümmung K und mittlere Krümmung H berechnen. Es ergibt sich

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{f' f''}{r}, \tag{86}$$

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{f'}{r} + f'' \tag{87}$$

und daraus

$$R_1 = \frac{1}{f''(r)}, \qquad R_2 = \frac{r}{f'(r)}. \tag{88}$$

R_1 gehört dabei offenbar zum Hauptnormalschnitt des Meridians, denn $f''(r)$ ist nach (32) die Abweichung der Meridiankurve.

IV. Die Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes.

31. Als Flächen der festen Relativkrümmung $K \neq 0$ ergeben sich aus (70) die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung

$$\boxed{rt - s^2 = K}, \tag{89}$$

die schon vielfach das Interesse der Geometer gefunden haben (vgl. Ziffer 44). Daß ihr eigentlicher Platz die Differentialgeometrie des isotropen Raumes ist, wird erstens daraus erhellen, daß es uns möglich ist, ihre Haupteigenschaften mittels der Begriffe des isotropen Raumes leicht formulieren, herleiten und in genaue Analogien setzen zu können, zweitens aber auch daraus, daß wir im isotropen Raume eine überaus einfache geometrische Erzeugungsweise dieser Flächen angeben können.

32. Zunächst gilt für sie, dem Satze von Beltrami-Enneper zufolge, diese erste kennzeichnende Eigenschaft:

Die Asymptotenlinien der Flächen von der konstanten Relativkrümmung K haben je nach der Schar, der sie angehören, die festen Torsionen

$$\tau_1 = +\sqrt{-K}, \quad \tau_2 = -\sqrt{-K}. \tag{90}$$

Daraus folgt nach Ziffer **16** sofort:

Diese Asymptotenlinien sind daher sämtlich Gewindekurven und als solche je nach der Schar in den involutorischen Gewinden

$$(91) \qquad 1)\quad dz = A\,dx + B\,dy + \sqrt{-K}\,(x\,dy - y\,dx)$$

$$(92) \qquad 2)\quad dz = A\,dx + B\,dy - \sqrt{-K}\,(x\,dy - y\,dx)$$

enthalten.

33. Eine andere leicht zu bestätigende kennzeichnende Eigenschaft unserer Flächen (89) hat schon G. SCHEFFERS[10]) angegeben. Sie bezieht sich auf die Grundrisse der Asymptotenlinien:

Auf den Flächen (89), *und nur auf ihnen, bilden die Asymptotenlinien im Grundrisse ein Schiebnetz*[11]).

Bekanntlich sind in der Ebene die Schiebnetze die einzigen sogenannten TSCHEBYSCHEFFschen oder äquidistanten Netze ($E = G = 1$). Da ferner die Metrik der Flächen des isotropen Raumes nach (1) direkt aus dem Grundrisse ablesbar ist, kann man den Satz von SCHEFFERS auch so formulieren:

Im isotropen Raume bilden auf den Flächen konstanter Relativkrümmung (89), *und nur auf ihnen, die Asymptotenlinien ein* TSCHEBYSCHEFF*-Netz.*

Damit ist durch die Idee des isotropen Raumes dieser Satz von SCHEFFERS als das genaue Analogon eines bekannten Theorems von J. N. HAZZIDAKIS[12]) und A. VOSS[13]) bzw. L. BIANCHI[14]) erkannt, wonach im euklidischen bzw. elliptischen Raume die Flächen konstanter GAUSSscher bzw. Relativkrümmung durch ihr TSCHEBYSCHEFFsches Netz der Asymptotenlinien gekennzeichnet sind.

34. Im Gegensatz aber zu diesen beiden Räumen, deren allgemeinste Fläche konstanter Krümmung bisher noch unbekannt ist, gelingt es im iso-

---

[10]) G. SCHEFFERS, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst.}$ Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 112—117; insbes. S. 114.

[11]) Der erste Teil des Satzes findet sich schon bei É. GOURSAT, Sur les lignes asymptotiques. Bull. soc. math. de France **24** (1896), S. 43—51; insbes. S. 47. Die Richtigkeit der hier wesentlichen Umkehrung hat aber erst SCHEFFERS bewiesen. Später hat auch H. LIEBMANN das Theorem im SCHEFFERSschen Umfange wiedergefunden, in der kaum Neues enthaltenden Note: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze (Orthogonalprojektionen von Haupttangentenkurven). Math. Zeitschr. **14** (1922), S. 159—168; insbes. § 3.

[12]) J. N. HAZZIDAKIS, Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Crelles Journ. **88** (1880), S. 68—73.

[13]) A. VOSS, Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Math. Annalen **19** (1881), S. 1—26; insbes. S. 7.

[14]) L. BIANCHI, Lezioni di geometria differenziale II. Bologna-Pisa 1923. S. 591.

tropen Raume wohl, diese Flächen sämtlich anzugeben und geometrisch zu konstruieren.

Es ist dabei keine Einschränkung, wenn wir — lediglich zur Vereinfachung der Ausdrucksweise — unsere dahinzielenden Überlegungen an den Flächen

$$\boxed{r\,t - s^2 = -1} \tag{93}$$

der Relativkrümmung

$$K = -1 \tag{94}$$

durchführen. Das Resultat wird sich (Ziffer **37**) dann auch für den allgemeinen Fall (89) sofort formulieren lassen.

35. In diesem Falle (94) sind die *Asymptotenlinien* stets *reell* und ihre *Torsion* ist je nach der Schar

$$\tau = +1 \quad | \quad \tau = -1. \tag{95}$$

Die *Asymptotenlinien* sind ferner *Gewindekurven* und liegen als solche je nach der Schar, wenn wir die Terminologie der Ziffer **18** aufgreifen, in den

(96)	*Rechtsgewinden* $\mathfrak{G}_r$:	*Linksgewinden* $\mathfrak{G}_l$:
	$dz = A\,dx + B\,dy + (x\,dy - y\,dx)$	$dz = A\,dx + B\,dy - (x\,dy - y\,dx)$.

Da die *Grundrisse* der Asymptotenlinien ein Schiebnetz bilden, sind sie untereinander Schar für Schar *kongruent* und besitzen daher *dieselbe natürliche Gleichung*

$$\varkappa = \varkappa_1(s) \quad | \quad \varkappa = \varkappa_2(s). \tag{97}$$

Damit sind die *natürlichen Gleichungen der Asymptotenlinien selbst*

(98)		
	$\varkappa = \varkappa_1(s)$	$\varkappa = \varkappa_2(s)$
	$\tau = +1$	$\tau = -1$,

Schar für Schar identisch, d. h. es sind nach Ziffer **14** die Asymptotenlinien auf den Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes untereinander Schar für Schar kongruent und können darum durch isotrope Bewegung zur Deckung gebracht werden.

Damit ist es möglich, diese Flächen kinematisch, nämlich durch geeignete Bewegung ihrer Asymptotenlinien zu erzeugen. Diese Bewegungen äußern sich aber im Grundrisse als Translationen irgendeiner Asymptotenlinie der einen Schar längs einer solchen der zweiten Schar, weil dieser Grundriß der Asymptotenlinien nach Scheffers ein Schiebnetz war. Also sind (nach Ziffer **3**) die Bewegungen, welche die Fläche erzeugen, sogar Grenzbewegungen. Und weil die Punkte der Fläche dabei sämtlich Asymptotenlinien beschreiben, also Kurven der Rechts- und Linksgewinde (96) und diese Gewinde $\mathfrak{G}_r$ bzw. $\mathfrak{G}_l$ somit festbleiben, folgt weiter, daß die erzeugenden Grenz-

bewegungen sogar Links- bzw. Rechtsschiebungen (6) bzw. (5) des isotropen Raumes sind. Denn wir wissen aus Ziffer 18, daß ein Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ an Grenzbewegungen nur die Linksschiebungen gestattet, ein Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$ aber nur Rechtsschiebungen.

Zusammenfassend entstehen also die Flächen der konstanten Relativkrümmung $K = -1$, ausgehend von zwei beliebigen ihrer Asymptotenlinien verschiedener Scharen dadurch, daß die eine C_r, die etwa wegen des Wertes $\tau = +1$ ihrer Torsion einem Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ angehöre, rechtsseitig längs der anderen C_l verschoben wird (oder umgekehrt dies C_l, das wegen $\tau = -1$ einem Linksgewinde G_l angehört, linksseitig längs C_r verschoben wird).

36. Waren wir bisher von einer bestimmten vorgegebenen Fläche konstanter Relativkrümmung und ihren Asymptotenlinien ausgegangen, so wollen wir jetzt zeigen, daß man auch umgekehrt, ausgehend von zwei beliebigen schneidenden Kurven C_r, C_l der Torsionen $\tau = +1$ und $\tau = -1$, auf die beschriebene kinematische Art stets zu Flächen der konstanten Relativkrümmung $K = -1$ gelangt, wenn nur diese beiden Kurven C_r und C_l, in ihrem Schnittpunkte P, um Asymptotenlinien sein zu können, auch dieselbe Schmiegebene haben. Wir wollen also zeigen:

Haben die beiden Kurven C_r der Torsion $\tau = +1$ und C_l der Torsion $\tau = -1$ in ihrem Schnittpunkte P dieselbe Schmiegebene π, und verschiebt man

$$C_r \text{ rechtsseitig längs } C_l \text{ oder}$$
$$C_l \text{ linksseitig längs } C_r,$$

so erhält man eine Fläche der konstanten Relativkrümmung $K = -1$, auf der die Lagen der Kurven C_r und C_l Asymptotenlinien sind. Und zwar ist dies die allgemeinste Fläche dieser Art, d. h. die allgemeinste Integralfläche der Gleichung

$$rt - s^2 = -1.$$

In der Tat wird zunächst wegen der Kommutativität der beiden Schiebungsgruppen (5) und (6) auf beide Arten jedenfalls dieselbe Fläche erzeugt, und deren Relativkrümmung K wird nach dem Satze von Beltrami und Enneper auch den konstanten Wert -1 haben, wenn nur einmal nachgewiesen ist, daß die im Laufe der Schiebungen entstandenen Lagen der beiden Kurven C_r, C_l wirklich die Asymptotenlinien der erzeugten Fläche sind.

Dies folgt aber leicht aus der Tatsache, daß die einzelnen Kurven C_r und C_l der Torsionen $+1$ und -1 in allen Lagen den Rechts- und Linksgewinden $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$ (47, 48) angehören. Es ist ja für sie nur zu zeigen, daß die gemeinsame Schmiegebene π der Ausgangskurven C_r und C_l (zugleich Tangentialebene der erzeugten Fläche im Schnittpunkt P) in allen Lagen von C_r und C_l auch gemeinsame Schmiegebene des jeweiligen Schnittpunkts bleibt.

Da sie dann natürlich stets Tangentialebene der Fläche sein wird, werden alle Lagen der Kurven C_r und C_l Asymptotenlinien sein.

Zum Beweise bemerken wir, daß etwa die Ausgangskurve C_r Gewindekurve eines Rechtsgewindes ist, daß also ihre Schmiegebenen mit den Nullebenen ihrer Punkte zusammenfallen. Verschiebt man nun, laut Konstruktion der Fläche das Flächenelement (P, π) linksseitig kontinuierlich längs C_r, so wird das Gewinde $\mathfrak{G}_r$, in dem C_r enthalten war, nach Ziffer **18** festbleiben, also wird aus (P, π) genau der Schmiegstreifen von C_r entstehen. Die bei dieser Linksschiebung mitgenommene Kurve C_l wird aber, wie in der Ausgangslage, in ihren Schnittpunkten mit der festen Kurve C_r die mitgenommene Ebene π immer als starr mit ihr verbundene Schmiegebene besitzen. In allen Punkten der Ausgangskurve C_r fallen also die Schmiegebenen der festen Kurve C_r und der beweglichen Kurven C_l zusammen, und damit ist zunächst die Ausgangskurve C_r als Asymptotenlinie der entstehenden Fläche nachgewiesen. Aus den gleichen Gründen ist natürlich auch die Ausgangskurve C_l Asymptotenlinie. Und da wegen der Kommutativität verschiedenartiger Schiebungen die krummen Linksschiebungen längs der einzelnen Lagen von C_r untereinander ebenso identisch sind, wie die krummen Rechtsschiebungen längs der einzelnen Lagen von C_l, gilt ein Gleiches auch für alle Kurven C_r und C_l: Auch sie sind — wie behauptet — Asymptotenlinien der Fläche.

37. Man kann in völlig analoger Weise nun auch die *Flächen mit beliebiger fester Relativkrümmung* $K \neq 0$, also die Integralflächen von (89) erzeugen. Man muß dann nur von zwei Kurven der festen Torsionen $\tau_1 = +\sqrt{-K}$ und $\tau_2 = -\sqrt{-K}$ ausgehen, die nach Ziffer **16** gleichfalls in bekannten Gewinden liegen und so gewählt sind, daß sie in ihrem Schnittpunkte gemeinsame Schmiegebene besitzen, und hat diese Kurven C_r und C_l sodann ähnlich wie vorhin mittels der *verallgemeinerten Schiebungsgruppen* (7) und (8) aneinander zu verschieben, wobei der in den Formeln (7) und (8) auftretende Parameter $C = +\sqrt{-K}$ zu setzen ist. Die einzelnen Lagen der Schiebungskurven C_r, C_l sind dabei wieder die Asymptotenlinien der erzeugten Fläche fester Relativkrümmung K.

38. Man erkennt in dieser einfachen kinematischen Erzeugungsweise der Flächen des isotropen Raumes mit fester Relativkrümmung $K \neq 0$ die völlige Analogie zu der bekannten Konstruktion, welche L. Bianchi[15])

---

[15]) L. Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica. Ann. di mat. (2) **24** (1896), S. 93—129; insbes. S. 112; oder[14]), § 594. — In einem Raume der festen Krümmung K_0 besteht zwischen der *absoluten* Krümmung K_a einer Fläche (= der Gaußschen Krümmung ihres Bogenelementes) und ihrer *relativen* Krümmung $K_r = \frac{1}{R_1 R_2}$ die Beziehung $K_r = K_a - K_0$.

für die Flächen konstanter Relativkrümmung $K_r = K < 0$ des elliptischen Raumes der Krümmung $K_0 = -K > 0$ angegeben hat. Auf die entsprechenden Flächen des quasielliptischen Raumes und ihre Bedeutung für die ebene Kinematik hat W. BLASCHKE[16]) hingewiesen.

V. Analytische Darstellung der Flächen fester Relativkrümmung $K = rt - s^2$.

39. Man kann aus unserer kinematischen Erzeugung der Flächen fester Relativkrümmung K als Schiebflächen des isotropen Raumes sofort auch eine integrallose Darstellung für sie gewinnen, insbesondere auch jene, welche (von der Charakteristikentheorie her) G. DARBOUX zuerst angegeben hat.

Es ist dabei bequem zu bemerken, daß unsere Fläche, die wir wieder in der einfacheren Gestalt

$$rt - s^2 = -1 \tag{99}$$

annehmen, auch durch folgende, neue, der kinematischen äquivalente Konstruktion gefunden werden kann:

„Es seien (Fig. 1) als Grundkurven gegeben eine Kurve $\mathfrak{U}$ der festen Torsion $\tau = +1$, die also in einem Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ (96) liegt und eine Kurve $\mathfrak{V}$ der Torsion $\tau = -1$ aus einem Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$ (96). Verbinden wir dann den Nullpunkt O (0, 0, 0) mit einem beliebigen Punkte U auf $\mathfrak{U}$ und V auf $\mathfrak{V}$, und ergänzen wir das Streckenpaar OU und OV derart durch einen Punkt X zu einem CLIFFORDschen Parallelogramm, daß

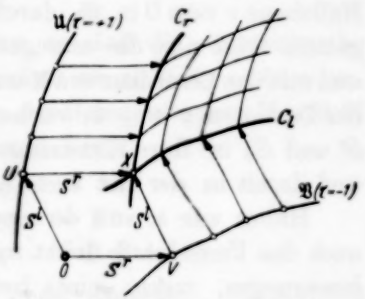

Fig. 1. Die beiden Konstruktionen der Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$.

$$UX \text{ rechtsparallel zu } OV$$

und

$$VX \text{ linksparallel zu } OU$$

ist, d. h. daß X aus U durch jene Rechtsschiebung S^r (5) entsteht, welche O nach V bringt [oder, was dasselbe ist, daß X aus V durch jene Linksschiebung S^l (6) entsteht, welche O nach U bringt], so wird, wenn U auf $\mathfrak{U}$ und V auf $\mathfrak{V}$ läuft, der Punkt X eine Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ beschreiben, deren Asymptotenlinien zu den Kurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ schiebungskongruent sind.

---

[16]) W. BLASCHKE[3]), § 15.

Dabei müssen freilich noch, damit die gemeinsame Schmiegebene der Asymptotenlinien gesichert sei, die beiden Gewinde $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$, welche $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ enthalten, so gewählt werden, daß sie dem Ursprunge O dieselbe Nullebene ν zuordnen. Jede Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ kann so erzeugt werden."

40. Wird nämlich zum Beweise in dieser neuen Konstruktion der Punkt V auf $\mathfrak{V}$ festgehalten, während U auf $\mathfrak{U}$ beweglich ist, so beschreibt X eine aus $\mathfrak{U}$ durch Rechtsschiebung S^r entstehende Kurve C_r der Torsion $\tau = +1$, deren Schmiegebenen aus jener von U gleichfalls durch S^r hervorgeht. Da aber für U die Schmiegebene mit der Nullebene in $\mathfrak{G}_r$ zusammenfällt und dieses Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ alle Linksschiebungen verträgt, wird die Schmiegebene des Punktes X auf C_r aus der Nullebene ν von O bezüglich $\mathfrak{G}_r$ durch die Grenzbewegung $S^l \cdot S^r$ hervorgehen. Analog ergibt sich bei Festhalten von U auf $\mathfrak{U}$ für die Punkte X eine aus $\mathfrak{V}$ durch Linksschiebung S^l entstehende Kurve C_l der Torsion $\tau = -1$, deren Schmiegebene aus der Nullebene ν von O in $\mathfrak{G}_l$ durch die Grenzbewegung $S^r \cdot S^l$ hervorgeht. Insgesamt trägt also die erzeugte Fläche wirklich zwei Scharen untereinander und mit den Grundkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ schiebungskongruenter Kurven C_r und C_l der Torsionen $\tau = \pm 1$, welche (wegen der Vertauschbarkeit der Schiebungen S^r und S^l) in ihren Kreuzungspunkten auch dieselbe Schmiegebene besitzen und damit in der Tat auch Asymptotenlinien der Fläche sind.

Haben wir so aus der neuen Erzeugungsart die alte hergeleitet, so ist auch das Umgekehrte leicht möglich. Dazu müßte man nur eine der Grenzbewegungen, welche einen beliebigen Flächenpunkt X nach O bringen, in irgendeiner Weise in Schiebungen S^r und S^l zerspalten. Insgesamt sind also beide Erzeugungsweisen völlig äquivalent, und es kann jede Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ durch die neue Konstruktion gewonnen werden.

Bemerken wir noch, daß eine kongruente Verlagerung der Grundkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ in ihren Gewinden $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$ durch Links- bzw. Rechtsschiebung für die erzeugte Fläche lediglich eine zusätzlich Links- und Rechtsschiebung, insgesamt also nur eine Verlagerung durch eine Grenzbewegung bedeuten würde. Andere kongruente Veränderungen der Grundkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ führen im allgemeinen auf wesentlich neue (inkongruente) Flächen.

41. Um nun von dieser geometrischen Erzeugungsweise zu analytischen Formeln für die Flächen der Relativkrümmung $K = -1$ zu gelangen, wählen wir am einfachsten die beiden Gewinde

$$\mathfrak{G}_r \ldots dz = x\,dy - y\,dx, \tag{100}$$

$$\mathfrak{G}_l \ldots dz = y\,dx - x\,dy \tag{101}$$

als jene Rechts- und Linksgewinde, welche dem Nullpunkte O (0, 0, 0), wie es die Konstruktion verlangt, dieselbe Nullebene $z = 0$ zuordnen.

Es seien dann

$$(102)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x = x_r(u) \\ y = y_r(u) \\ z = z_r(u) \end{cases} \qquad \mathfrak{B}\begin{cases} x = x_l(v) \\ y = y_l(v) \\ z = z_l(v) \end{cases}$$

zwei beliebige Gewindekurven aus $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$, so geben die Schiebungsformeln (5) und (6) als Parameter (a, b, c) der Rechtsschiebung S^r unserer Konstruktion die Koordinaten (x_l, y_l, z_l) und als Parameter (α, β, γ) der Linksschiebung S^l die Koordinaten (x_r, y_r, z_r). Das Produkt $S^r \cdot S^l = S^l \cdot S^r$ der Schiebungen führt den Nullpunkt O in den allgemeinen Punkt X der erzeugten Fläche über. Man hat so die Formeln

$$(103)\qquad X(u\,v)\ldots \quad \boxed{\begin{aligned} x &= x_r + x_l \\ y &= y_r + y_l \\ z &= z_r + z_l + x_r y_l - y_r x_l \end{aligned}}$$

als Darstellung der allgemeinsten Fläche der konstanten Relativkrümmung $K = -1$ des isotropen Raumes.

42. Um aus diesen allgemeinen Formeln speziell die Darbouxsche Darstellung der Flächen (99) mit der Relativkrümmung $K = -1$ zu gewinnen, benutzen wir die folgende Darstellung der Gewindekurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ (102) mittels willkürlichen Funktionen $U(u)$ und $V(v)$:

$$(104)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = -u \\ y_r = U' \\ z_r = 2U - uU' \end{cases} \qquad \mathfrak{B}\begin{cases} x_l = v \\ y_l = -V' \\ z_l = -2V + vV', \end{cases}$$

der sich lediglich die Gewindestrahlen $x = \text{const}$ entziehen. Nach (103) erhält man

$$(105)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= v - u \\ y &= U' - V' \\ z &= 2(U - V) + (u + v)(V' - U') \end{aligned}}$$

als integrallose Darstellung der Flächen mit $K = -1$, d. i. die Darbouxsche Darstellung[17]) der Integralflächen von $rt - s^2 = -1$ in der (unwesentlich geänderten) Form, die sich bei W. Blaschke[18]) findet. Um wirklich eine Fläche zu erhalten, hat man dabei freilich $U''(u) \neq V''(v)$ vorauszusetzen.

Stets sind dabei die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ die Asymptotenlinien.

---

[17]) G. Darboux, Théorie des surfaces III. Paris 1894, S. 273–274. – Die Darstellung findet sich auch bei E. Goursat[11]) und Cours d'analyse math. III, Paris 1923, S. 70–71. Vgl. auch H. Beck, Kurvenkongruenzen und volumtreue Transformationen, Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 275–290, insbes. § 8.

[18]) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie. Bearb. von K. Reidemeister, Berlin 1923, S. 216.

Der eigentliche geometrische Sinn dieser eleganten Formeln von DARBOUX *liegt also in unserer neuen Erzeugungsweise der Flächen als Schiebflächen des isotropen Raumes.*

43. Nach Ziffer **37** kann man in entsprechender Weise auch zur Darstellung der allgemeinen Flächen

$$rt - s^2 = K \neq 0 \tag{106}$$

gelangen. Sie lautet

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_r + x_l \\ y &= y_r + y_l \\ z &= z_r + z_l + \sqrt{-K}(x_r y_l - y_r x_l) \end{aligned}}, \tag{107}$$

wobei jetzt nur zu fordern ist, daß die Kurven (102) den Gewinden

$$dz = +\sqrt{-K}(x\,dy - y\,dx) \quad | \quad dz = -\sqrt{-K}(x\,dy - y\,dx) \tag{108}$$

entnommen sind.

Am Ende kommt dies darauf hinaus, daß im Vergleich zu vorhin die z-Koordinate der Fläche (103) den Faktor $+\sqrt{-K}$ aufnimmt, was im isotropen Raume übrigens als eine nichtvolumstreue Bewegung gedeutet werden kann.

Auch hier sind die u- und v-Linien wieder Asymptotenlinien.

44. Die Flächen $rt - s^2 = \text{const}\ (\neq 0)$, deren hauptsächliche Eigenschaften wir in dieser Arbeit aus ihrer Bedeutung als Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes übersichtlich entwickeln konnten, haben schon vielfach das Interesse der Geometer gefunden. Neben G. DARBOUX [17] [19]), É. GOURSAT [11]), G. SCHEFFERS [10]), H. LIEBMANN [11]) haben sich auch E. J. WILCZYNSKI [20]) und besonders eingehend W. BLASCHKE [18]) sowie E. SALKOWSKI [21]) mit ihrem Studium befaßt, die letzten im Rahmen der

---

[19]) Vgl. auch G. DARBOUX, Théorie des surfaces I, S. 141. Paris 1887.

[20]) E. J. WILCZYNSKI, Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven. Math. Annalen **76** (1915); insbes. S. 138 und 157–160.

[21]) E. SALKOWSKI, a) Affinminimalflächen und Gewindekurven. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **28** (1929), S. 114–123. b) Zur Theorie der Affinminimalflächen. Commem. Vol. Calcutta Math. Soc. Bull. **20** (1930), S. 295–308. – Daß die Asymptotenlinien der Flächen $rt - s^2 = K$ sämtlich Gewindekurven aus involutorischen Translationsbündeln linearer Komplexe sind, ist vielfach bemerkt worden. Vgl. z. B. A. PETER, Die Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören. Diss. Leipzig 1895, S. 58 und É. KÉRAVAL, Sur les surfaces, dont les lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes a un complexe linéaire. Bull. soc. math. France **39** (1911), S. 134–155. Ferner K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Anzeiger Akad. Wiss. Wien, math. nat. Kl., Sitzung vom 23. Oktober 1941.

affinen Differentialgeometrie, wo diese Flächen als sogenannte *uneigentliche Affinsphären* auftreten, d. h. als *Flächen, deren sämtliche Affinnormalen parallel sind.*

Auch diese letzte Eigenschaft folgt organisch aus unserer Auffassung und Erzeugung der Flächen als Schiebflächen des isotropen Raumes. Betrachtet man nämlich in einem Flächenpunkte die beiden Schmiegtangenten, und verschiebt man sie im Sinne unserer kinematischen Konstruktion der Fläche aneinander, so entsteht (vgl. Ziffer **53**) eine *Cliffordsche Fläche* des isotropen Raumes, nämlich ein *hyperbolisches Paraboloid* mit vollisotroper (z-paralleler) Durchmesserrichtung, welches nach seiner Konstruktion mit der *Lieschen Oskulationsfläche zweiter Ordnung* des Flächenpunktes zusammenfällt. Somit sind in der Tat sämtliche Affinnormalen der Flächen konstanter Relativkrümmung parallel, nämlich vollisotrop, und die Flächen selbst sind uneigentliche Affinsphären.

Daß umgekehrt alle uneigentlichen Affinsphären mit vollisotroper Richtung der Affinnormalen konstante Relativkrümmung K haben, folgt aus dem Satze von Scheffers (Ziffer **33**): Die Richtebenen der Lieschen Schmiegparaboloide in den Punkten einer Asymptotenlinie sind dann nämlich *parallel*, also sind es auch die Grundrisse der zugehörigen Schmiegtangenten. D. h. die Asymptotenlinien bilden im Grundriß ein Schiebnetz und die Fläche hat wirklich konstante Relativkrümmung.

VI. Die Drehflächen und Schraubflächen konstanter Relativkrümmung.

45. Wir wollen uns nun einigen bemerkenswerten Klassen von Flächen konstanter Relativkrümmung K zuwenden, nämlich (ausführlicher) den Drehflächen und (beispielsweise) den Schraubflächen. Von ihnen läßt sich leicht der folgende bemerkenswerte Satz nachweisen:

Abgesehen vom Falle der Kugeln haben alle Dreh- und Schraubflächen konstanter Relativkrümmung $K \neq 0$ im isotropen Raume Schraublinien als Asymptotenlinien.

In der Tat müssen die Grundrisse der Asymptotenlinien wegen der Entstehung der Flächen durch Drehung bzw. Schraubung ein Drehnetz bilden; ebenso sollen sie, da die Relativkrümmung der Flächen konstant ist, nach Scheffers, ein Schiebnetz bilden. Die einzigen Netze dieser Eigenschaften entstehen aber durch Schiebung zweier Kreise aneinander.

Wenn aber die Asymptotenlinien unserer Flächen kreisförmige Grundrisse haben, so ist ihre Krümmung Schar für Schar konstant. Nach dem Satz von Beltrami und Enneper ist aber auch ihre Torsion konstant, also sind sie nach Ziffer **15** wirklich Schraublinien.

Auch die Umkehrung ist richtig, wie man leicht geometrisch, einfacher aber wohl aus der analytischen Darstellung der Fläche [Ziffer 51 (136)] erkennt.

Der triviale Sonderfall, wo die Grundrisse der Asymptotenlinien Nullkreise (Minimalgeraden) sind, liefert dabei die Kugeln des isotropen Raumes.

Man hat also zusammenfassend, und nach Ziffer 37 ausführlich formuliert, das folgende Theorem:

Verschiebt man im isotropen Raume zwei Schraublinien C_r und C_l aus Gewinden $\mathfrak{G}_C^r$ (45) und $\mathfrak{G}_C^l$ (46) aneinander, welche in ihrem Schnittpunkte gemeinsame Schmiegebene haben, und zwar C_r vermöge der Gruppe C_3^r (7) rechtsseitig längs C_l oder, was dasselbe gibt, C_l vermöge der Gruppe C_3^l (8) linksseitig längs C_r, so entsteht die allgemeinste Schraubfläche der konstanten Relativkrümmung $K = -C^2 \gtrless 0$.

Sind bei dieser Konstruktion die beiden Schraublinien C_r und C_l zueinander symmetrisch, so entsteht (abgesehen vom Falle der Kugel) die allgemeinste Drehfläche konstanter Relativkrümmung.

Denn mit den beiden Schraublinien ist auch die erzeugte Schraubfläche symmetrisch, also notwendig eine Drehfläche.

Als Nebenresultat ist damit übrigens auch die (unten noch zu ergänzende) Übertragung eines euklidischen Satzes von E. Müller[22]) auf den isotropischen Raum gewonnen, der besagt, daß durch euklidische Schiebung zweier gewöhnlicher Schraublinien mit parallelen Achsen aneinander stets eine Schraubfläche entsteht, insbesondere dann, wenn die Schraublinien symmetrisch sind, eine Drehfläche. Das letzte Resultat wurde übrigens vorher schon von A. Voss[23]) und S. Finsterwalder[24]) bemerkt.

46. Wenden wir uns nun den vier möglichen nichttrivialen (reellen) Typen von Drehflächen konstanter Relativkrümmung K zu, wobei wir dies K zu ± 1 normieren.

Als Grundriß der Asymptotenlinien erhält man wegen deren räumlicher Symmetrie ein durch zwei kongruente Kreise erzeugtes Schiebnetz, das also durch Drehung eines Kreises um einen Peripheriepunkt entsteht. Dessen Hüllkreis gehört dabei auf der Fläche zu einer gleichfalls kreisförmigen Rückkehrkante der Drehfläche, die ihrerseits Hüllkurve der schraublinigen Asymptotenlinien ist. Die Realität dieser Linien unterscheidet die drei Haupttypen, zu denen als vierter noch die isotrope Kugel kommt.

---

[22]) E. Müller, Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, 118 (1909), S. 3–13; insbes. S. 9–12.

[23]) A. Voss [13]), S. 13.

[24]) S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 6 (1899), S. 66.

47. Erster Typus: ***die einzige Möglichkeit einer Drehfläche negativkonstanter Relativkrümmung*** $K = -1$. Wir wählen, indem wir uns der Ziffer 41 anschließen, die beiden folgenden reellen symmetrischen Schraublinien $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ der Torsionen ± 1 aus den Gewinden $\mathfrak{G}_r$ (100) und $\mathfrak{G}_l$ (101):

$$(109)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = \frac{1}{2}\cos u \\ y_r = \frac{1}{2}\sin u \\ z_r = \frac{1}{4}u \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = \frac{1}{2}\cos v \\ y_l = \frac{1}{2}\sin v \\ z_l = -\frac{1}{4}v. \end{cases}$$

Durch Schiebung zweier hierzu kongruenter Kurven entsteht nach (103) die Fläche:

$$(110)\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\cos u + \cos v) \\ y = \frac{1}{2}(\sin u + \sin v) \\ z = \frac{1}{4}[(u - v) - \sin(u - v)]. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(111)\qquad \frac{v+u}{2} = \varphi, \qquad \frac{v-u}{2} = \psi,$$

so erhalten wir

$$(112)\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\psi \\ y = \sin\varphi\cos\psi \\ z = \frac{1}{2}(\sin\psi\cos\psi - \psi). \end{cases}$$

Das ist wirklich eine *Drehfläche*, die man in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) wegen

$$(113)\begin{cases} r = \cos\psi \\ z = -\int_0^{\psi} \sin^2\psi\, d\psi \end{cases}$$

bequem so schreiben kann:

$$(114)\qquad \boxed{z = \int_1^r \sqrt{1 - r^2}\, dr.}$$

Dieser erste Typus realisiert die einzige Möglichkeit einer Drehfläche konstanter negativer Relativkrümmung. Er ist in Fig. 2 wiedergegeben: Man ist an den konischen Typ der euklidischen Drehflächen negativ-konstanter

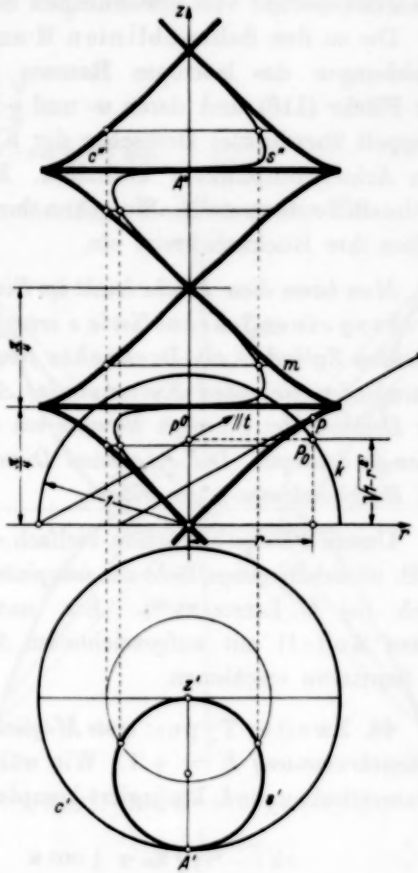

Fig. 2. Die Drehfläche konst. negativer Relativkrümmung $K = -1$ mit einer Asymptotenlinie $s = (s', s'')$. Meridian:

$$z = \int_1^r \sqrt{1 - r^2}\, dr.$$

Krümmung erinnert. Die Fläche besteht aus periodisch wiederholten konischen Teilen der Gesamthöhe $\frac{\pi}{2}$, die sich in konischen Knoten der Öffnung $\frac{\pi}{2}$ längs der z-Achse als Drehachse aneinanderreihen und bezüglich eines Rückkehrkreises c symmetrisch sind. Die Meridiankurve m wurde durch graphische Integration der Differentialgleichung

$$dz = \sqrt{1 - r^2}\, dr \tag{115}$$

nach der Isoklinenmethode mittels des Hilfskreises k bequem und sehr genau gewonnen. Sie läßt sich auch als Orthogonaltrajektorie einer z-parallelen Translationsschar von gewöhnlichen Sinuslinien definieren.

Die zu den Schraublinien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ (109) durch Links- und Rechtsschiebungen des isotropen Raumes kongruenten Asymptotenlinien s der Fläche (110) sind deren u- und v-Linien. Ihre Grundrisse s' bilden die (doppelt überdeckte) Drehschar der Kreise, vom Radius $\frac{1}{2}$, deren Umfänge den Achsenspurpunkt z' enthalten. Eine dieser Schraublinien $s = (s', s'')$ ist im Bilde dargestellt. Sie gehen durch die Knotenpunkte der Fläche und hüllen ihre Rückkehrkreise ein.

Man kann diese Fläche leicht im Sinne der isotropen Kinematik auch durch Drehung einer Schraublinie s erzeugen, wobei eine Erzeugende z des durch s gehenden Zylinders als Drehachse fungiert, während die auf der diametralen Erzeugenden liegenden Kurvenpunkte A durch ihre Schmiegebenen die bei der Drehung des isotropen Raumes um z invariante Stellung der Bahnkreisebenen festlegen. Die genannten Diametralpunkte A selbst beschreiben dabei die Rückkehrkreise c der Fläche.

Unsere Fläche hat schon vielfach das Interesse der Geometer gefunden. Z. B. ist sie *Biegungsfläche des imaginären Drehparaboloids*[25]). Man findet sie auch bei H. Liebmann[26]). Ein unter Leitung von A. Brill konstruiertes Modell mit aufgezeichneten Asymptotenlinien ist im Verlage von M. Schilling erschienen.

48. Zweiter Typus: *erste Möglichkeit einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung $K = +1$.* Wir wählen, entsprechend der Ziffer **43**, die symmetrischen und konjugiert-komplexen Schraublinien der Torsionen $\pm i$

$$\mathfrak{U}\begin{cases} x_r = \frac{1}{2}\cos u \\ y_r = \frac{1}{2}\sin u \\ z_r = \frac{i}{4}u \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = \frac{1}{2}\cos v \\ y_l = \frac{1}{2}\sin v \\ z_l = -\frac{i}{4}v, \end{cases} \tag{116}$$

[25]) Vgl. W. Blaschke-K. Reidemeister[18]), S. 187 und die dort zitierte Literatur.
[26]) H. Liebmann[11]), S. 168.

deren Grundrisse jedoch reell, nämlich Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ sind. Nach (107) erhält man durch Schiebung solcher Kurven aneinander die Drehfläche

$$(117)\qquad \begin{cases} x = \cos\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2} \\ y = \sin\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2} \\ z = \dfrac{i}{4}\left[(u-v) - \sin(u-v)\right] \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$(118)\qquad \frac{u+v}{2} = \varphi, \qquad \frac{u-v}{2} = i\psi$$

setzen:

$$(119)\qquad \begin{cases} x = \cos\varphi\, ch\,\psi \\ y = \sin\varphi\, ch\,\psi \\ z = \frac{1}{2}(-\psi + sh\,\psi\, ch\,\psi). \end{cases}$$

In Zylinderkoordinaten hat man für ihren Meridian m die Parameterdarstellung

$$(120)\qquad \begin{cases} r = ch\,\psi \\ z = \int_0^{\psi} sh^2\,\psi\, d\psi \end{cases}$$

und für die Fläche selbst die Gleichung

$$(121)\qquad \boxed{z = \int_1^r \sqrt{r^2-1}\, dr}\,.$$

Aus den Formeln (117) oder (121) folgt, daß diese Drehfläche konstanter Relativkrümmung $K = +1$ aus jener des ersten Typs (114) durch die imaginäre Affinität entsteht, welche die Punkte (x, y, z) durch die Punkte (x, y, iz) ersetzt. Die Fläche (Fig. 3) besitzt also den gleichen Rückkehrkreis wie der erste Typ, ihre komplexen Asymptotenlinien sind zu den Schraublinien (116) schiebungskongruent.

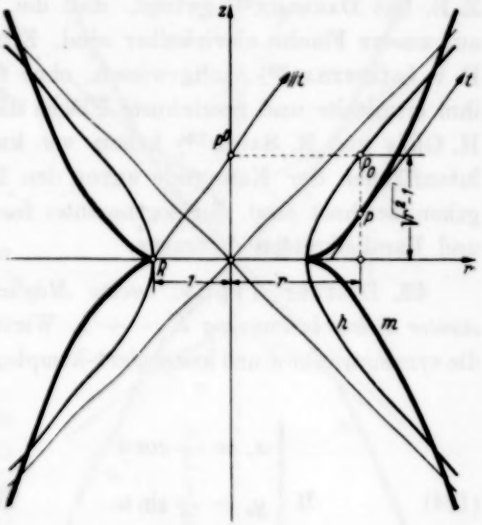

Fig. 3. Die Evolutenfläche

$$z = \int_1^r \sqrt{r^2-1}\, dr$$

des Katenoids

$$z = \tfrac{1}{2}\, ch\, 2r$$

als Drehfläche konst. positiver Relativkrümmung $K = +1$.

ergeben sich als u- und v-Linien in der Darstellung (117) der Fläche und bilden sich als dieselbe Drehschar reeller Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ ab, wie sie beim ersten Typ auftrat.

Der in Fig. 3 dargestellte Meridian m dieser Drehfläche wurde wieder durch graphische Integration der Differentialgleichung

$$dz = \sqrt{r^2 - 1}\, dr \tag{122}$$

nach der Isoklinenmethode mittels der gleichseitigen Hilfshyperbel h bequem gewonnen. Der Darstellung (120) entnimmt man leicht, daß diese *Meridiankurve m mit der Evolute der Kettenlinie*

$$z = \tfrac{1}{2}\, ch\, 2r \tag{123}$$

übereinstimmt.

Dieser erste Typus einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes ist also mit der Evolutenfläche des Katenoids identisch, und hat in dieser Bedeutung schon vielfaches Interesse gefunden. Z. B. hat Darboux[27]) gezeigt, daß die Zentraflächen aller Minimalflächen auf unsere Fläche abwickelbar sind. Eine andere Eigenschaft hat übrigens R. v. Lilienthal[28]) nachgewiesen, ohne freilich zu erkennen, daß die von ihm ermittelte und gezeichnete Fläche die Evolutenfläche des Katenoids ist. H. Graf und R. Sauer[29]) haben vor kurzem nachgewiesen, daß die Evolutenflächen der Katenoide unter den Drehflächen durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, ein sogenanntes fastrhombisches Netz aus Meridianen und Parallelkreisen zu tragen.

49. Dritter Typus: *zweite Möglichkeit einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung $K = +1$.* Wir wählen, entsprechend der Ziffer **43**, die symmetrischen und konjugiert-komplexen Schraublinien der Torsionen $\pm i$

$$\mathfrak{U}\begin{cases} x_r = \frac{i}{2}\cos u \\ y_r = \frac{i}{2}\sin u \\ z_r = -\frac{i}{4}u \end{cases} \qquad \mathfrak{B}\begin{cases} x_l = -\frac{i}{2}\cos v \\ y_l = -\frac{i}{2}\sin v \\ z_l = +\frac{i}{4}v, \end{cases} \tag{124}$$

---

[27]) G. Darboux, Theorie des surfaces III, S. 386; vgl. J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, § 131. Leipzig-Berlin 1913.

[28]) R. v. Lilienthal, Zur Theorie der äquidistanten Kurven auf einer Fläche. Math. Annalen **62** (1905), S. 537–567; insbes. S. 563.

[29]) H. Graf u. R. Sauer, Fastrhombische Kurvennetze und Viereckshetze. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 362–386; insbes. S. 374.

deren Grundrisse nullteilige Kreise des Radius $\frac{i}{2}$ sind. Durch Schiebung solcher Schraublinien aneinander erhält man nach (107) die Drehfläche

$$(125)\qquad \begin{cases} x = \frac{i}{2}\,(\cos u - \cos v) \\ y = \frac{i}{2}\,(\sin u - \sin v) \\ z = -\frac{i}{4}\,[(u - v) + \sin (u - v)], \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$(126)\qquad \frac{u+v}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{u-v}{2} = i\,\psi$$

setzen:

$$(127)\qquad \begin{cases} x = \cos \varphi\, sh\, \psi \\ y = \sin \varphi\, sh\, \psi \\ z = \frac{1}{2}\,(\psi + sh\, \psi\, ch\, \psi), \end{cases}$$

so daß der Meridian m der Drehfläche in Zylinderkoordinaten parametrisch lautet

$$(128)\qquad \begin{cases} r = sh\, \psi \\ z = \int_0^{\psi} ch^2\, \psi\, d\, \psi, \end{cases}$$

und sie selbst die Gleichung hat

$$(129)\qquad \boxed{z = \int_0^{r} \sqrt{1 + r^2}\, d\, r.}$$

Die Meridiankurve m wurde wieder (Fig. 4) durch graphische Integration der Differentialgleichung

$$(130)\qquad dz = \sqrt{1 + r^2}\, dr$$

nach der Isoklinenmethode mittels der gleichseitigen Hilfshyperbel h gewonnen. Sie ergäbe sich auch als Orthogonaltrajektorie einer z-parallelen Translationsschar von hyperbolischen Sinuslinien.

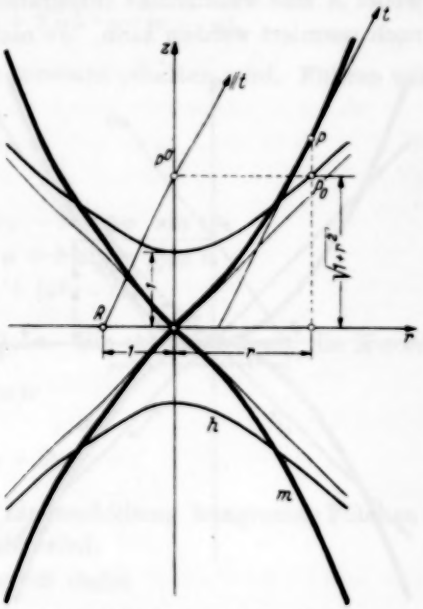

Fig. 4. Drehfläche konst. positiver Relativkrümmung $K = +1$.

Die Asymptotenkurven, u- und v-Linien der Darstellung (125), sind zu den komplexen Schraublinien (124) im isotropen Raume schiebungskongruent. Sie hüllen den nullteiligen Einheitskreis der Symmetrieebene $z = 0$ ein, der Rückkehr-

kreis der Fläche ist, und ihre komplexen Grundrisse haben die Radien dieses imaginären Kreises als Durchmesser. Der Ursprung O ist ein konischer Knoten der Fläche.

Diese Drehfläche ist auch deswegen bemerkenswert, weil sie *Biegungsfläche des reellen Drehparaboloids*[25]) ist.

50. Man kann leicht zeigen, daß mit unseren drei Grundtypen, abgesehen vom Trivialfalle der Kugel, alle reellen Arten von Drehflächen konstanter Relativkrümmung $K \neq 0$ des isotropen Raumes erschöpft sind.

In der Tat ist ja nach Ziffer **30** für die Drehfläche des Meridians

$$z = f(r) \tag{131}$$

die Relativkrümmung

$$K = \frac{f' \cdot f''}{r}. \tag{132}$$

Ist K konstant, so wird der Meridian

$$z = f(r) = \int \sqrt{K r^2 + A}\, dr, \tag{133}$$

wobei A eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet, die ebenso wie K noch normiert werden kann. Je nach den verschiedenen Vorzeichenmöglichkeiten ergeben sich dann wegen $K \neq 0$ genau die drei oben durch *direkte Erzeugung* gewonnenen (reellen) Haupttypen, dazu noch als vierter Typus für $A = 0$, $K = +1$ das Kugelpaar

$$z = \int_0^r \sqrt{r^2}\, dr = \pm \frac{r^2}{2} \tag{134}$$

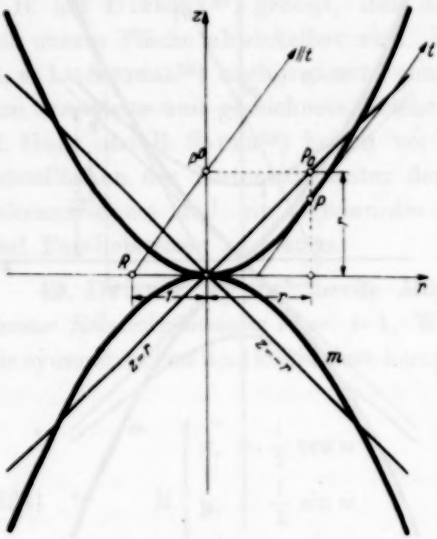

Fig. 5. Die isotropen Kugeln $z = \pm \frac{r^2}{2}$ als Drehflächen konst. positiver Relativkrümmung $K = +1$.

als *dritte Möglichkeit einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung* $K = +1$, das wir (Fig. 5) als Übergangsfall von unserem zweiten zum dritten Typus analog den bisherigen Figuren durch die beiden Meridianparabeln dargestellt haben.

51. Wir verzichten auf eine ebenso ausführliche Aufzählung der möglichen Schraubflächen konstanter Relativkrümmung und begnügen uns mit einem Beispiel, nämlich einer Schraubfläche der Relativkrüm-

mung $K = -1$, deren reelle Asymptotenlinien nach Ziffer 45 Schraublinien des isotropen Raumes sein werden. Sie mögen im Anschlusse an die Ziffer 41 schiebungskongruent sein zu den beiden Schraublinien der Torsionen ± 1:

$$\mathfrak{U}\begin{cases} x_r = a\cos u \\ y_r = a\sin u \\ z_r = +a^2 u \end{cases} \qquad \mathfrak{B}\begin{cases} x_l = b\cos v \\ y_l = b\sin v \\ z_l = -b^2 v, \end{cases} \tag{135}$$

so daß durch Schiebung der Kurven aneinander nach (103) folgende Fläche entsteht:

$$\begin{cases} x = a\cos u + b\cos v \\ y = a\sin u + b\sin v \\ z = (a^2 u - b^2 v) - ab\sin(u - v), \end{cases} \tag{136}$$

von der man sich leicht überzeugen kann, daß sie wirklich eine Schraubfläche ist. Man hat nämlich

$$x^2 + y^2 = r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos(v - u), \tag{137}$$

d. h. r bleibt konstant, wenn $v - u = w$ konstant gehalten wird. Führen wir also statt v die neue Variable

$$w = v - u \tag{138}$$

ein, so lautet die Fläche

$$\begin{cases} x = (a + b\cos w)\cos u - b\sin w\cdot\sin u \\ y = (a + b\cos w)\sin u + b\sin w\cdot\cos u \\ z = (ab\sin w - b^2 w) + (a^2 - b^2)u. \end{cases} \tag{139}$$

Das ist aber in der Tat eine Schraubfläche. Sie entsteht, wenn die Kurve

$$\begin{cases} X = a + b\cos w \\ Y = b\sin w \\ Z = ab\sin w - b^2 w, \end{cases} \tag{140}$$

d. i. die zur Schraublinie $\mathfrak{B}$ (135) durch Linksschiebung kongruente Flächenkurve $u = 0$ um die z-Achse verschraubt wird.

Der Parameter p dieser Schraubung ist dabei

$$p = a^2 - b^2, \tag{141}$$

also [in Übertragung des Müllerschen Resultats[22]) auf den isotropen Raum] gleich der Summe der Parameter der beiden Schraublinien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ (135), durch deren Cliffordsche Schiebung die Fläche erzeugt wurde.

Asymptotenlinien der Fläche (136) sind die zu den Schraublinien (135) schiebungskongruenten u- und v-Linien. *Ihre Grundrisse bilden zwei Drehscharen von Kreisen*, deren Mitten die zur Schraubachse konzentrischen

Kreise der Radien b und a erfüllen, während ihre eigenen Radien umgekehrt a und b sind. *Diese Kreisscharen entstehen auch, wenn man irgend zwei der Kreise aus den beiden Scharen aneinander verschiebt.* Den Hüllkreisen entsprechen auf der Fläche zwei von den Asymptotenlinien umhüllte Bahnschraublinien R_1 und R_2, die auf ihr *Rückkehrkanten* sind, nämlich:

$$(142)\qquad R_1\begin{cases} x = (a+b)\cos t \\ y = (a+b)\sin t \\ z = (a^2-b^2)\,t \end{cases} \qquad R_2\begin{cases} x = (a-b)\cos t \\ y = (a-b)\sin t \\ z = (a^2-b^2)\,t. \end{cases}$$

Man stellt, ähnlich dem Vorgange in Ziffer 50, unschwer fest, daß die *Meridiankurven der Schraubflächen konstanter Relativkrümmung* K Gleichungen der Form haben:

$$(143)\qquad z = \int \sqrt{Kr^4 + Ar^2 - p^2}\cdot\frac{dr}{r},$$

wobei p der Parameter der Schraubung und A eine willkürliche Konstante ist.

VII. Die Regelflächen konstanter Relativkrümmung.

52. Man erhält alle Regelflächen der konstanten Relativkrümmung $K < 0$, wenn man einen gemäß Ziffer 37 gewählten Schmiegstrahl einer Kurve der festen Torsion $+\sqrt{-K}$ oder $-\sqrt{-K}$ längs der Kurve verschiebt, oder umgekehrt (immer in den richtigen Sinnen) die Kurve längs des Schmiegstrahls verschiebt. Das Ergebnis dieser CLIFFORDschen Schiebungen des isotropen Raumes sind *parabolische Netzflächen*[30]).

Um etwa zu einer Regelfläche der festen Relativkrümmung $K = -1$ zu gelangen, wählen wir, der Ziffer 41 folgend, die Kurve $\mathfrak{U}$ in der allgemeinen Form (104), während $\mathfrak{B}$ geradlinig, etwa gleich die y-Achse sein soll. Wir setzen also

$$(144)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = -u \\ y_r = U' \\ z_r = 2U - uU' \end{cases} \qquad \mathfrak{B}\begin{cases} x_l = 0 \\ y_l = v \\ z_l = 0. \end{cases}$$

Die daraus entstehende Regelfläche wird nach (103) lauten:

$$(145)\qquad \begin{cases} x = -u \\ y = U' + v \\ z = 2U - uU' - uv. \end{cases}$$

---

[30]) In der Behandlung als *uneigentliche geradlinige Affinsphären* treten diese Flächen bei J. RADON, Zur Affingeometrie der Regelflächen, Ber. Verh. sächs. Ges. Wiss. Leipzig 70 (1918), S. 147—155; insbes. § 2, auf. Vgl. W. BLASCHKE-K. REIDEMEISTER[18]), S. 221 und E. SALKOWSKI, Affine Differentialgeometrie, S. 185—186. Berlin-Leipzig 1934.

Schreiben wir hier für $2\,U(u) = 2\,U(-x)$ kürzer $f(x)$, so haben wir eine Fläche der Form

$$z = xy + f(x) \tag{146}$$

gewonnen, aus der sich durch Bewegungen des isotropen Raumes alle anderen *Regelflächen der Relativkrümmung* $K = -1$ ergeben, deren krumme Asymptotenlinien [die u-Linien in (145)] positive Torsion $\tau = +1$ haben. Jene mit negativer Torsion der krummen Asymptotenlinien erhielte man daraus durch Spiegelung an einer Ebene.

Offenbar läßt sich jede parabolische Netzfläche als eine solche Schiebfläche in einem geeigneten isotropen Raum auffassen. Bemerkenswert ist dabei, daß ihre krummen Asymptotenlinien in diesem Raume als untereinander *kongruent* angesehen werden können, da sie durch Cliffordsche Schiebungen zusammenhängen.

53. Von Interesse ist insbesondere der Fall, wo die zweite Schiebschar gleichfalls aus Geraden besteht. Es sind dies die sogenannten Cliffordschen *Flächen des isotropen Raumes*. Man erhält sie für quadratisches $U(u)$ bzw. $f(x)$, etwa für $f(x) = mx^2$ in der Form:

$$z = xy + mx^2. \tag{147}$$

Alle diese Cliffordschen Flächen sind hyperbolische Paraboloide mit vollisotroper Durchmesserrichtung. Sie entstehen durch Cliffordsche links- bzw. rechtsseitige Schiebungen ihrer geradlinigen Erzeugenden aneinander. Umgekehrt ist jedes hyperbolische Paraboloid mit vollisotroper Durchmesserrichtung auf diese Art erzeugbar und darum eine Cliffordsche Fläche des isotropen Raumes.

Jede Cliffordsche Fläche gestattet eine zweigliedrige Gruppe von Grenzbewegungen in sich, nämlich jene, welche von den beiden Schiebungen ihrer Konstruktion erzeugt wird.

(Eingegangen am 16. Oktober 1941.)

Anzahlabschätzung einer bekannten Basis h-ter Ordnung.

Von

Alfred Stöhr in Berlin.

§ 1.

Kleine lateinische Buchstaben außer e bedeuten nichtnegative ganze Zahlen, kleine griechische Buchstaben nichtnegative reelle Zahlen. Für $h \geqq 2$ bedeutet $\sqrt[h]{\xi}$ stets die nichtnegative reelle Wurzel. Große deutsche Buchstaben bedeuten Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen; $M(x)$ bedeutet die Anzahl der positiven Zahlen $\leqq x$ aus $\mathfrak{M}$.

$h \geqq 2$ sei für alles Folgende fest gewählt. $\mathfrak{M}$ heißt eine Basis h-ter Ordnung (für die Menge aller natürlichen Zahlen), wenn jede natürliche Zahl Summe von höchstens h Summanden aus $\mathfrak{M}$ ist[1]).

Wir wollen nun für eine bekannte[2]) spezielle Menge $\mathfrak{A}$ den Ausdruck

$$\frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} \qquad (x \geqq 1)$$

oder einen ähnlichen Ausdruck nach oben abschätzen.

Die betrachtete Menge $\mathfrak{A}$ hängt von h ab und ist folgendermaßen definiert: Sei

$$1 \leqq q \leqq h. \tag{1}$$

$\mathfrak{A}_q$ sei die Menge aller Zahlen $z^{(q)}$, die im Zahlsystem mit der Grundzahl 2^h eine Darstellung

$$z^{(q)} = \sum_{i=0}^{s'} 2^{q-1} z_i^{(q)} 2^{hi} \qquad (z_i^{(q)} = 0 \text{ oder } 1) \tag{2}$$

besitzen; insbesondere nehmen wir also in jedes $\mathfrak{A}_q$ die Zahl 0 als Element auf. $\mathfrak{A}$ sei die Vereinigungsmenge aller Mengen $\mathfrak{A}_q$.

Über $\mathfrak{A}$ ist bekannt: $\mathfrak{A}$ ist eine Basis h-ter Ordnung (für die Menge aller natürlichen Zahlen). Es ist

$$\frac{A(x)+1}{\sqrt[h]{x}} < \max_{1 \leqq t \leqq h} \frac{h+t}{\sqrt[h]{2^{t-1}}} \qquad (x \geqq 1) \tag{3}$$

---

[1]) Über den Basisbegriff und verwandte Begriffsbildungen berichtet ausführlich H. Rohrbach, Jahresber. DMV. **48** (1939), S. 199–236.

[2]) D. Raikov, Rec. math. Moscou (N. S.) **2** (1937), S. 596–597; A. Stöhr, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 739–743.

oder [aus (3) hergeleitet und etwas schwächer als (3)]

$$\frac{A(x)+1}{\sqrt[h]{x}} < \alpha \sqrt[h]{2}\, h \qquad (x \geqq 1), \tag{4}$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{2}{e \log 2} \; (< 1{,}062) \tag{5}$$

gesetzt wurde[3]).

Wir werden nun (3) und (4) durch schärfere Abschätzungen ersetzen, nämlich

$$\frac{A(x)+h-1}{\sqrt[h]{x}} < \varkappa \qquad \text{für alle } x \geqq 1, \tag{6}$$

wobei

$$\varkappa = \varkappa(h) = \max_{1 \leqq t \leqq h} (h+t) \sqrt[h]{\frac{1-2^{-h}}{2^t-1}} \tag{7}$$

ist. [Zur Berechnung von (7) werden wir die bequemere Formel (42) beweisen.] Mit der Bezeichnung (5) gilt die Abschätzung

$$\varkappa < \alpha \sqrt[h]{2}\, \sqrt[h]{1-2^{-h}}\, h. \tag{8}$$

Die Mitteilung eines etwas mühsamen Beweises für Abschätzungen, die gegenüber den bekannten Ergebnissen (3), (4) nur um den Faktor $\sqrt[h]{1-2^{-h}}$ besser sind, bedarf wohl einer Rechtfertigung, die ich in folgenden Tatsachen erblicke: Die Abschätzung (6) ist ziemlich genau, denn wir werden umgekehrt beweisen, daß für unendlich viele x die Ungleichung

$$\frac{A(x)+h}{\sqrt[h]{x}} > \varkappa \tag{9}$$

gilt. Daraus folgt in Verbindung mit (6)

$$\underline{\operatorname{fin}}_{x=1,2,\ldots} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} = \underline{\lim}_{x=1,2,\ldots} \frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} = \varkappa. \tag{10}$$

Wir haben also für $\mathfrak{A}$ die $\sqrt[h]{x}$-Dichte und die $\sqrt[h]{x}$-Dichte im Großen[4]) bestimmt und für beide den Wert (7) erhalten. Mir ist für keine Basis h-ter Ordnung eine kleinere $\sqrt[h]{x}$-Dichte oder $\sqrt[h]{x}$-Dichte im Großen bekannt. — Die Abschätzungen können ferner als ein spezielles und wahrscheinlich verall-

[3]) (3) und (4) zitiert nach STÖHR, a. a. O.[2]). — Daß in (3) und (4) $A(x)+1$ und nicht $A(x)$ auftritt, liegt daran, daß in der zitierten Arbeit die Null bei der Anzahlberechnung mitgezählt wurde.

[4]) Zu diesen Begriffen vgl. A. STÖHR, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **185** (1942).

gemeinerungsfähiges Beispiel der *Anzahlabschätzung von solchen Zahlenmengen* aufgefaßt werden, *die mit Hilfe der Zifferndarstellung ihrer Elemente definiert sind.*

Der Vollständigkeit halber wiederhole ich hier kurz den Beweis der Basiseigenschaft von $\mathfrak{A}$: Ist x eine natürliche Zahl, so sei im Zahlensystem mit der Grundzahl 2

$$x = \sum_{i=0}^{k} x_i 2^i \qquad (x_i = 0 \text{ oder } 1;\ x_k = 1) \tag{11}$$

Dann ist mit denselben x_i

$$x = \sum_{q=1}^{h} \sum_{\substack{i \equiv q-1 \pmod h \\ 0 \leqq i \leqq k}} x_i 2^i, \tag{12}$$

wo

$$\sum_{\substack{i \equiv q-1 \pmod h \\ 0 \leqq i \leqq k}} x_i 2^i = \sum_{i'} 2^{q-1} x_{i'}^{(q)} 2^{h i'}$$

in $\mathfrak{A}_q$ liegt. Folglich ist (12) eine Darstellung von x als Summe von h Summanden aus $\mathfrak{A}$.

§ 2.

Wie aus den Zifferndarstellungen (2) hervorgeht, sind die Mengen $\mathfrak{A}_q$ bis auf das gemeinsame Element 0 elementefremd; es ist daher

$$A(x) = \sum_{q=1}^{h} A_q(x). \tag{13}$$

x ist dabei eine beliebige Zahl, die wir nun $\geqq 1$ annehmen und für das Folgende festhalten wollen. Für jedes q mit (1) sei dauernd $z^{(q)}$ die größte Zahl aus $\mathfrak{A}_q$ mit $z^{(q)} \leqq x$; eine solche Zahl gibt es stets, da die Null in $\mathfrak{A}_q$ liegt. Dann ist

$$A_q(x) = A_q(z^{(q)}). \tag{14}$$

Für $z^{(q)} = 0$ ist $A_q(z^{(q)}) = 0$; hat $z^{(q)} > 0$ die Zifferndarstellung (2), so ist

$$A_q(z^{(q)}) = \sum_{i=0}^{s'} z_i^{(q)} 2^i \tag{15}$$

mit denselben $z_i^{(q)}$ wie in (2), weil nämlich diese Zuordnung von (2) und (15) die Zahlen aus $\mathfrak{A}_q$ eineindeutig und anordnungstreu auf die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen abbildet. Von dieser Abbildung der Zahlen (2) auf die Zahlen (15) werden wir noch mehrfach Gebrauch machen.

Sei nun (11) die Zifferndarstellung von x im Zahlensystem der 2. Wir machen nun eine „Division mit Rest" der in (11) auftretenden Zahl k durch h, indem wir s, t so bestimmen, daß

$$k = h \cdot s + t - 1 \tag{16}$$

mit

$$1 \leqq t \leqq h \tag{17}$$

gilt. Wir notieren noch: Aus der Definition der $z^{(q)}$ folgt insbesondere

$$z^{(t)} \leqq x. \tag{18}$$

Aus (11), (16) erkennt man, daß $z^{(q)}$ sich in der Form

$$z^{(q)} = \sum_{i=0}^{s} 2^{q-1} 2^{hi} \quad \text{für } 1 \leqq q < t,$$

$$z^{(q)} = \sum_{i=0}^{s-1} 2^{q-1} 2^{hi} \quad \text{für } t < q \leqq h$$

schreiben läßt (leere Summen bedeuten immer Null). Nach Formel (15) ist also

$$A_q(z^{(q)}) = \sum_{i=0}^{s} 2^i = 2^{s+1} - 1 \quad \text{für } 1 \leqq q < t, \tag{19}$$

$$A_q(z^{(q)}) = \sum_{i=0}^{s-1} 2^i = 2^s - 1 \quad \text{für } t < q \leqq h. \tag{20}$$

Aus (13), (14), (19), (20) folgt nun

$$A(x) = \sum_{q=1}^{h} A_q(x) = \sum_{q=1}^{h} A_q(z^{(q)})$$

$$= (t-1)(2^{s+1} - 1) + A_t(z^{(t)}) + (h-t)(2^s - 1)$$

oder

$$A(x) + h - 1 = (h + t - 2)\, 2^s + A_t(z^{(t)}). \tag{21}$$

Setzte man hier die triviale Abschätzung

$$A_t(z^{(t)}) \leqq 2^{s+1} - 1$$

ein, so würde man im wesentlichen auf (3) geführt werden.

§ 3.

Bis hierher wurden nur bereits bekannte Verfahren benutzt. Wir verfeinern nun an dieser Stelle die Abschätzung von $A_t(z^{(t)})$. Wir setzen für $0 \leqq r' \leqq s$

$$\bar{z}(r') = \sum_{i=r'}^{s} 2^{t-1} 2^{hi} = 2^{t-1} \frac{2^{h(s+1)} - 2^{hr'}}{2^h - 1}. \tag{22}$$

Die Zahlen $\bar{z}(r')$ liegen alle in $\mathfrak{A}_t$; für $s \geqq 1$ ist

$$\bar{z}(s) < \bar{z}(s-1) < \cdots < \bar{z}(0). \tag{23}$$

Die auf $\bar{z}(0)$ folgende Zahl aus $\mathfrak{A}_t$ ist $2^{t-1} 2^{h(s+1)}$ [vgl. dazu die Abbildung (15) von $\mathfrak{A}_q$ auf die Reihe der nichtnegativen ganzen Zahlen]; diese Zahl ist wegen (11), (16) sicher größer als x. Daher ist

$$z^{(t)} \leqq \bar{z}(0) = 2^{t-1} \frac{2^{h(s+1)} - 1}{2^h - 1} < 2^{t-1} \frac{2^{h(s+1)}}{2^h - 1}. \tag{24}$$

Andererseits ist wegen (11), (16)

$$\bar{z}(s) = 2^{t-1}\,2^{hs} \leqq x,$$

also ist auch

$$2^{t-1}\,2^{hs} = \bar{z}(s) \leqq z^{(l)}. \tag{25}$$

Wir nehmen nun zunächst $s \geqq 1$ an. Wegen (24), (25) gibt es zu $z^{(l)}$ mindestens ein r mit $0 \leqq r \leqq s-1$ und

$$\bar{z}(r+1) \leqq z^{(l)} \leqq \bar{z}(r), \tag{26}$$

wobei jedoch in (26) wegen (23) höchstens einmal das Gleichheitszeichen gilt. Es folgt

$$A_t(z^{(l)}) \leqq A_t(\bar{z}(r)). \tag{27}$$

Da $\bar{z}(r)$ in $\mathfrak{A}_t$ liegt, gilt hier das Gleichheitszeichen nur, wenn es auf der rechten Seite von (26) gilt. Wendet man das durch (15) beschriebene Anzahlbestimmungsverfahren sinngemäß (mit $\mathfrak{A}_t$ statt $\mathfrak{A}_q$) auf die durch (22) (mit $r' = r$) bestimmte Zahl an, so folgt

$$A_t(\bar{z}(r)) = \sum_{i=r}^{s} 2^i = 2^{s+1} - 2^r. \tag{28}$$

Formel (22) mit $r' = r+1$ (es ist ja $r+1 \leqq s$) ergibt

$$2^{h(r+1)} = 2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h - 1)\,\bar{z}(r+1),$$

also

$$2^{r+1} = \sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)\,\bar{z}(r+1)}$$

und weiter

$$2^{s+1} - 2^r = 2^{s+1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)\,\bar{z}(r+1)}. \tag{29}$$

Endlich folgt aus (26)

$$\begin{aligned} 2^{s+1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)\,\bar{z}(r+1)} \\ \leqq 2^{s+1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)\,z^{(l)}}, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei in (30) das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn es auf der linken Seite von (26) gilt.

Setzt man (27), (28), (29), (30) zusammen und beachtet, daß nach der über (26) gemachten Bemerkung in (27) und (30) nicht gleichzeitig das Gleichheitszeichen gelten kann, so erhält man zunächst für $s \geqq 1$

$$A_t(z^{(l)}) < 2^{s+1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)\,z^{(l)}}, \tag{31}$$

wo r nicht mehr auftritt.

Für $s = 0$ folgt aus (24), (25)

$$z^{(t)} = \bar{z}(0) = 2^{t-1},$$

$$A_t(z^{(t)}) = 1.$$

Ferner ist für $s = 0$

$$2^{s+1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h - 1)z^{(t)}} > 2^{s+1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)}} = 1.$$

(31) gilt also für $s \geqq 0$, d. h. für alle in Betracht kommenden Werte.

§ 4.

Aus (18), (21) folgt für $x \geqq 1$

$$\frac{A(x)+h-1}{\sqrt[h]{x}} \leqq \frac{(h+t-2)2^s + A_t(z^{(t)})}{\sqrt[h]{z^{(t)}}}$$

oder nach Einführen der Abschätzung (31)

$$\frac{A(x)+h-1}{\sqrt[h]{x}} < \frac{(h+t)2^s - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)z^{(t)}}}{\sqrt[h]{z^{(t)}}}.$$

Wegen (24), (25) ist a fortiori

$$\frac{A(x)+h-1}{\sqrt[h]{x}} < \operatorname*{Max}_{2^{t-1}2^{hs} \leqq \zeta \leqq 2^{t-1}\frac{2^{h(s+1)}}{2^h-1}} \frac{\varphi(\zeta)}{\psi(\zeta)}, \tag{32}$$

wobei mit einer Variablen ζ

$$\varphi = \varphi(\zeta) = (h+t)2^s - \tfrac{1}{2}\sqrt[h]{2^{h(s+1)} - 2^{1-t}(2^h-1)\zeta}, \tag{33}$$

$$\psi = \psi(\zeta) = \sqrt[h]{\zeta} \tag{34}$$

gesetzt wurde. Nun hat aber der Quotient $\varphi(\zeta) : \psi(\zeta)$ sicher kein Maximum im Innern des Intervalls

$$2^{t-1}2^{hs} \leqq \zeta \leqq 2^{t-1}\frac{2^{h(s+1)}}{2^h-1}. \tag{35}$$

Für ein solches Maximum müßte nämlich (Akzente bedeuten hier Differentiation nach ζ)

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{\psi} = 0 \tag{36}$$

und

$$0 \geqq \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'' = \frac{\varphi''\psi - \psi''\varphi}{\psi^2} \tag{37}$$

sein [die Gleichung in (37) folgt unter Benutzung der zweiten Gleichung von (36)]. Das ist aber unmöglich, denn aus (33), (34) erkennt man, daß im Innern des Intervalls (35)

$$\varphi \geqq 0, \quad \psi > 0, \quad \varphi'' > 0, \quad \psi'' < 0$$

ist, und das widerspricht (37). Das auf der rechten Seite von (32) auftretende Maximum wird folglich an einem der Randpunkte des Intervalls (35) angenommen; es ist somit

$$\frac{A(x)+h-1}{\sqrt[h]{x}} < \operatorname{Max}\left(\frac{\varphi(2^{t-1}2^{hs})}{\psi(2^{t-1}2^{hs})}, \frac{\varphi\left(2^{t-1}\frac{2^{h(s+1)}}{2^h-1}\right)}{\psi\left(2^{t-1}\frac{2^{h(s+1)}}{2^h-1}\right)}\right)$$

oder nach Einsetzen der Werte in (33), (34) und leichten Umformungen

$$\frac{A(x)+h-1}{\sqrt[h]{x}} < \operatorname{Max}\left(\frac{h+t-\frac{1}{2}}{\sqrt[h]{2^{t-1}}}, (h+t)\sqrt[h]{\frac{1-2^{-h}}{2^{t-1}}}\right). \tag{38}$$

In dieser Abschätzung hängt die rechte Seite noch von x ab, da t von x abhängt. Wegen (17) können wir uns jedoch davon befreien: Wir setzen

$$\varkappa = \operatorname*{Max}_{1 \leqq t \leqq h} \operatorname{Max}\left(\frac{h+t-\frac{1}{2}}{\sqrt[h]{2^{t-1}}}, (h+t)\sqrt[h]{\frac{1-2^{-h}}{2^{t-1}}}\right). \tag{39}$$

$\varkappa$ hängt offenbar nur von h ab. Aus (38), (39) folgt (6).

Wir behaupten, daß sich die durch (39) definierte Größe $\varkappa$ auch in der Gestalt (7) schreiben läßt. Daß nämlich (7) für $h = 2$ gilt, stelle man durch eine kurze Rechnung fest. Für $h \geqq 3$ gehen wir so vor: Sei zunächst $h \geqq 4$. Dann ist $2^h \geqq 4h$, denn für $h = 4$ stimmt das, und man schließt induktiv $2^{h+1} = 2^h + 2^h > 4h + 2^2 = 4(h+1)$. Für $h \geqq 4$ ist daher

$$\sqrt[h]{1-2^{-h}} > 1 - 2^{-h} \geqq 1 - \frac{1}{4h}.$$

Die somit für $h \geqq 4$ bewiesene Ungleichung

$$\sqrt[h]{1-2^{-h}} > 1 - \frac{1}{4h} \tag{40}$$

ist, wie man nachrechne, sogar für $h \geqq 3$ richtig. Aus (17), (40) folgt daher weiter

$$(h+t)\left(1-\sqrt[h]{1-2^{-h}}\right) \leqq 2h\left(1-\sqrt[h]{1-2^{-h}}\right) < 2h \cdot \frac{1}{4h} = \frac{1}{2}$$

oder umgeformt

$$h + t - \tfrac{1}{2} < (h + t)\sqrt[h]{1 - 2^{-h}},$$

$$\mathrm{Max}\left(\frac{h + t - \frac{1}{2}}{\sqrt[h]{2^{t-1}}},\ (h + t)\sqrt[h]{\frac{1 - 2^{-h}}{2^{t-1}}}\right) = (h + t)\sqrt[h]{\frac{1 - 2^{-h}}{2^{t-1}}}$$

für $h \geqq 3$. Führt man dies in (39) ein, so erhält man die Behauptung (7), die damit vollständig bewiesen ist.

§ 5.

Wir versuchen nun den für $\varkappa$ gewonnenen Ausdruck (7) noch etwas zu vereinfachen oder abzuschätzen. Zu diesem Zweck setzen wir mit einer Variablen τ

$$\chi(\tau) = (h + \tau)\sqrt[h]{\frac{1 - 2^{-h}}{2^{\tau-1}}} \qquad (2^{\tau-1} \text{ positiv reell}).$$

Es ist

$$\frac{d}{d\tau}\chi(\tau) = (h(1 - \log 2) - \tau \log 2) \cdot \frac{1}{h}\sqrt[h]{\frac{1 - 2^{-h}}{2^{\tau-1}}} \gtreqless 0, \tag{41}$$

je nachdem

$$\tau \gtreqless \tau_0$$

ist, wo

$$\tau_0 = h\left(\frac{1}{\log 2} - 1\right) \approx 0{,}442\,69\,h$$

gesetzt wurde. Aus (41) ziehen wir zwei Folgerungen:

Erstens:

$$\varkappa = \max_{\substack{1 \leqq t \leqq h \\ |t - \tau_0| < 1}} (h + t)\sqrt[h]{\frac{1 - 2^{-h}}{2^{t-1}}}. \tag{42}$$

Diese Formel ist zur tatsächlichen Berechnung von $\varkappa$ für ein gegebenes h offenbar meist bequemer als (7). Übrigens darf auf der rechten Seite von (42) die Einschränkung $1 \leqq t \leqq h$ auch weggelassen werden.

Zweitens:

$$\varkappa < \chi(\tau_0)$$

(Gleichheit kann hier nicht gelten, denn τ_0 ist keine ganze Zahl), also

$$\varkappa < \frac{2}{e \log 2}\sqrt[h]{2}\sqrt[h]{1 - 2^{-h}}\,h$$

oder mit der Abkürzung (5)

$$\varkappa < \alpha\sqrt[h]{2}\sqrt[h]{1 - 2^{-h}}\,h. \tag{8}$$

§ 6.

Wir zeigen jetzt, daß sich die Abschätzung (6) nicht mehr sehr verschärfen läßt. Hat nämlich $\varkappa$ die obige Bedeutung, so behaupten wir: Es gibt unendlich viele Zahlen x, so daß für die Anzahlfunktion $A(x)$ unserer Menge $\mathfrak{A}$ die Ungleichung

$$\frac{A(x)+h}{\sqrt[h]{x}} > \varkappa \tag{9}$$

gilt.

Daraus folgt insbesondere: In (6) oder auch in einigen aus (6) folgenden schwächeren Ungleichungen, wie z. B.

$$\frac{A(x)}{\sqrt[h]{x}} < \varkappa \qquad \text{für alle } x \geqq 1,$$

läßt sich $\varkappa$ durch keine kleinere von x unabhängige Zahl ersetzen. Sonst erhielte man nämlich einen Widerspruch, wenn man speziell solche genügend großen x betrachtet, für die (9) gilt.

Um nun (9) zu beweisen, bestimmen wir zunächst t_0 so, daß $1 \leqq t_0 \leqq h$ und

$$\varkappa = (h+t_0)\sqrt[h]{\frac{1-2^{-h}}{2^{t_0-1}}} \tag{43}$$

ist; wegen (7) ist das möglich.

Wir wählen nun $s \geqq 0$ beliebig und setzen

$$x = x(s) = \sum_{i=0}^{s} 2^{t_0-1}\,2^{hi} = 2^{t_0-1}\frac{2^{h(s+1)}-1}{2^h-1}. \tag{44}$$

Wir zeigen, daß jedes dieser unendlich vielen x die Urgleichung (9) erfüllt. Wir wenden dazu (21) an. Nach Definition der in (21) auftretenden Größen haben wir in (21) $t = t_0$ und

$$(z^{(t)}) = (z^{(t_0)}) = x \tag{45}$$

zu setzen, während s bereits in (21) und (44) dieselbe Größe bezeichnet. (21) lautet dann

$$A(x) + h - 1 = (h + t_0 - 2)\,2^s + A_{t_0}(z^{(t_0)}). \tag{46}$$

Die Anzahlfunktion $A_{t_0}(z^{(t_0)})$ bestimmt man nach (15). (44), (45) zu

$$A_{t_0}(z^{(t_0)}) = \sum_{i=0}^{s} 2^i = 2^{s+1} - 1.$$

Setzt man dies in (46) ein, so erhält man

$$A(x) + h - 1 = (h + t_0 - 2)\, 2^s + 2^{s+1} - 1,$$

$$A(x) + h = (h + t_0)\, 2^s.$$

Benutzt man noch (44), so erhält man hieraus

$$\frac{A(x)+h}{\sqrt[h]{x}} = \frac{(h+t_0)\,2^s}{\sqrt[h]{2^{t_0-1}\dfrac{2^{h(s+1)}-1}{2^h-1}}} > \frac{(h+t_0)\,2^s}{\sqrt[h]{2^{t_0-1}\dfrac{2^{h(s+1)}}{2^h-1}}} = (h+t_0)\sqrt[h]{\frac{1-2^{-h}}{2^{t_0-1}}}$$

oder nach (43)

$$\frac{A(x)+h}{\sqrt[h]{x}} > \varkappa,$$

was zu beweisen war.

(Eingegangen am 25. November 1941.)

Über Sturms Vergleichssätze für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Systeme von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung *).

Von

E. Kamke in Tübingen.

---

1. Für die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{dy}{dx}\right] + g(x)\,y = 0 \qquad (f > 0) \tag{1}$$

hat zuerst C. STURM[1]) systematische Untersuchungen über die Lage der Nullstellen ihrer Lösungen angestellt. Für diese Untersuchungen, die in den sogenannten Oszillationssätzen gipfeln, sind gewisse Vergleichssätze grundlegend, die in ihrem Kern ebenfalls auf STURM zurückgehen, wenn sie auch später mancherlei Verallgemeinerungen und Verfeinerungen erfahren haben. Die Beweismethoden für diese Sätze sind lange Zeit insofern unverändert geblieben, als sie mit der Gleichung (1) selbst arbeiten. Erst M. BÔCHER[2]) hat bemerkt, daß der Übergang von der linearen Differentialgleichung (1) zu der zugehörigen RICCATIschen Differentialgleichung

$$u' + hu^2 + g = 0 \quad \text{mit } h = \frac{1}{f}, \quad yu(x) = fy'$$

Vorteile bietet. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und (zunächst formal) $u(x) = \operatorname{ctg} \vartheta(x)$ setzen. Man gelangt so zu der Differentialgleichung

$$\vartheta' = h\cos^2\vartheta + g\sin^2\vartheta, \tag{2}$$

d. h. zu derselben Differentialgleichung, die H. PRÜFER[3]) erhalten hat, indem er (1) durch das System

$$y' = hz, \quad z' = -gy \tag{3}$$

---

*) Das Folgende ist die ursprüngliche Fassung der Note „A new proof of STURM's comparison theorems", die 1939 in den American Mathematical Monthly erschienen ist. Da infolge des Krieges kein Abdruck nach Deutschland gelangt ist, wird die Note hier nochmals abgedruckt. Die mit Sternen bezeichneten Fußnoten enthalten nachträgliche Zusätze.

[1]) Journal de Mathématiques pures et appliquées **1** (1836), S. 106—186.

[2]) Transactions of the American Mathematical Society **1** (1900), S. 414—420.

[3]) Math. Annalen **95** (1926), S. 499ff., insbes. S. 503. PRÜFER schenkt den Vergleichssätzen dabei keine Beachtung. Für ihn handelt es sich um die Darlegung eines möglichst kurzen Weges zu den Oszillations- und Entwicklungssätzen bei Eigenwertaufgaben mit STURMschen Randbedingungen.

ersetzte und y, z durch die Polarkoordinaten

$$y = \varrho(x)\sin\vartheta(x), \quad z = \varrho(x)\cos\vartheta(x)$$

festlegte; ϑ ist dann durch (2) bestimmt, während

$$\varrho(x) = C\exp\tfrac{1}{2}\int_a^x (h-g)\sin 2\vartheta\, dx$$

ist.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie durch diese Umformung die in Betracht kommenden Sätze eigentlich völlig trivial werden. Bei dieser Darlegung werde ich mich auf die beiden sogenannten Sturmschen Vergleichssätze beschränken, sie aber in möglichst allgemeiner Formulierung beweisen und statt für die Gleichung (1) bzw. für das ihr äquivalente System (3) sogleich für das allgemeinere System

$$y' = Py + Qz, \quad z' = Ry + Sz,$$

wie es auch schon Bôcher[4])*) getan hat.

2. In dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ seien $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ stetig. Dann ist die Gesamtheit der eigentlichen Lösungen[5]) $y(x)$, $z(x)$ des Systems

$$y' = Py + Qz, \quad z' = Ry + Sz \tag{4}$$

gerade die Gesamtheit der Funktionen

$$y = C\varrho(x)\sin\vartheta(x), \quad z = C\varrho(x)\cos\vartheta(x), \tag{5}$$

wo C eine beliebige Konstante $\neq 0$,

$$\varrho(x) = \exp\int_a^x [P\sin^2\vartheta + (Q+R)\sin\vartheta\cos\vartheta + S\cos^2\vartheta]\, dx \tag{6}$$

und $\vartheta(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\vartheta' = Q\cos^2\vartheta + (P-S)\sin\vartheta\cos\vartheta - R\sin^2\vartheta \tag{7}$$

mit einem Anfangswert $0 \leqq \vartheta(a) < \pi$[6]) ist.

---

[4]) Transactions of the American Mathematical Society **3** (1902), S. 196–215.

*) Für eine andere Beweismethode s. Z. Butlewski, Mathematica **17** (1941), S. 85–110. Die Arbeit enthält eine ausführliche Untersuchung über Trennungs- und Vergleichssätze für Systeme von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zur Ergänzung der Literaturangaben vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, S. 124ff. Leipzig 1942.

[5]) D. h. der Lösungen, für die stets $|y| + |z| > 0$ ist.

[6]) Wie der Beweis zeigt, kann man auch $-\pi < \vartheta(a) \leqq 0$ oder noch allgemeiner $\omega \leqq \vartheta(a) < \omega + \pi$ oder $\omega - \pi \leqq \vartheta(a) < \omega$ mit beliebigem ω vorschreiben.

Beweis. Ist y, z eine eigentliche Lösung von (4), so können $\varrho(x)$, $\vartheta(x)$ in bekannter Weise als stetig differenzierbare Funktionen und eine Konstante $C \neq 0$ so gewählt werden, daß $\varrho(a) = 1$, $0 \leqq \vartheta(a) < \pi$ ist und (5) gilt. Aus (5) folgt dann

$$(8) \qquad \begin{aligned} y' &= C\varrho' \sin\vartheta + C\vartheta'\varrho\cos\vartheta, \\ z' &= C\varrho'\cos\vartheta - C\vartheta'\varrho\sin\vartheta, \end{aligned}$$

also wegen (4)

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varrho'\sin\vartheta + \vartheta'\varrho\cos\vartheta &= (P\sin\vartheta + Q\cos\vartheta)\varrho, \\ \varrho'\cos\vartheta - \vartheta'\varrho\sin\vartheta &= (R\sin\vartheta + S\cos\vartheta)\varrho, \end{aligned}$$

und hieraus (7) sowie

$$(10) \qquad \varrho' = [P\sin^2\vartheta + (Q+R)\sin\vartheta\cos\vartheta + S\cos^2\vartheta]\varrho,$$

und daher (6) wegen $\varrho(a) = 1$. Umgekehrt folgen aus (6) die Gleichung (10), und weiter aus (7) und (10) die Gleichungen (9), also, wenn noch y und z durch (5) definiert werden, die Gleichungen (8), und schließlich aus (8) und (9) die Gleichungen (4).

Damit ist das System (4) auf die eine Gleichung (7) zurückgeführt. Da stets $\varrho(x) \neq 0$ ist, werden die Nullstellen von y durch die Werte $\vartheta = k\pi$ und die Nullstellen von z durch $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ganzzahliges k geliefert.

3. Sind $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig und bezeichnet $\vartheta(x, \alpha)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$(11) \qquad \vartheta' = A\cos^2\vartheta + B\sin 2\vartheta + C\sin^2\vartheta$$

mit dem Anfangswert $\vartheta(a, \alpha) = \alpha$, so gilt folgendes:

(a) Für beliebiges α gibt es genau eine Lösung $\vartheta(x, \alpha)$, und diese existiert im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$;

(b) $\vartheta(x, \alpha + \pi) = \vartheta(x, \alpha) + \pi$;

(c) durchläuft α wachsend ein Intervall $\omega \leqq \alpha \leqq \omega + \pi$, so durchläuft $\vartheta(x, \alpha)$ bei festem x ebenfalls wachsend ein Intervall der Länge π.

Beweis. Da die rechte Seite von (11) in den Variabeln x, ϑ stetig und beschränkt, sowie nach ϑ stetig differenzierbar ist, ergibt sich (a) aus den bekannten Existenzsätzen über Differentialgleichungen. Ist $\vartheta(x, \alpha)$ eine Lösung von (11), so ist offenbar auch $\vartheta(x, \alpha) + \pi$ eine Lösung, und zwar eine Lösung mit dem Anfangswert $\alpha + \pi$; da es aber nur *eine* Lösung mit gegebenem Anfangswert gibt, folgt hieraus (b), und somit auch (c), da $\vartheta(x, \alpha)$ wiederum nach bekannten Sätzen stetig und monoton mit α wächst.

4. In dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ seien $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$, $C_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ stetig, ferner sei

$$A_2 \geqq A_1,\ C_2 \geqq C_1,\ (A_2 - A_1)(C_2 - C_1) \geqq (B_2 - B_1)^2. \tag{12}$$

Bezeichnet $\vartheta_\nu(x, \alpha)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\vartheta' = A_\nu \cos 2\vartheta + B_\nu \sin 2\vartheta + C_\nu \sin^2\vartheta \tag{13}$$

mit dem Anfangswert $\vartheta_\nu(a, \alpha) = \alpha$, so ist

$$\vartheta_2(x, \alpha_2) \geqq \vartheta_1(x, \alpha_1) \quad \text{für } \alpha_2 \geqq \alpha_1. \tag{14}$$

Beweis. Nach der Voraussetzung (12) ist die quadratische Form

$$(A_2 - A_1)\cos^2\vartheta + 2(B_2 - B_1)\sin\vartheta\cos\vartheta + (C_2 - C_1)\sin^2\vartheta$$

in $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ positiv semidefinit, also ist für jedes ϑ

$$A_1\cos^2\vartheta + B_1\sin 2\vartheta + C_1\sin^2\vartheta \leqq A_2\cos^2\vartheta + B_2\sin 2\vartheta + C_2\sin^2\vartheta,$$

also[7]) für jedes α

$$\vartheta_1(x, \alpha) \leqq \vartheta_2(x, \alpha).$$

Da $\vartheta_2(x, \alpha)$ mit α monoton wächst, folgt hieraus (14).

5. Von Wichtigkeit ist noch, wann in (14) das Gleichheitszeichen ausgeschlossen werden kann. Darüber gilt folgendes:

Es seien wieder die Voraussetzungen von Nr. 4 erfüllt. Außerdem sei noch $B_2(x) \equiv B_1(x)$[8]), so daß die letzte der Ungleichungen (12) eine Folge der beiden ersten ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\vartheta_2(b, \alpha_2) > \vartheta_2(b, \alpha_1) \quad \text{für } \alpha_2 \geqq \alpha_1 \tag{15}$$

sicher dann, wenn

entweder $\alpha_2 > \alpha_1$

oder $\alpha_2 = \alpha_1$ und außerdem $A_2 > A_1$ und $|C_1| + |C_2| > 0$

oder $C_2 > C_1$ und $|A_1| + |A_2| > 0$

an mindestens einer Stelle des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ ist.

Beweis. Nach Nr. 4 ist

$$\vartheta_2(b, \alpha_1) \geqq \vartheta_1(b, \alpha_1),$$

also gilt (15) sicher für $\alpha_2 > \alpha_1$. Es sei also weiterhin $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$. Ist $\vartheta_2(x, \alpha) > \vartheta_1(x, \alpha)$ an einer Stelle x, so ist sicher $\vartheta_2(b, \alpha) > \vartheta_1(b, \alpha)$, d. h. es

[7]) Vgl. z. B. E. KAMKE, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 91. Leipzig 1930. Hier läßt sich der Beweis auch unmittelbar führen.

[8]) Läßt man diese Voraussetzung, die sich auch bei BÔCHER findet, fallen, so wird die Formulierung komplizierter. Vgl. dazu Nr. 7, Zusatz 2.

ist $\vartheta_2(b, \alpha) = \vartheta_1(b, \alpha)$ genau dann, wenn $\vartheta_2(x, \alpha) = \vartheta_1(x, \alpha)$ für alle x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ ist. Ist nun $\vartheta(x)$ eine gemeinsame Lösung der beiden Differentialgleichungen (13), so folgt durch Subtraktion

$$(A_2 - A_1)\cos^2\vartheta + (C_2 - C_1)\sin^2\vartheta = 0 \quad \text{für } a \leqq x \leqq b.$$

Ist an irgend einer Stelle x_0 und damit auch in einer gewissen Umgebung dieser Stelle

$$A_2 > A_1 \quad \text{oder} \quad C_2 > C_1,$$

so folgt aus der obigen Gleichung für diese Umgebung

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ bzw. } \vartheta = k\pi \text{ mit ganzzahligem } k.$$

Da ϑ eine Lösung der Differentialgleichungen (13) ist, folgt weiter durch Eintragen von ϑ in (13) für diese Umgebung

$$C_1 = C_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad A_1 = A_2 = 0.$$

Bei den obenstehenden Voraussetzungen haben also die beiden Gleichungen (13) sicher keine gemeinsame Lösung, d. h. es ist stets $\vartheta_2(x, \alpha) \neq \vartheta_1(x, \alpha)$, also (15) richtig.

6. Nr. 4 und 5 enthalten bereits die Vergleichssätze. Es soll jedoch gezeigt werden, daß darin tatsächlich die übliche Formulierung enthalten ist. Nach Bôcher[9]) lautet diese:

Im Intervall $a \leqq x \leqq b$ seien $P_\nu(x), \ldots, S_\nu(x)$ stetig ($\nu = 1, 2$); ferner sei

$$Q_2 \geqq Q_1 > 0, \quad R_2 \leqq R_1, \quad P_2 - S_2 = P_1 - S_1. \tag{16}$$

Es sei $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ eine eigentliche Lösung des Systems

$$y' = P_\nu y + Q_\nu z, \quad z' = R_\nu y + S_\nu z \tag{17}$$

und

$$\begin{cases} \text{entweder } y_1(a) = 0 \\ \text{oder} \quad y_1(a) \neq 0, \quad y_2(a) \neq 0, \quad \dfrac{z_1(a)}{y_1(a)} \geqq \dfrac{z_2(a)}{y_2(a)}. \end{cases} \tag{18}$$

Dann gilt folgendes:

(a) $y_2(x)$ hat in $a < x \leqq b$ mindestens ebenso viele Nullstellen wie $y_1(x)$; sind x_n, $\bar{x}_n$ die n-ten Nullstellen von y_1, y_2, so ist $\bar{x}_n \leqq x_n$; es ist sogar $\bar{x}_n < x_n$, wenn an mindestens einer Stelle des Intervalls $a \leqq x \leqq x_n$

$$\begin{cases} Q_2 > Q_1 \quad \text{und} \quad |R_1| + |R_2| > 0 \\ \text{oder } R_2 < R_1 \end{cases} \tag{19}$$

ist.

[9]) Siehe Fußnote [4]) auf S. 789 (S. 204f.).

(b) Wenn y_1 und y_2 gleichviel Nullstellen im Intervall $a < x < b$ haben, wenn außerdem $y_1(b) \neq 0$, $y_2(b) \neq 0$ ist und an mindestens einer Stelle des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ die Voraussetzung (19) gilt, so ist

$$\frac{z_1(b)}{y_1(b)} > \frac{z_2(b)}{y_2(b)}. \tag{20}$$

Beweis. Für jedes der Systeme (17) läßt sich die in Nr. 2 angegebene Umformung vornehmen. Man gelangt so zu den Gleichungen

$$\vartheta' = Q_\nu \cos^2\vartheta + (P_\nu - S_\nu)\sin\vartheta\cos\vartheta - R_\nu \sin^2\vartheta, \tag{21}$$

wobei die Lösungen einen Anfangswert

$$0 \leqq \vartheta_\nu(a) < \pi \tag{22}$$

haben. Nach (5) verschwindet y_ν genau dann, wenn $\vartheta_\nu(x)$ einen Wert $k\pi$ mit ganzzahligem k annimmt. Hat ϑ_ν einen solchen Wert an einer Stelle x_0, so folgt aus (21)

$$\vartheta_\nu'(x_0) = Q_\nu(x_0) > 0,$$

d. h. $\vartheta_\nu(x)$ passiert jeden solchen Wert wachsend und nimmt ihn daher nur einmal an. Wegen (5) besagt die Voraussetzung (18)

$$\sin\vartheta_1(a) = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{ctg}\vartheta_1(a) \geqq \operatorname{ctg}\vartheta_2(a),$$

also wegen (22)

$$0 \leqq \vartheta_1(a) \leqq \vartheta_2(a) < \pi.$$

Nach Nr. 4 ist daher

$$\vartheta_2(\xi) \geqq \vartheta_1(\xi) \tag{23}$$

für jedes $a \leqq \xi \leqq b$, und das Gleichheitszeichen kann hierin nach Nr. 5 fortgelassen werden, wenn (19) für ein $a \leqq x \leqq \xi$ erfüllt ist. Damit ist die Behauptung (a) gewonnen.

Im Fall (b) ist, wenn y_1 und y_2 genau N Nullstellen haben,

$$N\pi < \vartheta_\nu(b) < (N+1)\pi.$$

Da nach Nr. 5

$$\vartheta_2(b) > \vartheta_1(b)$$

ist, ist somit

$$\operatorname{ctg}\vartheta_1(b) > \operatorname{ctg}\vartheta_2(b),$$

und das ist gerade die Behauptung.

7.*) Zusatz 1. In dem Satz von Nr. 6 kann (16) ersetzt werden durch

$$Q_2 \leqq Q_1 < 0, \quad R_1 \leqq R_2, \quad P_2 - S_2 = P_1 - S_1. \tag{16 a}$$

Es ist dann in (18) das Zeichen $\geqq$ durch $\leqq$ zu ersetzen, in (19) muß es $Q_1 > Q_2$ und $R_1 < R_2$ heißen, in (20) ist das Zeichen $>$ durch $<$ zu ersetzen.

Denn nach S. 789, Fußnote [6]) kann statt (22) auch

$$-\pi < \vartheta_\nu(a) \leqq 0$$

vorgeschrieben werden. Wird nun

$$Q_\nu = -\overline{Q}_\nu, \quad R_\nu = -\overline{R}_\nu, \quad \vartheta_\nu = -\overline{\vartheta}_\nu$$

gesetzt, so wird aus (21)

$$\overline{\vartheta}' = \overline{Q}_\nu \cos^2 \overline{\vartheta} + (P_\nu - S_\nu) \sin \overline{\vartheta} \cos \overline{\vartheta} - \overline{R}_\nu \sin^2 \overline{\vartheta} \tag{21 a}$$

mit

$$0 \leqq \overline{\vartheta}_\nu(a) < \pi$$

und

$$\overline{Q}_2 \geqq \overline{Q}_1 > 0, \quad \overline{R}_2 \leqq \overline{R}_1, \quad P_2 - S_2 = P_1 - S_1,$$

d. h. für (21a) gelten dieselben Voraussetzungen wie früher für (21). Daher folgt die Behauptung nun unmittelbar aus Nr. 6.

Zusatz 2. Durch Transformation der Systeme (17) kann man die Vergleichssätze noch in andere Gestalten bringen. Sind z. B. die Systeme (17) mit stetigen Koeffizienten gegeben (wobei jetzt $P_2 - S_2 = P_1 - S_1$ nicht erfüllt zu sein braucht), so erhält man für

$$y_\nu(x) = u_\nu(x) \exp \int_a^x P_\nu dx, \quad z_\nu(x) = v_\nu(x) \exp \int_a^x S_\nu dx$$

die Systeme

$$u'_\nu = v_\nu Q_\nu \exp \int_a^x (S_\nu - P_\nu)\, dx, \quad v' = u_\nu R_\nu \exp \int_a^x (P_\nu - S_\nu)\, dx.$$

Für diese ist die Voraussetzung (16) erfüllt, wenn

$$\begin{cases} Q_2 \exp \int_a^x (S_2 - P_2)\, dx \geqq Q_1 \exp \int_a^x (S_1 - P_1)\, dx > 0, \\ R_2 \exp \int_a^x (P_2 - S_2)\, dx \leqq R_1 \exp \int_a^x (P_1 - S_1)\, dx \end{cases} \tag{16 a}$$

*) Diese Nummer ist neu hinzugefügt.

ist. Die Voraussetzung (18) ist zunächst für u, v statt y, z zu formulieren und lautet, wenn man wieder y, z einführt,

$$(18\mathbf{a}) \quad \begin{cases} \text{entweder } y_1(a) = 0 \\ \text{oder } y_1(a) \neq 0, \quad y_2(a) \neq 0, \\ \dfrac{z_1(a)}{y_1(a)} \exp \int_a^x (P_1 - S_1)\, dx \geqq \dfrac{z_2(a)}{y_2(a)} \exp \int_a^x (P_2 - S_2)\, dx, \end{cases}$$

und aus (19) wird

$$(19\mathbf{a}) \quad \begin{cases} Q_2 \exp \int_a^x (S_2 - P_2)\, dx > Q_1 \exp \int_a^x (S_1 - P_1)\, dx \text{ und } [10]) \ |R_1| + |R_2| > 0 \\ \text{oder } R_2 \exp \int_a^x (P_2 - S_2)\, dx < R_1 \exp \int_a^x (P_1 - S_1)\, dx. \end{cases}$$

Entsprechend kann man auch den Zusatz 1 heranziehen. Damit erhält man die bei Butlewski angegebene Formulierung der Vergleichssätze.

---

[10]) Eigentlich $|R_1| \exp \int_a^x (P_1 - S_1)\, dx + |R_2| \exp \int_a^x (P_2 - S_2)\, dx > 0$, was aber auf die obige Ungleichung hinausläuft. Diese Ungleichung fehlt bei Butlewski, kann aber wohl beim Beweise (vgl. a. a. O., S. 99 oben und S. 105) nicht entbehrt werden.

(Eingegangen am 3. Januar 1942.)